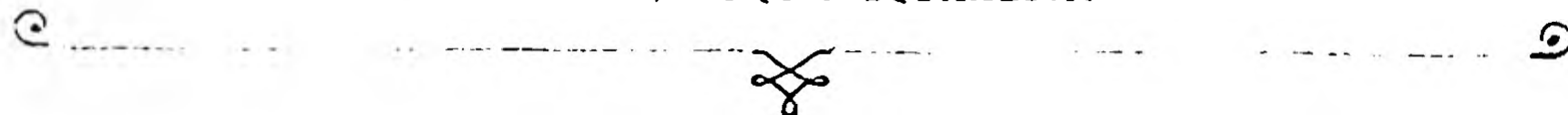


ЖОЗЕФЪ БЕРТРАНЪ,

членъ Института, профессоръ Политехнической школы и  
Французской Коллегии



ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ ОТКРЫТІЯ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО И ИНТЕГРАЛЬНАГО

ИСЧИСЛЕНІЙ

(«Предисловіе» къ «Дифференціальному Исчисленію» Бертрана, заключающее  
въ себѣ изложеніе знаменитаго спора между Лейбницемъ и Ньютономъ  
о первенствѣ открытія)

Переводъ безъ измѣненій съ послѣдняго французскаго изданія

М. В. ПИРОЖКОВА,

бывшаго преподавателя С.-Петербургской 10-ой гимназій

Цѣна 50 коп.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Издательство и книжный складъ «Наука и Жизнь»

В. Д. Дорнбергъ

(Спб., Пет. стор., Большой пр., д. 32)

1912





## Предисловіе

Открытіе Ичисленія безконечно-малыхъ явилось небывалымъ успѣхомъ для математическихъ наукъ и послужило для разнообразнѣйшихъ и неожиданнѣйшихъ приложений. Современники Лейбница и Ньютона по ихъ примѣру почерпнули въ изученіи ихъ методовъ смѣлость приступить ко множеству вопросовъ, еще столь недавно ими же считавшихся неразрѣшимыми, и къ средству разрѣшать ихъ безъ труда. Уже при первыхъ успѣхахъ можно было предположить всѣ трудности въ наукѣ устраненными заранѣе и думать, что геометры, по завѣту Лейбница, отъ чистой математики перейдутъ исключительно къ изученію законовъ природы. Но эта иллюзія была непродолжительна; съ болѣе могущественными методами возникли и болѣе трудныя задачи, которыя, несмотря на плодотворность новыхъ принциповъ, требовали все большей и большей изобрѣтательности ума. Поле предстоящихъ открытій, созерцаемое съ большей высоты, явилось лишь болѣе обширнымъ, и, какъ всегда въ такихъ случаяхъ бываетъ, новыя области, какія можно было предвидѣть, раздвинулись до предѣловъ, намѣчаемыхъ только гениемъ тѣхъ, которые принимались за ихъ изслѣдованіе.

Задачи, которымъ Дифференціальное исчисленіе обязано своимъ происхожденіемъ, были, однако, далеко не новыми. Великія открытія почти никогда, какъ извѣстно, не появляются внезапно. Новая идея рождается часто отъ какой-нибудь старой, авторъ которой не замѣтилъ ея слѣдствій, весьма очевидныхъ, но лишь послѣ ихъ открытія. Принципы Дифференціального исчисленія не представляютъ исключенія изъ этого закона: дѣйствительно, они настолько просты, что устанавливаются какъ бы сами собой, и что если ихъ считаютъ такими плодотворными и доказываютъ ихъ важное значеніе, то лишь съ цѣлью удив-

латься генію тѣхъ, кто ихъ впервые возвѣстилъ. Многіе изъ древнихъ авторовъ пользовались, въ частныхъ случаяхъ, тѣмъ же методомъ, открытіе котораго должно было принести столько славы; они раздѣляютъ честь закладки зданія, они же способствовали выполнению этого великаго труда. Мы не станемъ здѣсь вдаваться въ исторію математическихъ знаній съ цѣлью подняться, какъ указываетъ самъ Лейбницъ (\*), отъ него до Архимеда, устанавливая между ними преемственную связь. Замѣтимъ только, что геометры часто занимались разысканіемъ касательныхъ, а также maxima и minima, и что имъ была уже давно извѣстна связь между этими двумя вопросами, когда Лейбницъ опубликовалъ въ 1684 г., въ лейпцигскихъ *Acta Eruditorum*, Замѣтку въ шесть страницъ, озаглавленную: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (\*\*). Вотъ поистинѣ скромное заглавіе; читая его, можно подумать, что главнымъ преимуществомъ новаго метода является упрощеніе, вытекающее изъ устраненія необходимости освобождаться отъ знаменателей и радикаловъ: въ самомъ дѣлѣ, хотя послѣднія строки статьи и обѣщаютъ слѣдствія болѣе высокаго порядка, Лейбницъ, казалось, не подозрѣвалъ, что онъ открылъ одну изъ тончайшихъ и плодотворнѣйшихъ теорій, до какихъ только могъ дойти человѣческій умъ.

Въ этой первой Замѣткѣ излагаются, въ видѣ общихъ правилъ, методы, которые, будучи приложены къ несложному случаю, мало чѣмъ отличались бы отъ того, что уже было извѣстно. Ферматъ въ *Теоріи maxima et minima* (Fermat, *Théorie des maxima et minima*), Барроу въ своихъ *Лекціяхъ по геометріи* (Barrow, *Lectiones geometricae*), наконецъ, Слюзъ въ *Философскихъ запискахъ* (Sluze, *Transactions philosophiques*) пользовались аналогичными принципами; еще не предчувствуя цѣлаго удивительнаго ряда слѣдствій изъ нихъ, проницательные умы уже поняли ихъ важность. Дѣйствительно, Паскаль въ письмѣ къ Слюзу въ 1658 г. говорилъ о чудесахъ новаго анализа и какъ бы пророчествовалъ о новыхъ

---

(\*) *Quod calculum differentialem attinet, fateor multa ei esse communia cum iis quae et tibi et Fermatio aliisque, imo jam ipsi Archimedi erant explorata.* (Письмо Лейбница къ Валлису отъ 29 декабря 1698 г.).

Въ переводѣ на русскій языкъ эта выдержка изъ письма означаетъ: «Что касается дифференціальной исчисленія, признаюсь, много въ немъ есть общаго съ тѣмъ, что было извѣстно и тебѣ, и Фермату, и другимъ, и даже самому Архимеду».

(\*\*) Новый методъ для maxima et minima, а также для касательныхъ, обнимающій дробныя и ирраціональныя количества, и особый для нихъ родъ исчисленія.



теоріяхъ въ слѣдующихъ словахъ: „Есть общія свойства для всѣхъ этихъ вещей, знаніе которыхъ открываетъ уму еще большія чудеса природы: главное изъ нихъ состоитъ въ постиженіи двухъ безконечностей, встрѣчающихся во всемъ, одной—безконечно-большой, другой—безконечно-малой“.

Вполнѣ поэтому естественно, что опубликованіе Лейбница не произвело непосредственного глубокого впечатлѣнія, и не надо удивляться, что его современникъ Гюйгенсъ (Huyghens), одинъ изъ величайшихъ умовъ всѣхъ временъ, писалъ ему въ 1690 г., т.-е. шесть лѣтъ спустя послѣ опубликованія Замѣтки въ *Acta*: „Я имѣлъ время отъ времени кое-что изъ вашего новаго алгебраическаго исчисленія въ лейпцигскихъ *Acta*, но, находя его неяснымъ, я недостаточно въ него вникалъ для полнаго пониманія, а равно я думаю и самъ имѣть нѣкоторый равносильный методъ какъ для нахожденія касательныхъ къ кривымъ линіямъ, гдѣ обычныя правила или бесполезны, или примѣняются съ большимъ трудомъ, такъ и для многихъ другихъ изслѣдованій“.

Два мѣсяца спустя онъ писалъ снова: „Я старался со времени моего послѣдняго письма понять ваше *Дифференціальное исчисленіе*, и настолько успѣлъ, что сталъ разбираться, но всего лишь два дня тому назадъ, въ приведенныхъ вами примѣрахъ..., и даже распозналъ основаніе этого исчисленія и всего вашего метода, который я считаю очень хорошимъ и очень полезнымъ: Однако я думаю имѣть нѣчто равносильное, какъ я вамъ писалъ въ послѣдній разъ“.

И только три года спустя, 17 сентября 1693 г., онъ ему пишетъ наконецъ: „Узнайте, милостивый государь, что я сдѣлалъ нѣкоторые успѣхи въ вашемъ превосходномъ дифференціальномъ исчисленіи, полезностью котораго я все болѣе и болѣе наслаждаюсь“.

Три года спустя послѣ перваго опубликованія Лейбница и когда большинство геометровъ, недостаточно освоившихся съ новымъ ученіемъ, все еще были не въ состояніи оцѣнить его важность и постичь его глубину, Ньютонъ опубликовалъ безсмертный трудъ, который для нашихъ даже дней содержитъ въ себѣ превосходныя приложенія. Онъ въ немъ постоянно употребляетъ методъ флюксій, покоящійся, подъ другимъ видомъ, на той же идеѣ, какъ и методъ дифференціаловъ.

Ньютонъ въ своей теоріи уподобляетъ переменныя величины точкамъ въ движеніи, скорость которыхъ, или флюксія, служитъ ему для изученія закона одновременныхъ рассматриваемыхъ имъ измѣненій.

Какъ мы должны были привести имя Фермата, чтобы отмѣтить идею до Лейбница, аналогичную идеѣ дифференціаловъ, точно такъ же справедливо указать здѣсь на аналогію ученія о флюксіяхъ съ идеями, развитыми Робервалемъ (Roberval) въ его *Теоріи сложныхъ движеній* (*Théorie des mouvements composés*). Хотя Роберваль и ошибался въ изложеніи принциповъ, приложенія, имъ сдѣланныя, точны и многочисленны. Онъ предупредили, по крайней мѣрѣ, на тридцать лѣтъ великое открытіе, которое должно было ихъ похоронить. Ньютонъ не упоминаетъ о Робервалѣ, работы котораго онъ, безъ сомнѣнія, не зналъ, (но онъ точно признаетъ тождество своего ученія съ ученіемъ о дифференціалахъ и, не отмѣчая предшествующаго опубликованія Лейбница, онъ не оспариваетъ независимости его открытія. Трудно признать это яснѣе, чѣмъ дѣлаетъ самъ Ньютонъ въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Въ письмахъ, которыми я обмѣнялся десять лѣтъ назадъ съ искуснымъ геометромъ Лейбницемъ, я ему сообщалъ, что владѣю методомъ для опредѣленія *maxima* и *minima*, для проведенія касательныхъ и для рѣшенія другихъ подобныхъ же вопросовъ, и что этотъ методъ удавался такъ же хорошо для ирраціональныхъ выраженій, какъ и для прочихъ, и когда я скрылъ отъ него этотъ методъ подъ анаграммою, выражавшею слѣдующую фразу: „дано уравненіе, содержащее флюенты, найти флюксіи, и обратно“, онъ мнѣ отвѣтилъ, что равнымъ образомъ нашелъ аналогичный методъ, который мнѣ и сообщилъ и\* который отличался отъ моего, только словами и обозначеніемъ“.

Ничего нѣтъ рѣшительнѣе этихъ строкъ, написанныхъ Ньютономъ въ самый моментъ опубликованія имъ впервые своего ученія. Приводимые имъ факты никогда, притомъ, не оспаривались. До своего перваго опубликованія Лейбницъ обмѣнялся дружескими сообщеніями съ авторомъ книги: „*Принципы*“ и получилъ нѣкоторые изъ его результатовъ, при чемъ, однако, со стороны Ньютона не было желанія открывать Лейбницу приведшій къ нимъ методъ.

Впрочемъ, сохранилось два письма, на которыя намекаетъ цитированное мѣсто. Одно изъ нихъ относится ко времени за двѣнадцать лѣтъ до опубликованія Лейбница, но оба они были ему сообщены только въ 1676 г., т.-е. за восемь еще лѣтъ до статьи въ *Acta Eruditorum*. Эти письма почти исключительно посвящены изложенію открытій, относящихся къ рядамъ, и содержатъ изложеніе только задачи, рѣшенной по методу флюксій, при чемъ самый методъ былъ скрытъ подъ шиф-

ромъ, изъ котораго Лейбницъ, несмотря на свою проницательность, не могъ извлечь никакого свѣдѣнія.

Равнымъ образомъ мы имѣемъ отвѣтъ Лейбница, написанный десятью мѣсяцами позднѣе, 21 іюня 1677 г.; изъ него видно, что онъ уже владѣлъ теоріей дифференціаловъ. Далекій отъ желанія преувеличивать важность своихъ результатовъ, придавая имъ таинственный видъ, и чуждый боязни, чтобы его открытія не облегчали открытій соперника, онъ сообщаетъ ясно всѣ свои идеи и текстъ задачъ, для которыхъ онъ еще жаждетъ рѣшенія. Единственной его виною было опубликовать семь лѣтъ спустя рѣшеніе тѣхъ же самыхъ задачъ безъ заявленія, что Ньютонъ также умѣлъ ихъ рѣшать и первый извѣстилъ его объ этомъ.

Трудно, дѣйствительно, не сопоставить заглавія Замѣтки Лейбница со слѣдующимъ мѣстомъ изъ письма Ньютона:

„Къ тому же, онъ только не останавливается на уравненіяхъ, заключающихъ одно или два неопредѣленныхъ количества подъ радикалами, но и безъ всякаго преобразованія такихъ уравненій (что потребовало бы въ большинствѣ случаевъ огромной работы) касательная опредѣляется непосредственно. То же происходитъ въ maxima и minima“.

Это мѣсто дѣлаетъ права Ньютона неоспоримыми и склонило бы вѣсы въ его сторону, если бы непременно требовалось высказаться за того или другого изъ двухъ соперниковъ. Съ другой стороны, установленъ принципъ, что въ вопросахъ пріоритета первенство опубликованія создаетъ безусловное право; и это мнѣніе, энергичнымъ выразителемъ котораго явился Паскаль, рѣшило бы вопросъ, наоборотъ, въ пользу Лейбница.

„Съ того момента, говоритъ онъ, какъ открытіе опубликовано, нельзя ни убѣдить другихъ въ томъ, что оно найдено безъ этой помощи, ни увѣриться въ этомъ самому, потому что такое свѣдѣніе измѣняетъ познанія и направленіе ума: они уже болѣе не тѣ, что были раньше; даже новые пути не служили бы доказательствомъ, такъ какъ извѣстно, что насколько легко уже открытое приводитъ къ другимъ методамъ, настолько же трудно открывать это въ первый разъ; такимъ образомъ вся честь заключается въ первомъ твореніи, всѣ остальные подозрительны; чтобы только не подвергнуться такому подозрѣнію, лица, принимающія вещи въ надлежащемъ свѣтѣ, утаиваютъ свои собственные открытія, разъ имъ стало извѣстно, что другой опередилъ ихъ уже съ ними, хотя бы и имѣлись нѣкоторыя доказательства тому,

что они этого не знали, предпочитая скорѣе лишиться этого небольшого преимущества, чѣмъ навлечь на себя столь непріятный упрекъ“.

Но эти строки, такія ясныя и такія справедливыя, нельзя, однако, приложить ни къ Лейбницу, ни къ Ньютону. Паскаль не предвидѣлъ случая, когда авторъ открытія самъ сначала освѣдомилъ бы о немъ, скрывая секретъ своего метода, того, который долженъ опубликовать его первымъ. Письмо Ньютона, сообщенное Лейбницу, сохраняло, очевидно, всѣ его права, и самъ Паскаль не посовѣтовалъ бы ему *утаить свое открытіе*. Если можно предсказать по аналогіи мнѣніе Паскаля, то должно даже думать, что скорѣе Лейбницу былъ бы данъ подобный совѣтъ. Въ самомъ дѣлѣ, онъ съ большою жестокостью обрушился на Торричелли (Torricelli) за то, что тотъ первый опубликовалъ квадратуру циклоиды, найденную раньше Робервалемъ, но не опубликованную, и безъ положительнаго доказательства поспѣшно заговорилъ о плагиатѣ. Между этимъ и занимающимъ насъ вопросомъ большое сходство; его меньше изучали, потому что предметъ спора менѣе важенъ, но причины къ призыву тѣ же самыя, и мы не можемъ поступить лучше, какъ привести мнѣніе англичанина Валлиса (Wallis), который, защищая Торричелли противъ страстныхъ нападокъ Паскаля, этимъ самымъ оправдалъ заранѣе поведеніе Лейбница.

„Мы, конечно, обязаны болѣе Торричелли, который сдѣлалъ доступными открытія, пусть даже совершенныя, чѣмъ Робервалю, скрывшему свои; и мы спрашиваемъ, нужно ли было бы потому только, что Роберваль не хотѣлъ опубликовывать своихъ открытій, чтобы и Торричелли не опубликовывалъ своихъ?“

Паскаль по другому поводу самъ оправдываетъ такое поведеніе своимъ собственнымъ примѣромъ. Роберваль рѣшилъ трудную задачу относительно нѣкоторыхъ частей цилиндрическихъ поверхностей, но ничего не пожелалъ о ней опубликовывать, чтобы, говорилъ онъ, сохранить свое открытіе на случай необходимости. „Какъ только онъ узналъ, говоритъ Паскаль, что я ее рѣшилъ, онъ заявилъ, что не претендуетъ болѣе на это открытіе и ничего никогда не опубликуетъ о немъ по той причинѣ, что, ни разу не представивъ рѣшенія, онъ долженъ предоставить его тому, кто первый это сдѣлалъ. Я очень хотѣлъ бы, прибавляетъ Паскаль, чтобы всѣ такъ поступали“. Но, какъ бы то ни было и къ какому бы мнѣнію мы ни пришли, нужно отдать справедливость Ньютону, что при этихъ первыхъ опубликованіяхъ онъ былъ безупреченъ. Упомянуть о правѣ Лейбница раздѣлить съ нимъ честь,



открытія, было все, что онъ долженъ былъ сдѣлать, и онъ сдѣлалъ это безъ всякихъ разсужденій и оговорокъ. Можно замѣтить, что онъ не говоритъ о статьѣ въ лейпцигскихъ *Acta*, но, быть можетъ, онъ о ней и не зналъ.

Лейбницъ, съ своей стороны, принялъ съ самою чистосердечною искренностью точныя завѣренія своего противника относительно болѣе ранняго права на его открытіе; онъ даже, повидимому, очень мало заботился о сравненіи обѣихъ доктринъ: по крайней мѣрѣ, только въ 1694 г., т.-е. десять лѣтъ спустя послѣ Замѣтки въ *Acta Eruditorum* и семь лѣтъ спустя послѣ опубликованія книги: „*Принципы*“, пишетъ онъ Гюйгенсу:

„Я не знаю, когда увижу трудъ, только-что опубликованный Валлисомъ. Не сдѣлаете ли мнѣ одолженія скопировать мѣста, въ которыхъ Ньютонъ даетъ новыя открытія. Я не прошу собственно его приѣма нахожденія рядовъ, но если онъ даетъ способы для обратнаго предложенія о касательныхъ или что-нибудь въ этомъ родѣ, такъ какъ, сообщая мнѣ нѣкогда объ этомъ, онъ скрылъ свой методъ подъ анаграммою“.

И нѣсколькими недѣлями позже:

„Прежде всего благодарю васъ за сообщеніе труда Валлиса, касающагося Ньютона. Я вижу, что его исчисленіе согласуется съ моимъ, но я думаю, что разсмотрѣніе разностей и суммъ болѣе свойственно уму. Мнѣ кажется, что Валлисъ говоритъ довольно холодно о Ньютонѣ и въ такомъ тонѣ, что эти методы было бы не трудно извлечь изъ лекцій Барроу (Barrow). Когда что-нибудь сдѣлано, легко говорить: *И мы это могли...*“

Въ томъ же мѣсяцѣ онъ писалъ въ *Журналъ Ученыхъ*: „Нужно отдать справедливость Ньютону (которому многимъ обязаны астрономія, геометрія и оптика), что и въ этомъ, какъ стало потомъ извѣстно, онъ имѣлъ кое-что подобное свое“.

Предыдущій рассказъ вскрываетъ правдоподобно всю истину. Въ немъ никоимъ образомъ нельзя было предвидѣть матеріала для долгаго процесса, который спустя болѣе столѣтій все еще обсуждался со страстностью. Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ о приоритетѣ былъ поднятъ слишкомъ поздно; столь скромный видъ, подъ которымъ Лейбницъ представилъ свое открытіе, безспорно показываетъ, какъ мало важности придавалъ онъ ему вначалѣ. Значеніе ихъ труда росло мало-по-малу какъ въ глазахъ самихъ авторовъ, такъ и въ глазахъ ихъ учениковъ, и когда

методъ безконечно-малыхъ измѣнилъ весь видъ науки, они ближе всмотрѣлись въ свои права, строго потребовали ихъ обратно, и вскорѣ прибѣгли къ открытой войнѣ. Но не принимая участія въ этой распрѣ, которая ведется еще по настоящее время, ограничимся пересказомъ нѣкоторыхъ фактовъ, слишкомъ извѣстныхъ, чтобы возможно было пройти ихъ молчаніемъ. Къ тому же, кропотливыя изслѣдованія, къ которымъ не разъ обращались, привели вопросъ къ его исходному пункту; потомство, равно почтительное къ памяти обоихъ знаменитыхъ изслѣдователей, признало за каждымъ изъ нихъ ту долю славы, которая выпала ему вначалѣ, по самому признанію его соперника, и геометры, оцѣнивая обѣ теоріи, какъ вполне равносильныя, изучаютъ ту и другую въ ихъ источникѣ, извлекая пользу изъ различія въ точкахъ зрѣнія, облегчающаго ихъ пониманіе и освѣщающаго ихъ философію.

Вотъ что послужило поводомъ для знаменитаго спора, которому слишкомъ пылкіе друзья придали характеръ и важность настоящаго процесса.

Иванъ Бернулли (Jean Bernoulli), посвященный своимъ братомъ Яковомъ въ методы безконечно-малыхъ, предлагая геометрамъ знаменитую задачу о брахистохронѣ, объявилъ, по весьма распространенному обычаю того времени, что даетъ имъ шесть мѣсяцевъ для представленія рѣшеній, обязуясь свое въ теченіи этого времени держать въ секретѣ. Только Лейбницъ отвѣтилъ на призывъ Бернулли; но, сообщая ему свой методъ, онъ его просилъ, въ интересахъ науки, продолжить срокъ, чтобы дать возможность другимъ геометрамъ выказать свою проницательность; онъ прибавлялъ, что трудности задачи представляются такими, что онъ считаетъ возможнымъ указать заранее четыре геометровъ, способныхъ въ то время ихъ преодолѣть, если бы они согласились за нее взяться. Fatio de Duillier, членъ Лондонскаго Королевскаго Общества, который, какъ свидѣлствуютъ объ этомъ многія изъ его работъ, сдѣлалъ большіе успѣхи въ познаніи новыхъ методовъ, былъ, повидимому, глубоко уязвленъ тѣмъ, что Лейбницъ не посчиталъ его среди названныхъ имъ искусныхъ людей. Онъ горько жаловался на это въ сочиненіи, опубликованномъ въ 1699 г. подъ заглавіемъ *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex* (\*), одновременно тамъ же порицая привычку Лейбница всегда адресоваться къ публикѣ. Кромѣ того, онъ заявляетъ, что самъ, въ 1687 г., нашелъ, посредствомъ

---

(\*) Двойное геометрическое изслѣдованіе линіи кратчайшаго спуска.

своихъ собственныхъ размышленій, принципы и главныя правила открытаго Ньютономъ исчисленія флюксій, котораго Лейбницъ не является даже, по его словамъ, вторымъ авторомъ, какъ знаютъ это тѣ, кому извѣстна корреспонденція Ньютона и нѣкоторыя рукописныя статьи, которыхъ онъ не обозначаетъ.

Хотя характеръ у Duillier былъ, повидимому, тщеславный и пустой, и хотя одно лишь раздраженное самолюбіе вдохновило его на изслѣдованіе, окружившее его имя прискорбной извѣстностью, всё-же справедливость требуетъ признать его за человѣка съ истинными заслугами. Гюйгенсъ и Лейбницъ, имѣвшіе съ нимъ долгія отношенія, выказываютъ въ своей перепискѣ большое уваженіе къ его талантамъ (\*); несправедливо поэтому выставили его однимъ изъ тѣхъ невѣждъ, полныхъ зависти, которые способны, самое большее, слѣдовать за другими, сами же дать ничего не могутъ; въ особенности, зашли слишкомъ далеко, изображая его, какъ низкую и злую душу, и стараясь опозорить его память (\*\*).

Лейбницъ вмѣсто всякаго отвѣта противопоставилъ доказательства уваженія, которыя онъ получалъ, при всякомъ случаѣ, отъ Ньютона; онъ самъ охотно выражаетъ свое удивленіе автору книги: „*Принципы*“ и оспариваетъ у Фаціо право вводить его въ споръ, не имѣющій, повидимому, основанія.

Пререканія не пошли дальше, и противники положили оружіе, говорить Dr Brewster, готовые поднять его при первомъ удобномъ случаѣ.

Въ 1704 г. Ньютонъ, публикуя, въ слѣдъ за своей *Оптикой*, *Трактатъ о квадратурахъ кривыхъ*, объявилъ во Введеніи, не упоминая на этотъ разъ о Лейбницѣ, что методъ флюксій обрисовался въ его умѣ въ теченіи 1665 и 1666 гг. *Acta Eruditorum* дали въ январѣ 1705 г. отчетъ объ этомъ трудѣ, въ которомъ читаемъ слѣдующія строки:

„Талантливый авторъ, прежде чѣмъ приступить къ квадратурамъ

(\*) «Я хорошо понимаю, что эти квадратуры кривыхъ и обратная задача о касательныхъ во многихъ случаяхъ могутъ быть чрезвычайно полезны; но видя успѣхи, какіе сдѣлали Лейбницъ, Фаціо и Ньютонъ въ разрѣшеніи этихъ задачъ, прежде чѣмъ я помыслилъ о нихъ, я предпочелъ лучше воспользоваться ихъ работою, чѣмъ приниматься самому за разысканія послѣ нихъ, особенно послѣ того, какъ Фаціо подалъ мнѣ надежду на опубликованіе по этому предмету трактата Ньютона, который, по его мнѣнію, знаетъ въ немъ больше его и Лейбница вмѣстѣ».

(Письмо Гюйгенса къ Лопиталю (L'Hospital), 22 октября 1692 г.)

(\*\*) Не исправляя здѣсь его біографіи, упомянемъ лишь, что Fatio de Duillier исповѣдывалъ крайне экзальтированныя религіозныя мнѣнія; онъ вообразилъ въ себѣ даръ чудесъ и обѣщалъ воскресить публично мертваго. Ему это не удалось, и враги добились для него приговора къ позорному наказанію.



кривыхъ или лучше криволинейныхъ фигуръ, помѣщаетъ краткое введеніе, для уясненія котораго необходимо знать, что когда какая-нибудь величина, напр. линія, растетъ непрерывно флюксіею точки, описывающей ее, то называютъ разностями эти мгновенныя приращенія, т.-е. разности между величинами до и послѣ каждаго изъ этихъ измѣненій; изъ этого-то родилось дифференціальное исчисленіе и обратное ему исчисленіе суммъ (*le calcul sommatoire*), основы которыхъ были опубликованы въ нашемъ сборникѣ Лейбницемъ, открывшимъ ихъ, а различные ихъ приложенія были показаны братьями Бернулли и маркизомъ Лопиталемъ (*l'Hospital*). Это и есть тѣ дифференціалы Лейбница, которые Ньютонъ замѣняетъ и всегда замѣнялъ флюксіями, представляющими съ большимъ приближеніемъ приращенія флюентовъ, производимыхъ въ равныя частицы времени, флюксіями, изъ которыхъ онъ сдѣлалъ изящное употребленіе какъ въ своемъ трудѣ о математическихъ принципахъ природы, такъ и въ другихъ своихъ сочиненіяхъ, подобно тому какъ Фабръ (*H. Fabre*), въ своей *Synopsis mathematica*, замѣнилъ разсмотрѣніемъ движеній методъ Каваллери (*Cavalleri*)“.

Эти строки, опубликованныя безъ подписи, по всей вѣроятности написаны Лейбницемъ. Нужно сознаться, что въ нихъ онъ, повидимому, приписываетъ себѣ открытіе дифференціаловъ, а Ньютона выставляетъ какъ бы заимствовавшимъ и преобразовавшимъ ихъ; но также нельзя не признать, что если такова его мысль, то онъ предоставляетъ ее угадывать.

Др<sup>ъ</sup> Кейль (*Dr Keil*), другъ Ньютона, увидѣлъ, однако, въ этомъ вѣроломно скрытое обвиненіе и, чтобы отозваться на него, написалъ, въ письмѣ о законахъ центростремительной силы, адресованномъ Галлею (*Halley*) и опубликованномъ въ Лондонскихъ *Философскихъ запискахъ* за 1708 г.:

„Все это есть слѣдствіе знаменитой ариѐметики флюксій, открытія которой нельзя оспаривать у Ньютона, какъ легко въ этомъ убѣдиться, читая тѣ изъ его писемъ, которыя были опубликованы Валлисомъ. Этотъ методъ былъ, однако, подъ другимъ именемъ и съ другими обозначеніями, опубликованъ Лейбницемъ въ *Acta Eruditorum*“.

Лейбницъ обратился тогда къ Королевскому Обществу, членомъ котораго состоялъ, оспаривая у человека новаго, какъ Кейль, право высказываться столь смѣло о вещахъ, въ которыхъ онъ не могъ быть свѣдущъ, и требуя, чтобы онъ положилъ конецъ этимъ пустымъ и несправедливымъ воззваніямъ, порицаемымъ, безъ сомнѣнія, прибавляетъ онъ, самимъ Ньютономъ. Но въ этомъ онъ ошибался; дѣйстви-

тельно, хотя Ньютонъ избѣгалъ выступать лично въ спорѣ, но теперь уже доказано, что Кейль дѣйствовалъ съ его согласія и ничего не писалъ безъ его совѣта. Какъ бы то ни было, Общество, поставленное въ необходимость высказаться, назначило комиссаровъ, которые раньше, чѣмъ черезъ годъ, опубликовали весьма краткій докладъ, приложенный къ книгѣ, нѣсколько разъ потомъ переизданной, подъ заглавіемъ: *Commercium Epistolicum* (\*) *J. Collins et aliorum de varia re mathematica inter celeberrimos praesentis seculi mathematicos, una cum recensione praemissa insignis controversiae inter Leibnitium et Keilium de primo inventore Methodi Fluxionum; et judicio primarii, ut ferebatur, mathematici subjuncto, iterum impressum* (\*\*).

Этотъ драгоценный сборникъ для исторіи науки содержитъ большое число математическихъ сообщеній, которыми обмѣнялись англійскіе геометры какъ между собою, такъ и съ Лейбницемъ; но большинство этихъ статей чуждо спора и въ состояніи скорѣе затемнить, чѣмъ освѣтить вопросъ.

Напомнивъ исторію открытія, провозглашеннаго Лейбницемъ, который подалъ поводъ къ поднятію вопроса о пріоритетѣ, признанному уважительнымъ, комиссары рѣшаютъ о правахъ на открытіе дифференціального исчисленія съ авторитетомъ, не приличествующимъ ни людямъ ничтожно столь неизвѣстнымъ, ни друзьямъ его соперника, работающимъ, не признавая его, на глазахъ Ньютона, который помогалъ имъ, какъ потомъ было доказано, своимъ дѣятельнымъ сотрудничествомъ. Ихъ произведенія, обнаруживающаго больше страстности, чѣмъ рвенія къ истинѣ, одного было бы достаточно, чтобы предостеречь противъ вписанныхъ туда утверждений, обидныхъ для Лейбница. Въ трудѣ, который долженъ былъ носить характеръ самой нелицепріятной точности, они выступили въ роли не судей, а обвинителей и адвокатовъ, не боясь выдавать свои предубѣжденія или свои догадки за несомнѣнныя истины; такимъ образомъ, было бы неосторожно выказать имъ безусловное довѣріе, и матеріалы, которые они намъ передали, должны быть подвергнуты строгой критикѣ.

Полезно, однако, воспроизвести текстъ ихъ доклада, потому что онъ ясно устанавливаетъ какъ сущность вопроса, такъ и узелъ спора.

(\*) Это заглавіе 2-го изданія было проредактировано Ньютономъ, который перепробовалъ, какъ доказываетъ изслѣдованіе его бумагъ, до двѣнадцати различныхъ редакцій.

(\*\*) *Собраніе писемъ И. Коллинза и другихъ о различныхъ математическихъ вещахъ между славнѣйшими математиками настоящаго вѣка, съ предпосланною рецензією о замѣчательномъ спорѣ между Лейбницемъ и Кейлемъ о первомъ изобрѣтателѣ Метода Флюксий; изданіе, дополненное приговоромъ надъ первѣйшимъ, какъ гласила молва, математикомъ.*

„Мы прочли письма и копии съ писемъ, хранящіяся какъ въ архивахъ Королевскаго Общества, такъ и въ коллекціи Ивана Коллинза, съ датами, относящимися къ годамъ 1669—1677. Мы удостовѣрились въ подлинности тѣхъ, которыя носятъ имена Барроу, Коллинза, Ольденбурга и Лейбница, изъ показаній лицъ, знакомыхъ съ ихъ почеркомъ. Относительно писемъ, носившихъ имя Грегори (Gregory), мы положились на самого Коллинза, скопировавшаго собственноручно часть этихъ писемъ. Мы извлекли изъ этихъ писемъ все, что относилось къ занимающему насъ предмету, и констатировали, что эти извлеченія, представляемые вамъ одновременно съ этими письмами, были сдѣланы тщательно.

„Изъ этихъ писемъ и документовъ слѣдуетъ:

✓ I. Лейбницъ въ началѣ 1673 г. былъ въ Лондонѣ; около марта мѣсяца онъ выѣхалъ въ Парижъ, откуда, по просьбѣ Ольденбурга, поддерживалъ съ Коллинзомъ переписку, продолжавшуюся до 1676 г. Затѣмъ онъ возвратился черезъ Лондонъ и Амстердамъ въ ГанOVERъ. Извѣстно же, что Коллинзъ всегда сообщалъ весьма охотно математикамъ то, что узнавалъ отъ Ньютона и отъ Грегори.

✓ II. Лейбницъ объявилъ себя, послѣ своего перваго Лондонскаго путешествія, изобрѣтателемъ нѣкоего метода, а именно дифференціального, и хотя Пелль (Pell) увѣдомилъ его, что Ньютонъ уже пользовался этимъ методомъ, онъ тѣмъ не менѣе продолжалъ приписывать себѣ всѣ права изобрѣтателя, какъ по тому, что онъ его нашелъ, по его словамъ, безъ всякой посторонней помощи, не зная объ опубликованіяхъ Ньютона, такъ и по тому, что онъ къ нему много прибавилъ. Мы же не находимъ никакого упоминанія о дифференціальномъ методѣ иномъ, чѣмъ методъ Ньютона, до письма Лейбница отъ 11 іюня 1677 г., спустя цѣлый годъ, какъ отправлено было письмо Ньютона, отъ 10 декабря 1672 г., въ Парижъ для передачи Лейбницу, и четыре года спустя, какъ Коллинзъ сталъ сообщать это самое письмо своимъ друзьямъ. Въ этомъ письмѣ методъ флюксій достаточно описанъ для всякаго, находящагося въ курсѣ этихъ вещей.

✓ III. Изъ письма Ньютона отъ 13 іюня 1676 г. вытекаетъ съ очевидностью, что уже за пять лѣтъ до этой даты онъ зналъ методъ флюксій. Равнымъ образомъ вытекаетъ изъ его анализа посредствомъ уравненій съ безконечнымъ числомъ членовъ, сообщеннаго Барроу и Коллинзу въ 1669 г., что онъ еще и до этого времени думалъ о томъ же методѣ.



„IV. Дифференціальний методъ совершенно тотъ же, что и методъ флюксий, за исключеніемъ названія и обозначенія... Мы полагаемъ, что приписавшіе изобрѣтеніе Лейбницу не знали или знали плохо объ отношеніяхъ, существовавшихъ между имъ и Коллинзомъ, и не знали, что Ньютонъ пользовался тѣмъ же методомъ за пятнадцать лѣтъ до того, какъ Лейбницъ приступилъ къ его опубликованію въ *Acta Eruditorum*.

„Послѣ всего этого мы думаемъ, что Ньютонъ есть первый изобрѣтатель этого метода и что, слѣдовательно, Кейль, приписывая его Ньютону, никоимъ образомъ не поступилъ неправильно или несправедливо по отношенію къ Лейбницу“.

По этому приговору притязанія Лейбница не могли имѣть никакого основанія. Онъ тщетно жаловался: „Но я не знаю, писалъ онъ Шамберлену (Chamberlayne), какимъ крюкотворствомъ и какимъ обманомъ поставили кто-то дѣло такъ, будто я жалуюсь передъ Обществомъ и подчиняюсь его юрисдикціи, о чемъ я никогда не помышлялъ; и по справедливости должно было бы меня увѣдомить, что Общество желаетъ разобратъ сущность дѣла, и должно было бы предоставить мнѣ высказаться, желаю ли я изложить свои доводы и не имѣю ли я подозрѣнія противъ кого-либо изъ Судей. Итакъ, судили *по выслушаніи* только *одной стороны* (*una parte audita*); недѣйствительность такого образа дѣйствій очевидна. Также не думаю я, чтобы вынесенный ими Приговоръ могъ быть принятъ за постановленіе Общества.

„Однако по иниціативѣ Ньютона была издана Книга исключительно съ цѣлью меня обезславить и была разослана въ Германію, Францію и Италію, какъ бы отъ имени Общества. Этотъ самозванный приговоръ и это безпричинное поношеніе одного изъ старѣйшихъ членовъ самого Общества, который ничѣмъ его не запятналъ, почти не найдетъ защитниковъ въ свѣтѣ; и въ самомъ Обществѣ, я надѣюсь, не всѣ члены согласятся съ нимъ. Знающіе французы, итальянцы и другіе открыто порицаютъ этотъ процессъ и удивляются ему: на это имѣются письма въ рукахъ; выставленные противъ меня доказательства кажутся имъ весьма слабыми.

„Я всегда поступалъ наичестнѣйшимъ образомъ по отношенію къ Ньютону; и хотя теперь открывается большое поле для сомнѣній, владѣлъ ли онъ моимъ открытіемъ до полученія его отъ меня, я говорилъ, что онъ имѣетъ какъ бы нѣчто собственное, подобное моему методу. Но введенный въ заблужденіе нѣкоторыми неосторожными

льстецами, онъ рѣшился повести противъ меня весьма чувствительную атаку. Судите теперь, Милостивый Государь, съ чьей главнымъ образомъ стороны должны быть приняты необходимыя мѣры для прекращенія этой распри“.

Однако, какъ только Коммиссія высказалась, англійскіе геометры приняли ея заключенія и посмотрѣли на нихъ, какъ на солидно обоснованныя. Такъ поступаетъ Тэйлоръ въ трудѣ, озаглавленномъ *Methodus Incrementorum*, гдѣ имя Лейбница даже не упоминается; то же подтверждаетъ Маклоренъ въ *Treatise of Fluxions*, опубликованномъ въ 1735 г.; наконецъ, Бюффонъ съ еще большею силою повторяетъ то же самое въ предисловіи къ переводу труда Ньютона. Лейбницъ, если принять его рассказъ, прибавилъ къ неизвинительной недобросовѣстности почти смѣшную безтактность.

„Лейбницъ, говоритъ онъ, находился въ обладаніи, и въ обладаніи неоспоримомъ, всего того, что произвела геометрія наиболѣе блестящаго за двадцать вѣковъ; но этотъ блескъ славы не былъ продолжителенъ; слишкомъ ревностные приверженцы и ослѣпленные ученики, желая возвысить своего учителя, были причиною пониженія его репутаціи“.

Большая часть геометровъ континента осталась, однако, при противоположномъ мнѣніи; очень многіе изъ нихъ и, притомъ, наиболѣе знаменитые признали права Лейбница, обвиняя англичанъ въ несправедливости и легкомысліи.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, постановленіе комиссаровъ; его можно свести къ двумъ положеніямъ:

①. Исчисленіе флюксій не отличается отъ дифференціального исчисленія.

②. Это единственное въ своемъ родѣ ученіе, созданное Ньютономъ, было ясно сообщено Лейбницу, прежде чѣмъ онъ опубликовалъ его, какъ свое.

Первое изъ этихъ утвержденій неоспоримо: формальное заявленіе каждаго изъ обоихъ соперниковъ избавляетъ насъ отъ необходимости настаивать на этомъ пунктѣ, на которомъ сходятся обѣ стороны.

Что касается обвиненія въ плагиатѣ, взводимого на Лейбница, потомство его не утвердило. Оно покоится, какъ мы видѣли, на сообщеніи Лейбницу Ольденбургомъ письма, написаннаго Ньютономъ отъ 10 декабря 1672 г., въ которомъ, говорятъ комиссары, методъ флюксій достаточно описанъ для всякаго понимающаго человѣка. Но этотъ существенный пунктъ обвиненія исчезаетъ совершенно, потому что

при очень недавнемъ осмотрѣ бумагъ Лейбница, сохраненныхъ въ Гановерѣ, обнаружилось, что это письмо не было послано цѣликомъ и что въ извлеченіи, полученномъ Лейбницемъ въ 1676 г., только слѣдующее мѣсто относится къ методу флюксій.

„Послѣ смерти Грегори Коллинзъ собралъ обширную корреспонденцію, которую они вели и въ которой находится исторія метода рядовъ. Ньютонъ обѣщалъ ему тогда присоединить къ ней свой собственный методъ для опубликованія при первомъ же случаѣ. Не будетъ нестати прибавить, что Ньютонъ, сообщая намъ, отъ 10 декабря 1672 г., свой методъ касательныхъ къ геометрическимъ кривымъ, опредѣляемымъ посредствомъ уравненія между ординатою и абсциссою, прибавлялъ, что это частный случай или лучше слѣдствіе изъ общаго метода, который распространяется, безъ сложныхъ вычисленій, не только на опредѣленіе касательныхъ ко всѣмъ кривымъ геометрическимъ, механическимъ или зависящимъ по какому бы то ни было закону отъ прямыхъ или кривыхъ линій, но также и на рѣшеніе болѣе трудныхъ задачъ, относящихся къ площадямъ, къ длинамъ, къ кривизнѣ линій, къ центрамъ тяжести, и проч.; и, прибавляетъ онъ, этотъ методъ не ограничивается, подобно методу Гедда (Hudde) для maxima и minima и методу Слюза (Sluze) для касательныхъ, уравненіями, освобожденными отъ ирраціональныхъ членовъ. Ньютонъ соединилъ, говоритъ онъ, этотъ методъ съ методомъ, который покоится на развертываніи уравненій въ бесконечные ряды, и онъ помнитъ, что когда Др<sup>р</sup> Барроу опубликовалъ свой трудъ, онъ его увѣдомилъ, что владѣетъ такимъ методомъ“.

Нѣтъ здѣсь, какъ видно, ни изложеннаго, ни намѣченнаго метода; это письмо, столь рѣшающее по мнѣнію комиссаровъ, ставитъ только вопросъ, для котораго Лейбницъ, судя по его отвѣту, напечатанному въ *Commercium Epistolicum*, зналъ уже рѣшеніе.

Это открытіе вдвойнѣ драгоцѣнно: оно не только сводитъ на нѣтъ наиболѣе тяжкое обвиненіе комиссаровъ, но и подтверждаетъ въ нѣкоторомъ родѣ точность увѣреній Лейбница, когда онъ заявляетъ, что это въ Вѣнѣ онъ узналъ объ опубликованіи *Commercium*'а и что, отвѣчая на него, онъ зналъ его только по донесеніямъ своихъ друзей, не видѣвъ еще самого экземпляра. Такое заявленіе признали весьма неправдоподобнымъ; однако оно объясняетъ то, что безъ этого было бы очень трудно понять: какъ Лейбницъ, которому стоило произнести лишь одно слово, чтобы доказать относительно этого важнаго пункта



все легкомысліе своихъ противниковъ, могъ воздержаться отъ всякаго возраженія.

Итакъ, не существуетъ никакого доказательства противъ полнѣйшей искренности великихъ геніевъ, вступившихъ въ споръ, и должно имъ обоимъ приписать честь открытія, на которое они оба заявляютъ свои права.

Однако каждый изъ двухъ соперниковъ взялъ обратно уступки, которыя онъ имѣлъ прямодушіе сдѣлать, и ихъ поведеніе по поводу *Commercium Epistolicum* не оставляетъ выбора для тѣхъ, кто желалъ бы видѣть много легкомыслія въ прошломъ, или отсутствіе недобросовѣстности въ настоящемъ. Оно было бы непостижимо, если бы мы не знали, какъ сказалъ Паскаль, что *великіе люди, какъ бы они ни были возвышенны, съ нѣкоторой стороны такъ походятъ на малыхъ*.

Лейбницъ, столько разъ приписывавшій Ньютону честь независимаго и болѣе ранняго, чѣмъ его, открытія, на самомъ дѣлѣ не имѣлъ достаточно внутренней правды и моральной возвышенности, чтобы остаться справедливымъ по отношенію къ тому, кто, спрятавшись подъ прозрачнымъ вуалемъ, старался его обезславить.

Но за нимъ еще болѣе тяжкая вина: добившись отъ Ивана Бернулли сужденія о правахъ Ньютона подъ условіемъ держать его въ секретѣ, онъ опубликовалъ его безъ согласія автора, вставивъ туда фразу, равносильную подписи. Такой поступокъ непростителенъ.

Ньютонъ съ своей стороны старался истолковать въ другую сторону сдѣланное имъ заявленіе, столь, однако, определенное, о правахъ Лейбница. Въ самомъ дѣлѣ, въ 1716 г. онъ пишетъ:

„Онъ утверждаетъ, будто я въ моей книгѣ: „*Принципы*“, на стран. 253 и 254, согласился съ тѣмъ, что онъ владѣетъ независимо отъ меня открытіемъ Дифференціального исчисленія; приписывать же открытіе въ настоящее время самому себѣ значитъ брать назадъ сдѣланную ему уступку. Но въ цитируемомъ имъ параграфѣ я не нахожу ни одного благопріятнаго для него слова. Напротивъ, я тамъ говорю, что увѣдомилъ о своемъ методѣ Лейбница раньше, чѣмъ онъ меня о своемъ; и я ставлю въ обязанность доказать, что онъ нашелъ методъ раньше даты моего письма, т.-е. за восемь мѣсяцевъ, по крайней мѣрѣ, до даты своего письма. Кромѣ того, отсылая тамъ читателей къ письмамъ, которыми мы, Лейбницъ и я, обмѣнялись за десять лѣтъ передъ этимъ, я имъ предоставилъ руководиться этими письмами, могущими служить для разъясненія разсматриваемаго параграфа.

Онъ, наконецъ, имѣлъ безтактность опустить разсматриваемую Замѣтку въ изданіи 1726 г., безъ иного результата, какъ еще сильнѣе подчеркнуть рѣшающую важность свидѣтельства, которое, будучи помѣщено въ книгѣ: „*Принципы*“, застраховано отъ гибели.

Но нѣтъ надобности слишкомъ останавливаться на этихъ безплодныхъ преніяхъ, отъ которыхъ наука ничего не выигрываетъ и которыя не освѣщаютъ вопроса даже исторически. Однимъ словомъ, хотя опубликованіе Ньютона произошло позднѣе опубликованія Лейбница, доказано, что онъ ничѣмъ ему не обязанъ, но все заставляетъ думать, что онъ ни въ чемъ ему и не помогъ. При отсутствіи положительнаго доказательства кто осмѣлился бы заподозрить Лейбница, его столь искренняго и столь преданнаго истинѣ, въ сокрытіи источниковъ, полученныхъ имъ отъ соперника? Вся его жизнь, столько разъ и столь подробно изученная, снимаетъ съ него подобное обвиненіе. Система, которую поддерживаютъ его противники, недопустима, впрочемъ, сама по себѣ. Въ самомъ дѣлѣ, они обвиняютъ его въ добровольномъ сокрытіи истинъ, что многочисленные свидѣтели могли бы легко показать во время перваго опубликованія. Если одного благоразумія, за отсутствіемъ чувствъ болѣе его достойныхъ, оказалось недостаточнымъ помѣшать ему пренебречь столь тяжкимъ обвиненіемъ, заслуженно навлекая его на себя, то какъ повѣрить, что друзья Ньютона ждали бы двадцать пять лѣтъ, чтобы сорвать съ него маску? Ихъ упреки, вмѣсто того чтобы медленно растравляться горечью долгой и запоздалой распри, обрушились бы съ самаго начала, чтобы его пристыдить.

Итакъ, Лейбницъ и Ньютонъ раздѣляютъ славу открытія Дифференціальнаго исчисленія, и, хотя различно знаменитые, каждый изъ нихъ долженъ считаться почтѣннымъ встрѣчею съ такимъ соперникомъ. Хотя они вполнѣ сходятся въ существѣ предмета, въ формахъ его выраженія, принятыхъ ими, видна печать ихъ геніевъ, столь несходныхъ между собою. Одинъ, болѣе занятый законами вселенной, чѣмъ законами человѣческаго ума, какъ кажется, видитъ въ новыхъ методахъ главнымъ образомъ орудіе для своихъ усилій постичь природу и, назначая для нихъ болѣе возвышенную цѣль, лучше показалъ все ихъ значеніе. Другой, положившій свою славу въ совершенствованіи искусства открытій, болѣе ясно намѣтилъ дорогу, и мы еще нынѣ слѣдуемъ по оставленнымъ имъ на ней свѣтлымъ слѣдамъ. Первый, представляя свои открытія только послѣ долгаго созрѣванія формы, могъ придать своимъ трудамъ нѣчто болѣе совершенное и болѣе прочное и

заставить свою мысль бить ключомъ всѣми заключенными въ ней истинами. Второму, болѣе искусному въ набрасываніи крупныхъ штриховъ, нравилось подымать самые разнообразныя вопросы, будя вѣрныя и плодотворныя идеи, преслѣдовать и развивать которыя онъ предоставлялъ другимъ. Ньютонъ рѣдко считалъ себя обязаннымъ провозглашать правило, не сдѣлавъ прежде его приложенія; Лейбницъ, наоборотъ, любилъ давать наставленія и выказывалъ больше склонности предлагать прекрасныя задачи, чѣмъ входить въ подробности ихъ рѣшеній. Если бы болѣе прилежный Ньютонъ опубликовалъ десятью годами раньше свою теорію флюксій, имя Лейбница всё-же осталось бы однимъ изъ величайшихъ въ исторіи человѣческаго духа, но потомство, помѣщая его безусловно среди геометровъ перваго порядка, связало бы его славу по преимуществу съ философскими его идеями и съ универсальностью его работъ. Наоборотъ, если бы Лейбницъ, приступивъ раньше къ математическимъ изслѣдованіямъ, лишилъ бы своего соперника чести ихъ общаго открытія, все-таки въ книгѣ: „*Принципы*“ удивлялись бы попрежнему какъ величію полученныхъ результатовъ, такъ и несравненному блеску подробностей, и Ньютонъ, теряя свои права на открытіе метода, использованнаго въ его книгѣ съ такимъ искусствомъ, остался бы на той же высотѣ среди геометровъ, какъ и нынѣ, т.-е. я хочу сказать, рядомъ съ Архимедомъ и выше всѣхъ остальныхъ.

Воздавъ справедливость каждому изъ обоихъ изобрѣтателей и снявъ съ Лейбница обвиненіе, слишкомъ легко и слишкомъ часто взводимое на него, мы всё-же зашли бы слишкомъ далеко, утверждая вмѣстѣ съ Фонтенеллемъ (Fontenelle), что искренность Лейбница ни въ какомъ другомъ случаѣ не подвергалась сомнѣнію; знаменитый геометръ, безпрерывно занятый многими предметами за-разъ, находясь въ оживленной перепискѣ съ большимъ числомъ ученыхъ, которые, часто противорѣча другъ другу, сговаривались просить у него совѣтовъ и наставленій, могъ не рѣдко что-либо забывать и тѣмъ оскорблять самолюбіе того или иного изъ современниковъ, возбуждая такимъ образомъ порою противъ себя справедливое неудовольствіе.

Ограничимся выпискою слѣдующаго мѣста изъ письма Гюйгенса къ Лопиталю отъ 9 апрѣля 1693 г.

„Лейбницъ, конечно, весьма талантливъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ имѣетъ непомѣрное стремленіе выставяться, какъ это видно еще въ 13-мъ номерѣ Journal'a за тотъ же годъ, когда онъ говоритъ о своемъ анализѣ



безконечныхъ, о задачѣ локсодромій, которую Жакъ Грегориусъ (Jas Gregorius) рѣшилъ задолго до него въ Геометрическихъ Разсужденіяхъ, о стройныхъ законахъ планетныхъ движеній, гдѣ онъ слѣдуетъ открытію Ньютона, но, примѣшивая свои мысли, портитъ его, въ своемъ построеніи цѣпной линіи, которое онъ предпочитаетъ построенію Бернулли, какъ будто это не одно и то же. Къ тому же я въ сильномъ сомнѣніи по соображеніямъ, которыя могъ бы привести, не выведено ли его построение изъ построения Бернулли. Но я васъ прошу объ этомъ ничего не говорить“.

Приводя эти нападки, всецѣло конфиденціальныя и, притомъ, формулированныя, можетъ быть, весьма легко, спѣшимъ прибавить, что онѣ никоимъ образомъ не даютъ права подвергать сомнѣнію научную честность Лейбница; но это-то именно и допускали слишкомъ часто по отношенію къ нему. Самъ Фонтенелль, въ похвальномъ словѣ Лейбницу, не устоялъ противъ желанія сдѣлать заманчивое сближеніе, не останавливаясь передъ мыслью, что въ немъ трудно было бы не увидѣть оскорбительнаго для его героя намека.

„Если Лейбницъ, говоритъ онъ, былъ бы плагиаторомъ, то онъ, такимъ образомъ, былъ бы уличенъ только въ этотъ разъ и походилъ бы на героя Макиавелли, который дѣйствительно добродѣтеленъ, пока дѣло не идетъ о коронѣ. Красота системы безконечно-малыхъ оправдываетъ это сравненіе“. Но само это послѣднее замѣчаніе весьма спорно: дифференціальное исчисленіе, столь важное по своимъ послѣдствіямъ, не представляетъ одного изъ тѣхъ блестящихъ открытій, которыя являются уму сразу во всемъ своемъ блескѣ, и ничто не доказываетъ, какъ мы уже видѣли, чтобы въ моментъ своего перваго опубликованія Лейбницъ замѣтилъ всю его важность. Его большою заслугою было уловить въ извѣстныхъ уже теоріяхъ пунктъ дѣйствительно существенный такимъ образомъ, чтобы извлечь изъ нихъ, для преподаванія всѣмъ, методъ открытія, который только самые талантливые могли распознать въ доказательствахъ его предшественниковъ. Этимъ онъ привелъ сложныя разсужденія къ простымъ и изящнымъ выкладкамъ; замѣчая послѣднія какъ бы въ моментъ озаренія лучомъ свѣта, ученые до сихъ поръ придавали имъ неузнаваемый видъ, внося различныя поправки съ цѣлью утвердить за ними строгость. Они удовлетворялись, объявляя о результатѣ своихъ размышленій, и не заботились намѣчать достаточно ясно дальнѣйшій путь, по которому, въ свою очередь, могъ бы слѣдовать за ними кто-нибудь другой. Лейбницъ, напротивъ,

не колеблясь, противопоставлялъ химерическимъ возраженіямъ, наводившимъ напрасный страхъ, интуитивныя воззрѣнія ума, безъ которыхъ не обходится никакое надлежащее знаніе. Это та природная ясность ума, которая, освѣщая самыя до тѣхъ поръ сокровенныя теоріи и давая возможность проникнуть въ нихъ, такъ сказать, съ одного взгляда, способствовала болѣе, чѣмъ все остальное, развитію ихъ слѣдствій.

Я считалъ своею обязанностью дать нѣсколько историческихъ подробностей относительно открытія дифференціального исчисленія, но не въ моихъ планахъ излагать здѣсь полную исторію его успѣховъ и его развитія. Невозможно, однако, не упомянуть о роли братьевъ Ивана и Якова Бернулли, которые были непосредственными учениками Лейбница и повѣренными всякой его мысли. Ихъ имя переплетается съ именемъ Лейбница на каждой страницѣ исторіи новаго исчисленія, и это знаменитое сходство должно закрѣпить въ памяти людей ту связь, которую многія тучи нарушали въ теченіи ихъ жизни. Они воздѣлывали дифференціальное исчисленіе съ такимъ успѣхомъ, что имъ принадлежитъ, писалъ Лейбницъ, столько же, сколько ему самому. Старшій, Яковъ, въ первый разъ употребилъ исчисленіе безконечно-малыхъ при рѣшеніи механической задачи, рѣшенной уже Гюйгенсомъ и предложившимъ ее Лейбницемъ. Знаменитый авторъ новыхъ методовъ старался поощрить молодого и блестящаго ученаго и приписалъ ему непосредственно всю заслугу рѣшенія. Хотя синтетическое рѣшеніе было уже дано, немногіе геометры сѣумѣли бы, говоритъ онъ, примѣнить дифференціальное исчисленіе, принципы котораго *еще мало извѣстны и въ духъ котораго, сколько я знаю, никто полнѣе не проникъ*.

Иванъ Бернулли, младшій братъ Якова, не замедлилъ пойти по той же дорогѣ и выдѣлился какъ своею проницательностью въ рѣшеніи задачъ, такъ и трудностью и интересностью тѣхъ, которыя самъ предлагалъ. Лейбницъ отнесся къ нему съ тою же заботливостью; онъ часто вдохновлялъ эти два блестящихъ ума, и они не разъ возвращали ему во всей силѣ побудительный толчокъ, полученный отъ него.

Переписка Лейбница съ братьями Бернулли образуетъ два тома. Никакой другой трудъ не заключаетъ, можетъ-быть, задачъ болѣе остроумныхъ и въ большемъ числѣ. Предложенные и рѣшенные тамъ вопросы показываютъ могущество новыхъ методовъ и проницательность знаменитыхъ авторовъ. Геометры всегда будутъ находить удовольствіе и пользу въ изученіи въ этой перепискѣ вмѣстѣ съ идеями

изобрѣтателей и самыхъ рѣшеній, которыя наука, несмотря на свои успѣхи, съ трудомъ упрощала и обобщала. Но сами по себѣ эти задачи могутъ быть присоединены только въ небольшомъ числѣ къ общему изложенію доктрины, успѣхамъ которой онѣ столько способствовали, а исторія роли братьевъ Бернулли явилась бы свѣтозарной и правдивой только при подробномъ изложеніи ихъ трудовъ.

Послѣ Лейбница, Ньютона и братьевъ Бернулли рядъ великихъ геометровъ болѣе не прерывался. Эйлеръ и Даламберъ, Лагранжъ и Лапласъ, Гауссъ и Абель, Коши и Якоби послѣдовательно направляли непрестанное движеніе математическихъ знаній, а ихъ многочисленные ученики, являвшіеся часто ихъ соперниками, помогали намъ, вдохновляясь ими, понимать и цѣнить ихъ. Я не могу ставить своею цѣлью дать здѣсь исторію успѣховъ, которыми мы имъ обязаны. Даже подробное изложеніе нынѣшнихъ теорій будетъ приводить насъ только изрѣдка къ ознакомленію съ трудами открывателей. Въ самомъ дѣлѣ, наука въ своемъ быстромъ прогрессѣ въ концѣ семнадцатаго вѣка не шла тѣмъ путемъ, который мы должны будемъ избрать для изложенія ея принциповъ. Геометры тогда занимались по преимуществу рѣшеніемъ задачъ, преодолая трудности по мѣрѣ того, какъ онѣ представлялись, и заботясь только о томъ, чтобы достичь цѣли. Поэтому вышло, что когда Лопиталь въ 1694 г. и Эйлеръ въ 1755 г. опубликовали труды, содержащіе, особенно труды Эйлера, вмѣстѣ съ великими и истинными взглядами многочисленные и столь превосходные примѣры, тотъ и другой изложили въ первый разъ общія теоріи, открытіе которыхъ было бы, однако, несправедливо приписывать имъ. Стремясь единственно къ распространенію науки, которую они ежедневно двигали впередъ, они ограничиваются ознакомленіемъ съ методами, не разсуждая объ ихъ происхожденіи, и такъ какъ нельзя предполагать, что они претендуютъ на честь открытія всего, то нѣтъ ничего скромнѣе, какъ это умолчаніе, которое, повидимому, все отдаетъ во владѣніе всѣхъ.

Итакъ, невозможно связать каждую теорію съ безспорнымъ именемъ открывателя, и описанный нами знаменитый споръ возобновлялся бы при каждомъ важномъ шагѣ въ наукѣ, если бы, подобно тому какъ много разъ хотѣли установить, что только одинъ открылъ новый путь, непремѣнно старались бы рѣшать, въ какомъ порядкѣ вступали на него геометры и докуда каждый тотчасъ продвигался впередъ. Въ самомъ дѣлѣ, нѣкоторыя истины пріобрѣтаются неявно,



какъ только вниманіе обращено на приводящій къ нимъ принципъ, и можно сказать, напр., что Замѣтка, опубликованная въ 1684 г. въ лейпцигскихъ *Acta*, не могла не привести быстро ко всей почти совокупности теорій, образующихъ первую Книгу этого труда.

Первая глава посвящена геометрическому изученію бесконечно-малыхъ. Въ ней мы увидимъ, на подробно развитомъ рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ, какъ должны вестись разсужденія, чтобы быть вполне строгими. Но разъ принципы установлены, въ дальнѣйшемъ изложеніи мы часто будемъ пользоваться особымъ удобнымъ языкомъ, въ которомъ нужно видѣть не что иное, какъ тѣ же самыя идеи, только болѣе кратко выраженные. Эти сокращенія состоятъ въ непосредственномъ, и безъ указанія причины, отбрасываніи того, что дѣйствительно можетъ быть отброшено, и въ называніи однимъ и тѣмъ же именемъ, какъ если бы онѣ были тождественными, точекъ и линій, ~~различная под-~~становка которыхъ не можетъ повліять на конечный результатъ, напр., часто будемъ говорить: *касательная въ точку кривой проходитъ черезъ бесконечно-близкую точку; когда подвижная прямая остается касательною къ кривой, ее можно разсматривать въ каждое мгновеніе, какъ вращающуюся вокругъ точки касанія*; эти выраженія и многія другія, имъ аналогичныя, хотя и неправильныя, но настолько приняты, что къ нимъ нужно привыкнуть, какъ къ освященнымъ временемъ терминамъ, сокращающимъ рѣчь. Для многихъ авторовъ методъ бесконечно-малыхъ состоитъ въ замѣнѣ кривой многоугольникомъ съ бесконечно-малыми сторонами. Эта подстановка почти всегда приводитъ къ точнымъ результатамъ, и выводимыя изъ нея доказательства всегда должны быть тщательно изслѣдованы. Они весьма просты, но ихъ ясность, болѣе видимая, чѣмъ дѣйствительная, исчезаетъ, если всмотрѣться въ нихъ ближе.

Лейбницъ и братья Бернулли, Эйлеръ и Лопиталь (\*) употребляли этотъ языкъ, и хотя они дали доказательство весьма надежнаго знанія въ своихъ геометрическихъ приложеніяхъ метода бесконечно-малыхъ, все-же понятно, что, читая ихъ труды, геометры, привычныя къ Эвклидовой строгости, нѣсколько затруднялись принимать ихъ разсужденія, и что признанная точность результатовъ была необходима для успокоенія нѣкоторыхъ читателей на счетъ законности не слишкомъ строгаго

---

(\*) Ньютонъ всегда такъ же безупреченъ въ формѣ, какъ строгъ по существу.

языка. Знаменитая фраза Даламбера: „Идите впередъ, и вѣра къ вамъ придетъ“ ничего другого не выражаетъ. Парижская Академія Наукъ нѣкоторое время отказывалась допускать ученіе, нарушавшее, казалось, геометрическую чистоту; она дала толчокъ къ горячимъ преніямъ, въ которыхъ многіе изъ ея членовъ, съ упорствомъ преслѣдуя ложныя идеи, которыя они сами себѣ составили, и выраженія, которыя ихъ шокировали, и не желая вникнуть въ сущность вещей, оспаривали не только строгость разсужденій, но даже точность правилъ Лейбница. Эта оппозиція была полезна, заставляя *геометровъ безконечно-малыхъ* придавать болѣе ясную форму спорнымъ принципамъ, которые, можетъ-быть, плохо понимались одними только потому, что ихъ до сихъ поръ плохо объясняли другіе. Самъ Лейбницъ, котораго на послѣдокъ поняли во всемъ его значеніи и удивлялись ему величайшіе геометры Европы, не ограждался своею славою и не презиралъ критики: онъ не гнушался отвѣчать всею учтивостію противникамъ, которыхъ уважалъ, несмотря на слабость ихъ доводовъ. Извѣстенъ его отвѣтъ въ *Journal de Trévoux* по необычайной уступчивости, признающей, какъ казалось, ту недостаточность строгости, въ которой его упрекали. Въ самомъ дѣлѣ, онъ уподобляетъ безконечно-малыя разныхъ порядковъ несравнимымъ между собою величинамъ вслѣдствіе ихъ крайняго неравенства, подобно песчинкѣ и земному шару. Такой языкъ, нужно признаться, не обозначаетъ ничего точнаго и повелѣ бы къ смѣшенію безконечно-малой съ очень малою величиною. Лейбницъ походитъ въ этомъ случаѣ, говоритъ Фонтенелль, на архитектора, который возвелъ столь смѣлое зданіе, что самъ не осмѣливается въ немъ поселиться, тогда какъ другіе, болѣе довѣрчивые, поселяются тамъ безъ страха и важнѣе, безъ несчастнаго случая. Но къ этой цитатѣ должно прибавить, что такъ какъ письмо Лейбница написано не для геометровъ, то уступка слишкомъ, повидимому, робкая, была, можетъ-быть, только благоразумною. Притомъ Лейбницъ на счетъ этого пункта отсылаетъ къ труду Лопиталя, который излагаетъ его съ точностью простотою. Впрочемъ, всякое пререканіе не замедлило исчезнуть послѣ точнаго опредѣленія употребляемыхъ терминовъ, и эти вещи были освѣщены и глубоко изслѣдованы столькими работами, что болѣе нѣтъ здѣсь одного облачка, что все въ настоящее время кажется простымъ и строгимъ въ началахъ легко доступной науки и что болѣе умныя помышляютъ называть ее *трансцендентною*.

Основная идея теоріи дифференціаловъ состоитъ въ разысканіи,

въ приращеніи какой-угодно функціи, части, пропорціональной приращенію переменнѣй, которая и получаетъ названіе *дифференціала*. Она получается столь легко для функцій простыхъ или сложныхъ, явныхъ или неявныхъ, что самый кропотливый историкъ не считалъ бы для себя обязательнымъ приписывать честь открытія каждаго правила тому, кто его первый высказалъ. Разсмотрѣніе функцій отъ многихъ переменныхъ служитъ естественнымъ и необходимымъ дополненіемъ первоначальной идеи Лейбница, который, такъ же какъ и Ньютонъ, не имѣлъ случая этимъ заняться. *Трактатъ о Безконечно-малыхъ* (*Traité des Infinitement petits*) Лопиталя, опубликованный въ 1654 г., посвященъ исключительно функціямъ отъ одной переменнѣй. Однако переходъ отъ одного случая къ другому столь естествененъ, что когда Эйлеру понадобилось дифференцировать функцію отъ двухъ переменныхъ  $x$  и  $y$ , онъ пишетъ непосредственно результатъ подъ видомъ  $Pdx + Qdy$  и даже не отмѣчаетъ въ наукѣ введенія новой идеи. Дѣйствительно, хотя правила Лейбница не имѣли въ виду этой болѣе общей задачи, они къ ней прилагаются и часто даже рѣшаютъ ее вполне. Когда, напр., привыкли къ формулѣ

$$d \cdot ab = adb + bda,$$

разсматривая  $a$  и  $b$ , какъ двѣ какія-угодно функціи отъ одной и той же переменнѣй  $x$ , то, если нужно дифференцировать то же произведение  $ab$ , но при независимыхъ переменныхъ, вполне естественно употребить ту же самую формулу, и, несмотря на всю важность возникающаго новаго вопроса, понятно, что нѣтъ основанія разсматривать, какъ открытіе, это распространеніе столь извѣстной формулы, въ выраженіи которой къ тому же не приходится ничего измѣнять.

Какъ бы то ни было, мы не имѣемъ ничего существеннаго прибавить къ тому, что содержитъ Дифференціальное исчисленіе Эйлера относительно первыхъ дифференціаловъ функціи отъ многихъ переменныхъ.

Теорія опредѣлителя какого-угодно числа функцій, содержащихъ также же число переменныхъ, составляетъ предметъ главы III. Эта теорія, находящаяся далеко не въ непосредственной связи съ первоначальною идеей, есть также гораздо болѣе недавняго происхожденія и почти всецѣло принадлежитъ Якоби. Опредѣленіе для этого опредѣлителя таково, что въ случаѣ одной функціи онъ приводится къ производной. Кромѣ того, аналогія между опредѣлителями и производными полная,



и важность приложений, сдѣланныхъ въ большинствѣ знаменитымъ авторомъ теоріи, даетъ этой остроумной идеѣ право считаться въ числѣ принциповъ науки.

Непосредственно за теоріей дифференціаловъ первого порядка мы помѣстили ея приложение къ изученію касательныхъ и касательныхъ плоскостей, которое изъ всѣхъ возможныхъ ея приложений является за-разъ однимъ изъ самыхъ знаменитыхъ, самыхъ важныхъ и самыхъ простыхъ. Однако можно, пожалуй, удивиться, что глава, посвященная геометріи, прерываетъ изложеніе аналитическихъ принциповъ; но, я думаю, нѣтъ никакого неудобства въ томъ, чтобы приступить непосредственно къ геометрическимъ вопросамъ, изученіе которыхъ не требуетъ отъ читателя никакой новой идеи. Теоріи, которыя, подобно теоріи кривизны поверхностей, обыкновенно не входятъ въ курсъ элементарнаго изученія, будутъ, напротивъ, съ большею пользою помѣщены послѣ изложенія дифференціального исчисленія, потому что, хотя онѣ и представляютъ весьма интересное приложение принциповъ, относящихся къ дифференціаламъ второго порядка, но не являются ихъ геометрическимъ переводомъ.

Опредѣленіе касательныхъ плоскостей вполне естественно соединено съ опредѣленіемъ касательныхъ, хотя, въ историческомъ порядкѣ, оно послѣдовало за нимъ много лѣтъ спустя. Паранъ (Parent), въ своихъ *Essais et Recherches de mathématiques et de physique*, первый заговорилъ о представленіи поверхности посредствомъ уравненія между тремя переменными, но онъ не далъ общаго уравненія *касательной плоскости*. Иванъ Бернулли, не давая его явно, долженъ былъ ввести въ формулы, при рѣшеніи одной трудной задачи, опредѣляющіе его элементы. При чтеніи его Мемуара видно, что ему было бы весьма легко его получить, но не должно, однако, считать поэтому Бернулли *создателемъ* теоріи касательной плоскости, которая на самомъ дѣлѣ никому не принадлежитъ.

Теорія огибающихъ естественно нашла мѣсто въ главѣ, посвященной касательнымъ. Постигнутая Лейбницемъ съ самаго начала новыхъ исчисленій, она весьма просто примыкаетъ къ предыдущей теоріи и подобно ей требуетъ разсмотрѣнія только производныхъ первого порядка. Правда, ее можно разсмотрѣть, какъ обобщеніе теоріи эволютъ Гюйгенса или каустическихъ кривыхъ Чирнгауза (Tschirnhaus). Но эти огибающія особаго рода будутъ изучены въ другой главѣ, гдѣ мы изложимъ отличительныя ихъ свойства.

Глава V дополняетъ теорію дифференціаловъ перваго порядка; она содержитъ выраженіе дифференціала нѣкоторыхъ геометрическихъ функцій и, въ частности, длины дуги кривой. Хотя такое изслѣдованіе принадлежитъ Геометріи, но оно предполагаетъ у читателя только тѣ идеи, которыя, со времени появленія теоріи Лейбница, были непосредственно въ ходу у всѣхъ геометровъ. Изученіе дугъ кривой занимаетъ большое мѣсто въ исторіи науки, и интегральное исчисленіе обязано ему происхожденіемъ своихъ наиболѣе прекрасныхъ общихъ теорій; но эти вопросы будутъ разсмотрѣны въ другомъ томѣ, въ этомъ же мы можемъ едва лишь ихъ намѣтить.

Теорія производныхъ высшаго порядка и теорія измѣненія независимой переменнѣй, которая по существу есть только разысканіе общихъ формулъ, дающихъ производныя отъ неявныхъ функцій, образуютъ главы VI и VII. Рѣшенные тамъ вопросы возникаютъ сами собою, и рѣшеніе ихъ не могло бы остановить никакого геометра, достойнаго этого имени. Можетъ показаться, что упрощенія, которыя можно внести въ послѣдовательное вычисленіе производныхъ, относящееся скорѣе къ преподаванію, чѣмъ къ самымъ принципамъ науки, переполнены подробностями, но послѣднія даютъ намъ заранѣе нѣсколько результатовъ, использованныхъ ниже въ теоріи рядовъ.

Формулы для замѣны независимой переменнѣй, въ случаѣ одной переменнѣй, были даны въ первый разъ въ *Traité des infiniment petits* Лопиталя, а полное изложеніе общей теоріи занимаетъ видное мѣсто въ *Дифференціальномъ исчисленіи* Эйлера, который не обходитъ въ своихъ методахъ ни одного изъ полезныхъ или любопытныхъ случаевъ, какіе могутъ представиться для разсмотрѣнія.

Глава VIII посвящена составленію дифференціальныхъ уравненій. Эти уравненія должны были естественно возникнуть изъ обратныхъ задачъ, относящихся къ касательнымъ, и нельзя было не увидѣть тотчасъ же, какъ и замѣтилъ это первымъ Иванъ Бернулли, что одному и тому же дифференціальному уравненію соотвѣтствуетъ безчисленное множество кривыхъ, общее уравненіе которыхъ содержитъ произвольную постоянную. Отсюда до исключенія постоянной посредствомъ дифференцированія всего одинъ шагъ, который долженъ былъ неизбѣжно повести къ исключенію многихъ постоянныхъ посредствомъ производныхъ высшаго порядка. Эйлеръ былъ первымъ, изложившимъ эту теорію. Однако, я повторяю, приписывать ему ея открытіе было бы несправедливостью по отношенію къ Лейбницю и братьямъ Бернулли. Къ тому же

самъ онъ сдѣлалъ только наброски теоріи исключенія произвольныхъ функцій; мы даемъ сдѣланное Монжемъ важное ея приложеніе къ изученію различныхъ классовъ поверхностей. Между работами, создавшими эту часть науки, отмѣтимъ, наконецъ, превосходный Мемуаръ Ампера (Ampère), къ которому намъ предстоитъ еще вернуться.

Переписка геометровъ восемнадцатаго вѣка представляетъ, почти на каждой страницѣ, упражненія или дальнѣйшія раскрытія для одной важной теоріи, которая, зародившись одновременно съ дифференціальнымъ исчисленіемъ, часто прилагаясь къ рѣшенію тѣхъ же самыхъ задачъ и развиваясь вмѣстѣ съ нимъ, получила сама и доставила послѣднему такія вспомогательныя средства, что въ настоящее время почти необходимо изучать ихъ одновременно.

Книга II посвящена изложенію этого ученія, краткую исторію котораго мы должны здѣсь набросать.

Отыскивая начало употребленія безконечнаго ряда, можно подняться до Архимеда. Методъ, которымъ онъ пользуется для нахожденія площади, ограниченной параболою, предполагаетъ, дѣйствительно, суммирование безконечной прогрессіи. Въ *Трактатъ о винтовой линіи* онъ былъ приведенъ, подобно впослѣдствіи Каваллери, Паскалю и Валлису, къ разсмотрѣнію площади части кривой, какъ суммы безконечнаго числа элементовъ; но здѣсь нѣтъ рядовъ въ собственномъ смыслѣ, потому что эти элементы переменны и уменьшаются по мѣрѣ увеличенія ихъ числа, тогда какъ члены ряда, взятые также въ безконечномъ числѣ, имѣютъ, каждый, постоянное значеніе, стремящееся, конечно, къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи мѣста члена. Кромѣ того, эти суммы элементовъ являлись переходными формами, на которыхъ нельзя было останавливаться и которыя сами по себѣ не принесли бы никакой помощи.

Отмѣтимъ еще разысканіе квадратуры, приведшее Меркатора (Mercator) къ знаменитому ряду, представляющему  $l(1+x)$ ; доказательство этого ряда, предшествовавшее открытію дифференціального и интегрального исчисленій, въ сущности приводится къ замѣнѣ дроби  $\frac{1}{1+x}$  безконечною прогрессіей и затѣмъ къ интегрированію обѣихъ частей уравненія. Этотъ рядъ, опубликованный въ 1672 г. въ трудѣ, озаглавленномъ *Logarithmotechnia*, есть первый примѣръ формулы, составленной изъ безпредѣльнаго числа членовъ и употребленной съ пользою для числового вычисленія представляемаго ею выраженія: каждая изъ частей

III.

IV.

IV\*



составляющихъ доказательство Меркатора, была тогда хорошо извѣстна. Гюйгенсъ показалъ тождество логариѣмовъ съ гиперболическими площадями, а *Arithmetica infinitorum* Валлиса давала площадь кривыхъ, ордината которыхъ пропорціональна степени абсциссы, т.-е., на нашемъ теперешнемъ языкѣ, интегралъ каждаго изъ членовъ прогрессіи. Единственная, но великая заслуга Меркатора заключается, слѣдовательно, въ томъ, что онъ обратилъ вниманіе на безконечное выраженіе, которое, безъ сомнѣнія, не трудно было составить, но важности котораго не замѣтилъ бы менѣе проницательный геометръ.

Когда Меркаторъ опубликовалъ свое открытіе, Ньютонъ уже нѣсколько лѣтъ владѣлъ основною идеей, приводящей къ нему, и сообщилъ ее Барроу, нѣкогда своему учителю, а тогда своему коллегѣ, представивъ ему рукопись Трактата подъ заглавіемъ: *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas*. Ньютонъ въ этомъ небольшомъ Трактатѣ переноситъ, такъ сказать, въ алгебраическое исчисленіе методы Ариѣметики. Ряды, расположенные по степенямъ переменнѣй, являются, въ его глазахъ, обобщеніемъ десятичныхъ дробей, могущихъ представлять всѣ числа. Подобно тому какъ эти десятичныя дроби участвуютъ въ свойствахъ цѣлыхъ чиселъ и такъ же легко, какъ они, поддаются вычисленію, такъ и ряды преобразовываютъ дробныя или ирраціональныя выраженія въ цѣлые многочлены и приводятъ весьма сложныя выраженія къ однообразному и простому типу. Хотя этотъ способъ развертыванія съ пользою прилагается къ множеству задачъ, но именно въ виду, главнымъ образомъ, квадратуры кривыхъ Ньютонъ разсматриваетъ его въ первую очередь. Какъ и Меркаторъ, онъ воспользовался формулою Валлиса, выражающею площадь кривой, ордината которой пропорціональна степени абсциссы; но онъ идетъ гораздо дальше его, прилагая этотъ методъ не только къ явнымъ алгебраическимъ функціямъ, но и къ рѣшенію буквенныхъ уравненій, корень которыхъ онъ развертываетъ въ рядъ, и находя, наконецъ, выраженіе дуги круга въ функціи его синуса, а затѣмъ, по открытому имъ методу возврата рядовъ, разложеніе синуса въ рядъ по степенямъ дуги. Въ этомъ первомъ опытѣ знаменитый авторъ довольствуется составленіемъ членовъ разложенія, не заботясь о доказательствахъ ихъ общаго выраженія, которое онъ угадываетъ по аналогіи. Формулы для разложенія степени бинома здѣсь нѣтъ; лишь гораздо позднѣе, въ 1676 г., въ письмѣ къ Ольденбургу, онъ подробно набрасываетъ, какъ онъ пришелъ къ ея предсказанію, а затѣмъ и къ подтвержденію ея справедливости. Это небольшое произве-



деніе Ньютона Барроу сообщилъ нѣсколькимъ геометрамъ и возбудилъ въ нихъ сильное удивленіе; но Ньютонъ далеко не былъ тронутъ такими похвалами и пересталъ съ этого момента развивать свои идеи, убѣжденный, что Меркаторъ, вступивъ на этотъ путь, легко найдетъ остальное, прежде чѣмъ онъ самъ достигнетъ *достаточно зрѣлаго возраста, чтобы что-нибудь опубликовать*: ему было тогда двадцать шесть лѣтъ и онъ уже владѣлъ, кромѣ метода рядовъ, принципами исчисленія флюксий и разложеніемъ свѣта! Когда слава Ньютона вызвала по отношенію къ его менѣе значительнымъ дѣяніямъ мелочныя разслѣдованія потомства, всѣ эти факты были поставлены внѣ всякаго сомнѣнія и не могутъ быть оспариваемы: но если бы дѣло шло о комъ бы то ни было другомъ, развѣ молчаніе, которое онъ хранилъ передъ публикою, не способствовало бы установленію для его изслѣдованій болѣе поздней даты, чѣмъ для опубликованія Меркатора? Какъ это вѣрно, что только съ крайнею осторожностью должно разсуждать о такихъ вопросахъ.

Немного спустя Грегори открылъ рядъ, выражающій дугу въ функции ея тангенса; также открылъ этотъ рядъ и Лейбницъ послѣ него, но при помощи другихъ принциповъ и не будучи знакомъ съ результатомъ Грегори. Оба они должны считаться среди создателей теоріи рядовъ. Равнымъ образомъ мы должны упомянуть и о Яковѣ Бернулли, открывшемъ общую теорему, дающую выраженіе какой-угодно функции въ видѣ ряда, члены котораго содержатъ множителемъ ея послѣдовательныя производныя, и являющуюся непосредственнымъ слѣдствіемъ гораздо болѣе важнаго разложенія, открытаго позже Тэйлоромъ.

Трудъ Тэйлора (Taylor) подъ заглавіемъ *Methodus incrementorum* содержитъ, вмѣстѣ съ прекраснѣйшими приложеніями, новый способъ представленія анализа безконечно-малыхъ въ связи съ исчисленіемъ конечныхъ разностей. Въ этомъ именно трудѣ онъ далъ впервые знаменитую теорему, носящую его имя, значеніе которой непрестанно потомъ росло въ трудахъ величайшихъ геометровъ. Всѣ извѣстные до тѣхъ поръ ряды являются легкими ея слѣдствіями, и изъ нея можно получить безчисленное множество другихъ рядовъ. Тэйлоръ, однако, не далъ ни одного изъ нихъ, и этимъ объясняется, почему вначалѣ геометры придали, повидимому, такъ мало значенія его открытію. Еще и нынѣ теорема Тэйлора, незначительно измѣненная, часто слыветъ подъ именемъ теоремы Маклорена и часто цитировалась, какъ принадлежащая Даламберу (d'Alembert), который, не зная о ея гораздо болѣе раннемъ опубликованіи, далъ ее какъ новость въ *Энциклопедіи*.

Впрочемъ, Тэйлоръ далеко не единъ изъ изслѣдовавъ вопросъ; изученіе условій, необходимыхъ для сходимости его ряда, было выполнено лишь мало-по-малу. Знаменитые геометры считали важнымъ дать новыя доказательства, которыя дѣлали бы ихъ очевиднѣе, и еще очень недавно Коши (Cauchy) заключилъ ихъ, наконецъ, въ одно общее правило, на которое онъ не безъ основанія смотрѣлъ, какъ на одно изъ самыхъ важныхъ открытій.

Въ настоящее время всѣ геометры согласны во взглядѣ на сходимость ряда, какъ на необходимое условіе его законнаго употребленія. Раздѣляли этотъ взглядъ, который является, Впрочемъ, столь естественнымъ, и первые создатели этой великой теоріи. Ряды, которыми они пользовались, должны были всегда, по ихъ мнѣнію, давать численное значеніе развернутой функціи. Лейбницъ явился первымъ, пожелавшимъ правилъ сходимости.

Въ письмѣ, адресованномъ имъ Герману, отъ 2 іюля 1705 читаемъ:

„Я не требую нахожденія значенія какого-угодно ряда въ конечномъ видѣ; такая задача превышала бы силы геометровъ. Я желалъ бы только, чтобы нашелся способъ рѣшать, возможно ли значеніе, выраженное посредствомъ ряда, т.-е. сходящееся ли оно, и, притомъ рѣшать безъ знакомства съ происхожденіемъ ряда. Необходимо, чтобы бесконечный рядъ представлялъ конечное количество, чтобы можно было доказать его сходимость и убѣдиться, что при достаточномъ его продолженіи ошибка можетъ стать сколь-угодно малою“.

Долго, однако, геометры, почти безъ исключенія, принимали относительно этого пункта очень странную доктрину; не довольствуясь приложеніемъ разложеній въ ряды къ законнымъ случаямъ, гдѣ они являются сходящимися, они считали себя въ правѣ распространять ихъ безъ ограниченія. Общность, присущая алгебраическимъ формуламъ, ввела по этому пункту въ обманъ самыхъ осторожныхъ и самыхъ искусныхъ; принимая ряды за многочлены, они считали возможнымъ выполнять надъ ними безбоязненно дѣйствія и преобразованія, признаваемые законными для суммы какого-угодно числа членовъ, и долгое время не признавали специальныхъ потребностей, налагаемыхъ условіемъ сходимости. Эйлеръ, первый ясно высказавшій такое мнѣніе, полагалъ, что разсужденіе, куда входятъ расходящіеся ряды, достаточно точно, какъ только продолженіе вычисленій приводитъ къ результату въ конечныхъ выраженіяхъ или къ сходящемуся ряду.

Принятіе такихъ принциповъ было удрымъ умомъ, который повсюду въ другихъ мѣстахъ такъ мало понималъ и почиталъ математическую строгость, есть одно изъ тѣхъ противорѣчій, въ которыя впадаетъ иногда человѣческій умъ и отъ объясненія которыхъ надо отказаться. Какъ бы то ни было, нѣсколько счастливыхъ приложений заняли это доказательство, которое невозможно было дать и котораго долгое время никто не думалъ требовать.

Только въ началѣ девятнадцатаго вѣка Пуассонъ вернулъ геометровъ на путь истины и строгости, показавъ, къ какимъ результатамъ можетъ привести употребленіе расходящихся рядовъ. Нѣсколько энергичныхъ строкъ Гаусса и Абеля также посодѣйствовали прекращенію этого геометрическаго скандала и помогли прочно установить безусловную необходимость сходимости, заставляя исчезнуть изъ науки ошибку, которая, затронувъ принципы, могла бы повести за собою множество другихъ ошибокъ. Но бесполезно задерживаться на доктринѣ, которую ничто не оправдываетъ и которая опровергается простымъ разсмотрѣніемъ вытекающихъ изъ нея нелѣпыхъ слѣдствій.

Правила, позволяющія судить о сходимости ряда, приобрѣли новое значеніе, когда эта сходимость была признана необходимою. Рѣшеніе задачи въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ такъ же древне, какъ и употребленіе рядовъ; но глубокое изслѣдованіе было сдѣлано лишь очень поздно и очень медленно.

Прежде всего мы можемъ привести нѣсколько почти очевидныхъ правилъ, данныхъ Даламберомъ и относящихся къ численнымъ рядамъ, выраженіе остатка ряда Тэйлора, данное Лагранжемъ, изслѣдованіе важнаго ряда, для котораго Гауссъ далъ условіе сходимости, связывая его съ изящными правилами, и, наконецъ, многочисленные методы, отъ которыхъ можетъ ускользнуть лишь очень немного случаевъ, для сужденія о сходимости численныхъ рядовъ съ положительными членами.

Къ ученію объ условіяхъ сходимости рядовъ мы должны были присоединить изложеніе методовъ, облегчающихъ приближенное ихъ суммирование въ случаѣ ихъ медленной сходимости. Мы излагаемъ три метода, покоящихся на весьма различныхъ принципахъ; каждый изъ этихъ методовъ можетъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, оказаться выгоднѣе двухъ остальныхъ. Одинъ изъ нихъ принадлежитъ Стирлингу, второй—Эйлеру и третій, обладающій большимъ изяществомъ, былъ предложенъ Куммеромъ (Kummer).



Рядъ Тэйлора, вслѣдствіе своей большой общности, долженъ былъ болѣе, чѣмъ всякій другой, приковать къ себѣ вниманіе геометровъ; выраженіе остатка, послѣдовательно полученное подѣ различными видами, болѣе или менѣе приноровленными къ наиболѣе замѣчательнымъ случаямъ, какіе приходилось изслѣдовать, повидимому, являлось, до прекрасныхъ трудовъ Коши, послѣднимъ словомъ вопроса, разсмотрѣннаго въ отвлеченномъ видѣ. Углубляясь въ результатъ Тэйлора и не считаясь съ принятой имъ точкою зрѣнія, мы тотчасъ и довольно легко замѣчаемъ въ немъ обобщеніе принципа, на которомъ покоится дифференціальное исчисленіе: бесконечно-малое приращеніе функціи, какова бы она ни была, пропорціонально, если пренебrecь бесконечно-малыми порядкомъ выше перваго, приращенію переменнѣй; исключенія, возможность которыхъ очевидна, такъ какъ функція остается неопредѣленною, могутъ относиться лишь къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ значеніямъ переменнѣй и теорема вообще и для всякой непрерывной функціи остается неизбѣжно точною. При изученіи вопроса ближе, ограничиваясь, однако, всегда случаемъ бесконечно-малаго приращенія, мы докажемъ, что избытокъ приращенія функціи надъ частью, которую можно назвать главною и пропорціональною приращенію переменнѣй, является неизбѣжно пропорціональнымъ квадрату этого послѣдняго, если пренебrecь бесконечно-малыми порядкомъ выше втораго; главная часть того, что отбрасывается при этомъ второмъ приближеніи, сама пропорціональна кубу приращенія переменнѣй, и т. д. безъ конца, при чемъ возможные исключенія относятся не къ отдѣльнымъ функціямъ, такъ какъ теорема есть необходимое слѣдствіе изъ закона непрерывности, но къ спеціальнымъ значеніямъ переменнѣй, для которыхъ наступаетъ разрывъ непрерывности.

Этотъ весьма важный и весьма свѣтлый взглядъ на теорему Тэйлора не давалъ бы, однако, полного ея пониманія.

Коши выпала честь быть первымъ, связавшимъ этотъ важный вопросъ съ его истинными принципами. Возможность или невозможность разложенія функціи по формулѣ Тэйлора можно выяснитъ, не прибѣгая къ вычисленію самыхъ членовъ ряда, лишь бы только функція, которую требуется развернуть, была опредѣлена для вещественныхъ и мнимыхъ значеній переменнѣй. Это введеніе мнимостей въ вопросъ, вполне чуждый на первый взглядъ ихъ теоріи, есть одинъ изъ величайшихъ успѣховъ въ девятнадцатомъ вѣкѣ, которымъ анализъ обязанъ Коши.

Мнимыя выраженія являются необходимымъ слѣдствіемъ простѣй-

шихъ формулъ Алгебры; корни невозможныхъ уравненій второй степени имѣютъ видъ  $a + b\sqrt{-1}$ , который вмѣстѣ съ тѣмъ есть видъ корней всякаго алгебраическаго уравненія и, вообще, результатовъ какихъ-угодно алгебраическихъ дѣйствій, выполненныхъ надъ такими выраженіями. Эти теоремы были приняты геометрами раньше ихъ строгаго доказательства. Эйлеръ излагалъ ихъ въ 1742 г., въ *Miscellanea Berolinensia*, какъ очень извѣстныя. Однако только въ 1746 г. появляется первое общее доказательство, данное Даламберомъ, доказательство, надо сознаться, недостаточное, также какъ и всѣ тѣ, которыя были даны до Мемуара, въ которомъ Гауссъ вновь принимается за этотъ вопросъ послѣ справедливой критики разсужденій, предложенныхъ до него. Немногіе, впрочемъ, вопросы чаще подвергались изслѣдованію. Гауссъ посвятилъ ему не менѣе пяти Мемуаровъ, а Коши, которому часто приписывали первое строгое доказательство, неоднократно возвращался къ нему самъ.

Не только алгебраическія дѣйствія, выполненные надъ мнимыми выраженіями, даютъ въ результатъ выраженія того же вида, но также и логарифмъ мнимаго выраженія допускаетъ безчисленное множество значеній, всѣ вида  $a + b\sqrt{-1}$ , и степень съ мнимымъ показателемъ можетъ быть представлена подъ тѣмъ же видомъ, къ которому всегда приходили. Въ этомъ заключается важное открытіе Эйлера, которое тѣмъ болѣе дѣлаетъ чести его проницательности, что изслѣдованія Лейбница и Бернулли по этому предмету только запутали вопросъ, выказывая всѣ его трудности. Эйлеръ разсѣялъ всѣ тучи, давъ выраженіе тригонометрическихъ линій посредствомъ показательныхъ мнимостей, откуда выведено столько прекрасныхъ слѣдствій, указанныхъ въ значительной части имъ самимъ. Приводимъ здѣсь только разложеніе тригонометрическихъ линій въ произведенія и тѣ многочисленныя формулы, къ которымъ оно приводитъ и доказательства которыхъ, надо сознаться, довольно слабыя, были потомъ подтверждены болѣе строгимъ анализомъ. Эйлеру же мы обязаны рядами, выражающими синусы и косинусы кратной дуги въ функціи цѣлыхъ степеней синуса или косинуса, и обратно, степени синуса или косинуса въ видѣ ряда, члены котораго—синусы или косинусы кратныхъ дугъ; результаты, которые онъ далъ, подвержены, правда, ограниченіямъ, которыхъ онъ не зналъ, и геометры, обманувшись въ своихъ идеяхъ относительно общности алгебраическихъ формулъ, долгое время не довѣряли имъ. Пуассонъ первый

отмѣтилъ въ нихъ противорѣчіе, объясненіе которому не было дано непосредственно; но въ математическихъ знаніяхъ формулы никогда не противорѣчатъ самимъ себѣ, и если въ нихъ оказывается какая-нибудь парадоксальность, можно утверждать, что болѣе внимательное изслѣдованіе ее устранить. Дѣйствительно, Пуансо не замедлилъ, въ своемъ Мемуарѣ объ угловыхъ сѣченіяхъ, точно установить смыслъ и условія справедливости этихъ различныхъ разложеній. Изслѣдованіе вопросовъ о сходимости, къ сожалѣнію, не нашло мѣста въ его трудѣ, и впервые произведено Абелемъ, въ его важномъ Мемуарѣ о биномѣ.

Этотъ Мемуаръ Абеля приводитъ насъ къ теоріи мнимыхъ функцій, отъ которыхъ мы какъ будто удалились, говоря о тригонометрическихъ рядахъ. Знаменитый норвежскій геометръ изучаетъ въ немъ, съ почти небывалою до тѣхъ поръ строгостью въ вопросахъ этого рода, рядъ бинома, въ которомъ онъ предполагаетъ подъ входящими туда буквами мнимыя значенія. Дѣло для него шло не о томъ, чтобы только знать, *остается ли* формула Ньютона *справедливою* и попрежнему представляетъ  $(1+x)^m$ , когда  $x$  и  $m$  мнимые. Такое предложеніе не имѣло бы никакого опредѣленнаго смысла. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ является вполне опредѣленнымъ при данныхъ  $x$  и  $m$ , функція же допускаетъ, по опредѣленію, безчисленное множество значеній; какое изъ нихъ представляетъ рядъ? Абель вполне рѣшаетъ вопросъ, подготавливая такимъ образомъ изслѣдованіемъ труднаго и важнаго частнаго случая общую теорію, которую немного спустя создалъ Коши и которая быстро завоевала такое значеніе, что мы должны особенно на ней остановиться.

Чтобы понять важность этой теоріи, нужно, во-первыхъ, составить себѣ ясную идею о степени общности, заключающейся въ слѣдующемъ выраженіи: *какая-угодно мнимая функція*, и не позволять себѣ обманываться аналогіей, весьма ошибочной на этотъ разъ, съ какою-угодно вещественною функціею.

Мы имѣемъ весьма ясное понятіе о степени неопредѣленности, входящей въ выраженіе: *какая-угодно функція отъ вещественной переменной*. Мы подразумѣваемъ, что можно, для cadaго значенія переменной, выбирать по своему произволу значеніе функціи, такъ чтобы выборъ не былъ стѣсненъ никакимъ другимъ условіемъ кромѣ условія давать непрерывный рядъ, представляющій точки кривой, видъ которой остается произвольнымъ. Аналогія совершенно естественно заставляетъ разсматривать какую-угодно мнимую функцію, какъ заключа-



щую ту же степень неопредѣленности и могущую получать, для даннаго значенія переменнѣй  $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ , по произволу значенія для обѣихъ частей, какъ для вещественной, такъ и для мнимой, безъ всякаго иного ограниченія кромѣ ограниченій, вытекающихъ изъ условія непрерывности. Однимъ словомъ, если принять  $\alpha$ ,  $\beta$  за координаты точки, третья координата которой есть вещественная часть соотвѣтственнаго значенія произвольной функціи, то должно думать, а priori, что поверхность, описанная этою точкою, всецѣло произвольна, подобно порождающей ее функціи; но это было бы тяжкою ошибкою. Въ самомъ дѣлѣ, условіе имѣть опредѣленную производную равносильно двумъ уравненіямъ, которымъ подчинены какъ вещественная, такъ и мнимая часть какой-угодно функціи и которыя мы будемъ предполагать всегда удовлетворенными. Существованіе этихъ уравненій показываетъ, какимъ образомъ функція, опредѣленіе которой не дано, можетъ имѣть, однакожъ, весьма опредѣленные свойства, и объясняетъ появленіе прекрасныхъ теоремъ Коши, которыя безъ этого были бы непонятны. Мы ограничиваемся въ этомъ томѣ указаніемъ, какъ безконечныя или недостаточно опредѣленные значенія функціи даютъ предѣлы, внѣ которыхъ ея разложеніе невозможно. Мы вернемся къ этому въ другомъ томѣ, гдѣ интегральное исчисленіе упроститъ доказательства, давая возможность дополнить ихъ. Эта теорія, какъ утверждаетъ Лагранжъ въ своемъ знаменитомъ трудѣ, тѣмъ болѣе важна, что теорема Тэйлора, которую далеко нельзя разсматривать, какъ слѣдствіе изъ дифференціальнаго исчисленія, должна доказываться а priori и содержать истинные принципы этого исчисленія, освобожденные отъ всякой идеи о безконечно-малой величинѣ или о предѣлѣ. Доказательство, данное знаменитымъ авторомъ, несмотря на внушительный авторитетъ его имени, не могло быть принято геометрами, но это не должно умалять удивленія передъ столь категорическимъ, хотя и не доказаннымъ, утвержденіемъ принципа, который, установленный полстолѣтія спустя на совершенно другихъ основаніяхъ, долженъ былъ въ то же время пріобрѣсти такую степень общности, о которой сторонники этихъ идей тогда даже и не мечтали. Видя, сколько нужно тонкихъ объясненій для установленія значенія и предѣловъ теоремы Тэйлора, становится понятнымъ, что она затрогиваетъ истины слишкомъ трудныя, чтобы можно было сдѣлать ее, какъ хотѣлъ Лагранжъ, краеугольнымъ камнемъ зданія: къ какой бы изящной и легкой доктринѣ ни пришли бы

геометры, подымаясь сразу на такую высоту, они не могут забывать, что точность высказанных положений и безусловная солидность доказательствъ служатъ существеннымъ признакомъ математическихъ знаній, и если извинительно уклониться отъ нихъ на моментъ для скорѣйшаго достиженія главной цѣли, то всё-же никакая строгость не оказалась бы чрезмѣрною, когда идетъ дѣло объ установленіи основаній для длиннаго ряда теорій.

Когда въ рядѣ Тэйлора приписывается переменѣнной мнимое значеніе, онъ преобразовывается въ рядъ, расположенный по синусамъ и косинусамъ дугъ, кратныхъ относительно одной и той же дуги. Ряды этого рода, имѣющіе такое значеніе въ настоящее время, впервые были рассмотрѣны Даніиломъ Бернулли, который посредствомъ остроумныхъ, но чрезвычайно смѣлыхъ приѣмовъ, и, надо даже признаться, очень далекихъ отъ строгости, далъ выраженіе для постоянной, для переменѣнной  $x$ , для квадрата и куба этой переменѣнной въ видѣ подобнаго ряда. Достаточно указать здѣсь на то, что точкою отправленія для доказательства служитъ уравненіе

$$-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx + \dots,$$

которое Бернулли называетъ *incongrue vera* и которое слѣдовало бы просто назвать невѣрнымъ и не имѣющимъ смысла, потому что вторая часть, очевидно, неопредѣленна. Годъ спустя Эйлеръ, обративъ вниманіе на эти вопросы, связалъ ихъ съ своею теоріею мнимыхъ показательныхъ функцій; но только въ девятнадцатомъ вѣкѣ важное приложеніе, сдѣланное Фурье, послужило толчкомъ къ новымъ работамъ, показывающимъ, во всей строгости, возможность представлять посредствомъ рядовъ этого рода всѣ, непрерывныя или разрывныя, функціи. Но этотъ важный предметъ не можетъ быть рассмотрѣнъ въ этомъ томѣ, и мы приведемъ здѣсь лишь простые и не совсѣмъ строгіе методы Эйлера.

Распространяясь столько, сколько мы это сдѣлали относительно теоріи рядовъ, невозможно было не встрѣтить множества изящныхъ и знаменитыхъ результатовъ, выводимыхъ изъ общихъ формулъ. Должно, однакожъ, существенно различить между собою рядъ, расположенный по восходящимъ степенямъ переменѣнной или по какому бы то ни было другому правильному закону, и рядъ чисто численный, сумма котораго представляетъ число, а не функцію: частное значеніе переменѣнной

буквы можетъ привести первый ко второму, но обратная задача неопредѣленна. Напр., формулу

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \dots,$$

данную безъ доказательства Ньютономъ, можно разсмотрѣть безразлично, какъ происходящую изъ ряда

$$x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \dots,$$

въ которомъ полагается  $x = 1$ , или изъ ряда

$$\sqrt{2} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right),$$

гдѣ полагается  $x = \frac{\pi}{4}$ . Она принадлежитъ такимъ образомъ къ двумъ совершенно различнымъ теоріямъ и, кромѣ того, можетъ выводиться изъ множества другихъ.

Труды и Мемуары Эйлера содержатъ большое число суммированій этого рода, которыя мы вовсе не намѣрены приводить здѣсь всѣ; для ихъ изученія надлежитъ обратиться къ его Введенію въ анализъ бесконечно-малыхъ и къ С.-Петербургскому сборнику Мемуаровъ.

Несмотря на все значеніе ряда Тэйлора часто проще получить члены разложенія, которые онъ долженъ былъ бы дать, при помощи другихъ методовъ, примѣры которыхъ даны въ главѣ III второй Книги. Тамъ прежде всего помѣщено нѣсколько доказательствъ общей формулы Лагранжа, выражающей въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ  $\alpha$ , корень  $\zeta$  какого-угодно уравненія, представленнаго предварительно подъ видомъ

$$\zeta = a + \alpha \varphi(\zeta).$$

Эта прекрасная формула была предметомъ многочисленныхъ работъ, и выдающіеся геометры расходились во взглядахъ на отличительный признакъ представляемаго ею корня. Эти вопросы будутъ разобраны позже. Въ этой главѣ мы дадимъ относительно этого пункта лишь нѣсколько простѣйшихъ указаній. Формула Лагранжа даетъ, какъ слѣдствіе, двѣ другія достойныя вниманія формулы, принадлежащія Бурману и Абелю.

Методъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ очень часто является наивыгоднѣйшимъ для полученія членовъ разложенія, законность кото-



раго доказана; мы даемъ много примѣровъ на этотъ методъ, отмѣчая между ними замѣчательные ряды Чебышева. Теорія производящихъ функцій, созданная Лапласомъ, нѣсколько замѣчаній относительно символическихъ обозначеній и отступление въ сторону функцій, обозначаемыхъ черезъ  $X_n$ , и въ сторону чиселъ Бернулли заканчиваютъ главу, объединенную ничѣмъ другимъ, какъ только отсутствіемъ теоремы Тэйлора въ изученіи рядовъ, которые могли бы быть выведены изъ нея.

Глава IV содержитъ опредѣленіе мнимыхъ функцій. Главные пункты, разсмотрѣнные тамъ, были указаны выше, по поводу теоремы Тэйлора.

Глава V посвящена разложенію функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ; она содержитъ распространеніе на этотъ случай формулъ Тэйлора и Лагранжа.

Глава VI знакомитъ съ разложеніемъ нѣкоторыхъ функцій въ безконечныя произведенія; основными формулами, изъ которыхъ выводится большинство другихъ, являются формулы, дающія выраженія  $\sin x$  и  $\cos x$  и прилагающіяся къ вещественнымъ или мнимымъ значеніямъ переменн<sup>ой</sup>; онѣ принадлежатъ Эйлеру, который, не будучи строгимъ въ ихъ доказательствахъ и въ изученіи ихъ слѣдствій, вывелъ, однако, изъ нихъ весьма большое число вѣрныхъ и важныхъ результатовъ, подтвержденныхъ потомъ безукоризненнымъ анализомъ.

Разложенія подъ видомъ непрерывныхъ дробей рассматриваются въ главѣ VII, гдѣ указаны наиболѣе замѣчательныя формулы по этому предмету, полученные Эйлеромъ, Ламб<sup>омъ</sup>, Лагранжемъ и Гауссомъ; эти разложенія могутъ, притомъ, сил<sup>о</sup> разнообразиться для одной и той же функціи, и ихъ значеніе стоитъ большое въ Ариѳметикѣ, значительно меньше въ Анализѣ, гдѣ только условіе допущенія только цѣлыхъ знаменателей, влекущее за собою прекраснѣйшія свойства этихъ дробей, здѣсь опускается безъ замѣчанія его чѣмъ-либо другимъ.

Принципы теоріи вычетовъ, созданной Коши, изложены въ главѣ VIII. Знаменитый геометръ замѣтилъ, что во множествѣ задачъ, гдѣ играютъ роль функціи, большая часть, важная для разсмотрѣнія, та, которая чаще всего опредѣляетъ одна результатъ, не есть, какъ указали бы, повидимому, всѣ аналогіи, *главная часть*, т.-е. простая функція, для смежныхъ значеній которой разность съ функціею есть безконечно-малая относительно каждаго изъ нихъ, но нѣкоторая дробь со знаменателемъ всегда первой степени, числитель которой Коши назвалъ *вычетомъ* и изысканія и

полезныя приложенія которой онъ далъ почти во всѣхъ частяхъ науки.

Наконецъ, вторая Книга заканчивается двумя главами, относящимися къ особеннымъ значеніямъ функцій и къ вопросамъ о maximum'ѣ и minimum'ѣ. Мы должны были помѣстить ихъ послѣ ученія о рядахъ, на которыхъ основана большая часть изложенныхъ тамъ методовъ и доказательствъ.

Приложеніе исчисленія бесконечно-малыхъ къ теоріи кривыхъ и поверхностей составляетъ предметъ третьей Книги. Общность изложенныхъ тамъ результатовъ почти всегда абсолютна, и почти всѣ теоремы не зависятъ отъ спеціальнаго опредѣленія кривой или поверхности, къ которой онѣ относятся. Декартъ, Ферматъ, Паскаль, Гюйгенсъ, Роберваль и нѣкоторые другіе безъ сомнѣнія рѣшили бы безъ помощи новаго исчисленія каждый изъ вопросовъ, къ которымъ оно прежде всего было приложено, но сила и красота новой идеи именно и состоятъ въ упраздненіи всякаго различія между изучаемыми функціями или между геометрическими мѣстами, которыя онѣ представляютъ. Соединяя въ одни и тѣ же изслѣдованія механическія и геометрическія кривыя, разсмотрѣнныя Декартомъ раздѣльно, Лейбницъ разрушилъ барьеръ, вредный для прогресса науки, возвѣщая первый о существованіи общихъ законовъ, приложимыхъ къ измѣненію всѣхъ непрерывныхъ величинъ; и если наиболѣе чудесные результаты, къ которымъ ведетъ этотъ путь, остались неизвѣстными создателямъ дифференціального исчисленія, то нельзя имъ отказать въ неоспоримой чести проложенія первыхъ шаговъ въ этомъ направленіи.

Должно прибавить, что эта общность въ результатахъ, придавая значеніе дифференціальному исчисленію, составляетъ также и его простоту. Если индивидуальное изученіе кривыхъ и поверхностей, подобно изученію частныхъ функцій, и облегчается познаніемъ законовъ, общихъ для всѣхъ случаевъ, то оно всё-же требуетъ, надо это признать, вмѣстѣ съ неменьшею по силѣ изобрѣтательностью, приѣмовъ изслѣдованія несравненно болѣе разнообразныхъ, и удивляясь великимъ геніямъ, открывшимъ новые пути, не должны отъ этого цѣнить ниже труды тѣхъ, которые продолжали идти по старой дорогѣ, или умалять значеніе, связываемое съ ихъ открытіями.

Первая глава этой третьей Книги посвящена ученію о кривизнѣ плоскихъ линій и теоріи эволютъ; обѣ эти теоріи глубоко между собою связаны и раздѣлять ихъ не должно. Однако знаменитый Гюйгенсъ,

создатель второй изъ этихъ теорій, кажется, не имѣлъ опредѣленнаго понятія о кривизнѣ; по крайней мѣрѣ, онъ его не формулировалъ ясно. Лейбницъ и Ньютонъ первые пришли къ нему различными путями. Именно въ *Acta Eruditorum* 1686 г. Лейбницъ далъ первый опредѣленіе соприкасающагося круга, объясняя его важную роль, которую онъ долженъ играть при изученіи кривыхъ. „Въ каждомъ безконечно-маломъ отрѣзкѣ кривой можно разсматривать, говоритъ онъ, какъ это дѣлали до сихъ поръ, не только направленіе, но и измѣненіе этого направленія, т.-е. сгибаніе (*flexura*); и какъ для того, чтобы указать направленіе, пользуются возможно простѣйшею линіей, какою является прямая, такъ и я измѣряю сгибаніе кривой простѣйшею линіей, которая имѣла бы не только то же направленіе, но еще и ту же кривизну, какъ кривая, т.-е. кругомъ, который не только касается ея, но и является для нея соприкасающимся. Указывать направленіе болѣе всего свойственно прямой линіи, направленіе которой всегда одно и то же; точно такъ же, указывать кривизну болѣе всего свойственно кругу, потому что кривизна круга одна и та же во всѣхъ его точкахъ. Соприкасающійся кругъ кривой въ точкѣ есть кругъ, образующій съ нею наименьшій уголъ соприкосновенія; въ самомъ дѣлѣ, среди безчисленнаго множества круговъ, касающихся кривой въ точкѣ, всегда можно отмѣтить одинъ, который уподобляется ей болѣе, чѣмъ всѣ другіе, и ползетъ, такъ сказать, дольше около нея, такъ что никакой другой кругъ не можетъ быть помѣщенъ между ними“.

Предыдущее мѣсто выписано изъ очень коротенькой Замѣтки Лейбница, крайне любопытной во всѣхъ отношеніяхъ. Въ ней мы видимъ примѣръ манеры этого мощнаго ума, когда онъ, касаясь всего какъ бы слегка, во все проникаетъ до самой глубины. Онъ весьма ясно усмотрѣлъ теорію соприкосновенія и соприкосновеній различныхъ порядковъ, хотя и выразить ее въ не совсѣмъ точной формѣ; но и здѣсь, какъ во многихъ другихъ случаяхъ, онъ довольствуется тѣмъ, что посѣялъ зерна новой теоріи, предоставляя другимъ заботу заставить ихъ принести плоды. Указанія, которыя онъ даетъ относительно способа нахождения соприкасающагося круга не только весьма смутны, но безусловно невѣрны, такъ какъ онъ ошибается относительно числа равныхъ корней, которые мы должны находить при разысканіи пересѣченія кривой съ ея соприкасающимся кругомъ. Изъ этого недосмотра можно заключить, что выбранный имъ примѣръ, являющійся коническимъ сѣченіемъ, разсмотрѣннымъ въ его вершинѣ, есть единственный,



который онъ изслѣдовалъ до конца; если бы онъ испыталъ другой, то онъ, конечно, усмотрѣлъ бы, что только три точки пересѣченія, но не четыре, сливаются въ одну. Многимъ изъ этихъ указаній, хотя и справедливымъ при надлежащемъ ихъ истолкованіи, не достаетъ, можетъ-быть, опредѣленнаго основанія, и понятно, что при чтеніи подобныхъ сочиненій заключающаяся въ нихъ доктрина осталась бы недоступною для большинства читателей.

Яковъ Бернулли, принимаясь нѣсколько лѣтъ спустя за изложеніе тѣхъ же принциповъ, отмѣтилъ недосмотръ Лейбница, относящійся къ числу точекъ пересѣченія кривой съ ея соприкасающимся кругомъ; но, несмотря на очевидность неоднократно представленныхъ ему объясненій, Лейбницъ остался при своемъ и только значительно позже отказался отъ своего перваго утвержденія.

Изъ того, что Лейбницъ не упоминаетъ имени Гюйгенса, повидимому, слѣдуетъ, что онъ не тотчасъ замѣтилъ внутреннюю связь между своею новою теоріей и теоріей эволютъ; но въ письмѣ, написанномъ пять лѣтъ спустя, онъ говоритъ Гюйгенсу: „Центры круговъ, измѣряющихъ кривизну, идутъ въ вашемъ построеніи посредствомъ развертыванія“. Гюйгенсъ отвѣчалъ: „Вы мнѣ говорите о вашемъ разсужденіи: *De angulo contactus et osculi*, которое, помнится, я читалъ и которое не показалось мнѣ новымъ, такъ какъ я разсматривалъ эти виды соприкосновенія въ своемъ Трактатѣ о развертываніи кривыхъ и, притомъ, задолго передъ этимъ“.—„Я охотно вѣрю, отвѣчаетъ Лейбницъ, что вы представляли себѣ кругъ, описываемый изъ точки развернутой кривой и имѣющій радіусомъ наименьшую прямую, какую можно провести изъ этой точки до описанной кривой; но не думали ли вы, можетъ-быть, разсмотрѣть его, какъ мѣру кривизны, я же, когда разсматривалъ наибольшій кругъ, касающійся кривой внутренно, не помышлялъ о развертываніяхъ“. Ньютонъ съ своей стороны, въ книгѣ: „*Принципы*“, опубликованной въ 1687 г., постоянно пользуется теоріею радіуса кривизны и выказываетъ полное знакомство съ соотношеніемъ, связывающимъ эту теорію съ теоріей эволютъ.

Глава заканчивается ученіемъ о системахъ криволинейныхъ координатъ на плоскости и доказательствомъ замѣчательныхъ формулъ Ламэ (Lamé); создавъ эту теорію, онъ посвятилъ ей такой исчерпывающій трудъ, послѣ котораго, какъ кажется, очень мало осталось что-либо сдѣлать для дальнѣйшаго ея развитія или упрощенія. Мы особенно отмѣчаемъ замѣчательное соотношеніе, связывающее радіусы кривизны ортогональ-

ныхъ кривыхъ съ ихъ производными, взятыми по нормальнымъ дугамъ, очень изящную формулу, содержащую неявно законъ возможнаго измѣненія сторонъ бесконечно-малыхъ прямоугольниковъ, на которые разбивается плоскость двумя рядами ортогональныхъ кривыхъ: каждый прямоугольникъ въ частности, очевидно, произволенъ; но ихъ послѣдовательныя стороны имѣютъ между собою необходимыя соотношенія, которыя измѣнились бы, если бы кривыя были расположены на другой поверхности, и являются общими только для двухъ взаимно наворачиваемыхъ поверхностей.

Ученіе о линіяхъ, нанесенныхъ на сферѣ, составляетъ предметъ второй главы; въ ней рассматривается элементъ, отмѣченный Эйлеромъ подъ именемъ *сферической кривизны* и введенный, какъ естественное обобщеніе понятія о кривизнѣ плоскихъ линій. Работы новѣйшихъ геометровъ распространили обобщеніе на линіи, нанесенныя на какой-угодно поверхности, и тѣмъ усилили значеніе весьма простыхъ теоремъ, которыя мы доказываемъ для случая сферическихъ кривыхъ. Распространеніе прекрасныхъ формулъ Ламэ на случай системы линій, пересекающихся подъ прямымъ угломъ на сферѣ должно быть особенно отмѣчено.

Третья глава посвящена линіямъ двойкой кривизны. Не занимаясь отдѣльно никакою кривою, мы даемъ, какъ для плоскихъ кривыхъ, свойства, общія имъ всѣмъ; они являются въ большинствѣ слѣдствіями изъ закона непрерывности, но связь, соединяющая ихъ съ этимъ закономъ, скрыта: только весьма изощренные и внимательные глаза могутъ ее замѣтить. Всякая кривая имѣетъ въ каждой точкѣ соприкасающуюся плоскость и соприкасающійся кругъ, ось котораго, представляющая пересѣченіе двухъ нормальныхъ бесконечно-близкихъ плоскостей, есть производящая развертывающейся поверхности, имѣющей ребромъ возврата геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ.

Соприкасающаяся плоскость впервые была рассмотрѣна Иваномъ Бернулли, который, вводя ее въ рѣшеніе одной геометрической задачи, указалъ вполне достаточный способъ для ея опредѣленія. Но эти разсужденія, кажется, очень мало обратили на себя вниманія до появленія прекраснаго Мемуара Монжа, въ которомъ въ первый разъ изложена общая теорія эволютъ и который составляетъ основаніе нашихъ познаній общаго характера о кривыхъ двойкой кривизны. Именно здѣсь впервые указана развертывающаяся поверхность, содержащая эволюты и свое ребро возврата, представляющее геометриче-

ское мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ. Равнымъ образомъ онъ показалъ, что геометрическое мѣсто центровъ кривизны не есть эволюта, и облегчилъ рѣшеніе всѣхъ задачъ, изложенныхъ въ этой третьей главѣ.

Общая теорія поверхностей въ томъ видѣ, какъ она изложена въ главахъ V, VI и VII, заключается почти цѣликомъ въ Мемуарѣ Эйлера о кривизнѣ нормальныхъ сѣченій и въ тѣхъ сочиненіяхъ Монжа, гдѣ онъ показываетъ существованіе и свойства линій кривизны. Эти свойства, столь простыя и столь удивительныя по своей общности, не могли не стать скорѣ школьными и, такъ сказать, элементарными. Ничего нѣтъ полезнѣе для ясности теоріи, какъ ея введеніе въ строй правильного преподаванія. Послѣдовательныя усилія учителей, а часто также и учениковъ, направленные на всѣ ея слѣдствія, углубляясь въ случайныя трудности безъ пропуска какого-либо пункта неизслѣдованнымъ, приводятъ мало-по-малу къ очевиднѣйшимъ терминамъ предложенія, которыя, высказанныя впервые ихъ творцами, могли показаться чрезвычайно чудесными и въ высшей степени неожиданными. Во главѣ работъ, наиболѣе способствовавшихъ достиженію этой цѣли, должно поставить остроумную теорію индикатрисы, при помощи которой Дюпенъ (Dupin) такъ счастливо связалъ между собою результаты Эйлера и Монжа. Приведемъ также, среди крупныхъ успѣховъ, какіе оставалось совершить послѣ трудовъ этихъ двухъ великихъ геніевъ, важную теорему объ ортогональныхъ поверхностяхъ, открытую тоже Дюпеномъ, которой изслѣдованія Ламэ придали потомъ такъ много значенія. Не забудемъ, наконецъ, прекрасной теоремы Малюса (Malus) о свѣтовыхъ лучахъ, дополненной Дюпеномъ и доказанной имъ въ первый разъ во всей ея общности.

Первыя разысканія Монжа по теоріи поверхностей появляются въ Мемуарѣ, заглавіе котораго обѣщаетъ, повидимому, изслѣдованія совершенно иного характера. Въ самомъ дѣлѣ, въ своемъ Мемуарѣ о выемкахъ и насыпяхъ онъ даетъ въ первый разъ условіе, чтобы прямыя были нормальны къ одной и той же поверхности, и тамъ же доказываетъ, для какой-угодно поверхности, существованіе линій кривизны. Особенность этого Мемуара должна быть отмѣчена: онъ по своему заглавію кажется вполне чуждымъ теоріи поверхностей; дѣйствительно, онъ озаглавленъ: *Мемуаръ по теоріи выемокъ и насыпей*. Изслѣдуемый тамъ вопросъ любопытенъ, но онъ рѣшенъ, надо признаться, посредствомъ такихъ нестрогихъ разсужденій, что можно даже усомниться въ самой



справедливости заключеній. Такимъ образомъ Монжъ одно изъ своихъ самыхъ прекрасныхъ открытій далъ въ видѣ леммы, предназначенной облегчить изученіе этой неполной и лишенной значенія теоріи.

Послѣдняя глава этого тома изслѣдуетъ линіи, нанесенныя на какой-угодно поверхности; главные въ ней результаты заимствованы изъ одного изъ наиболѣе прекрасныхъ и наиболѣе знаменитыхъ Мемуаровъ Гаусса. Они относятся къ деформаци (видоизмѣненію) поверхностей по такому закону, что длина нанесенныхъ на нихъ линій остается безъ измѣненія. При такой деформаци произведение радіусовъ кривизны остается неизмѣннымъ въ каждой точкѣ; но обратное предложеніе несправедливо, и точки одной поверхности могутъ соотвѣтствовать по одной точкамъ другой поверхности такъ, что произведение радіусовъ кривизны будетъ одно и то же въ соотвѣтственныхъ точкахъ, но соотвѣтственныя линіи не будутъ еще вслѣдствіе этого одной и той же длины; необходимы другія условія, чтобы двѣ поверхности были наворачтываемы одна на другую; ихъ изученіе, постепенно усовершенствованное многими искусными геометрами, привело къ весьма простому методу, позволяющему рѣшать, не выходя изъ предѣловъ дифференціального исчисленія, наворачтываемы ли двѣ поверхности одна на другую.

Та же глава содержитъ, наконецъ, нѣсколько замѣчательныхъ результатовъ относительно элемента, названнаго Ліувиллемъ (Liouville) *геодезическою кривизною* и играющаго въ ученіи о линіяхъ, нанесенныхъ на поверхности, роль, совершенно аналогичную роли кривизны въ ученіи о плоскихъ линіяхъ.

Таково краткое содержаніе двадцати шести главъ, составляющихъ этотъ первый томъ; въ немъ есть важныя пробѣлы и многочисленныя недостатки, которыхъ я не скрываю отъ себя. Сравнивая то, что я смогъ сдѣлать, съ предначертаннымъ себѣ планомъ, я знаю лучше всякаго другого, какъ далеко не достигъ я желаемой цѣли. Я хотѣлъ бы устранить для молодыхъ геометровъ при изученіи ими трудовъ вождей науки всѣ препятствія, проистекающія отъ незнанія принциповъ, на которыхъ эти труды покоятся; но такая программа почти безпредѣльна, и я долженъ былъ ограничиться, по мѣрѣ своихъ силъ и знаній, облегченіемъ для нихъ лишь первыхъ шаговъ. Можно, безъ сомнѣнія, все это сдѣлать гораздо лучше, но нельзя, я въ томъ убѣжденъ, преодолѣть всѣхъ трудностей. Можетъ-быть, даже было-бы несправедливо сожалѣть объ этомъ; ничто не можетъ замѣнить непо-

средственного изученія великихъ учителей, и помогая молодымъ людямъ слишкомъ долго держаться отъ нихъ вдали и тѣмъ облегчая ихъ занятія, мы, пожалуй, задержали бы, и на очень, можетъ-быть, долгое время, развитіе у нихъ духа творчества.

Ж. Бертранъ

---





**ЖОЗЕФЪ БЕРТРАНЪ,**

членъ Института, профессоръ Политехнической школы и  
Французской Коллегии

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Ptolomaeus rex quaesisse ex Euclide dicitur, essetne aliqua regia ad Mathesin via, id est plana facilisque: negavit Euclides, sed eam hodie novis detectis methodis aperuimus.

G.-G. Leibnitz

СЪ ПОРТРЕТОМЪ АВТОРА

ПЕРЕВОДЪ БЕЗЪ ИЗМѢНЕНІЙ СЪ ПОСЛѢДНЯГО ФРАНЦУЗСКАГО ИЗДАНІЯ

**М. В. ПИРОЖКОВА,**

БЫВШАГО ПРЕПОДАВАТЕЛЯ С.-ПЕТЕРБУРГСКОЙ 10-ОЙ ГИМНАЗИИ

Издательство и книжный складъ «Наука и Жизнь»

**В. Д. Дорнбергъ**

(Спб., Нев. стор., Большой пр., д. 32)

**С.-ПЕТЕРБУРГЪ**

**1911**



4242

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ПЕРВАЯ КНИГА

### Дифференциалы и производныя

	Стран.
ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Безконечно-малыя различныхъ порядковъ, ихъ употребленіе въ геометріи. . .	1
Опредѣленія (§§ 1—10) . . . . .	1
Замѣна безконечно-малыхъ (§§ 11—12) . . . . .	7
Употребленіе безконечно-малыхъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ.—Опредѣленіе касательной къ нѣкоторымъ кривымъ (§§ 13—14) . . . . .	8
Опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей (§§ 15—17) . . . . .	13
Длина дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ (§§ 18—22) . . . . .	18
Упражненія . . . . .	22
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Производныя и дифференциалы перваго порядка. . . . .	24
Опредѣленіе производной (§§ 23—24) . . . . .	24
Производныя отъ простыхъ функцій (§§ 25—31) . . . . .	24
Производныя отъ обратныхъ функцій (§ 32—35) . . . . .	27
Производныя функцій отъ функцій (§§ 36—38) . . . . .	30
Производная отъ произведенія (§ 39) . . . . .	32
Производная отъ частнаго (§ 40). . . . .	33
Производная отъ степени (§ 41) . . . . .	33
Производная отъ $u^v$ (§ 42). . . . .	34
Нѣкоторыя приложенія (§ 43). . . . .	34
Употребленіе производныхъ при изслѣдованіи функцій (§ 44) . . . . .	36
Порядокъ величины безконечно-малой производной (§ 45) . . . . .	37
Дифференціалъ функцій отъ одной переменнѣй (§§ 46—49) . . . . .	38
Частныя производныя функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ (§§ 50—52) . . . . .	41
Дифференціалъ функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ (§§ 53—57) . . . . .	43
Производныя отъ сложныхъ функцій (§§ 58—59) . . . . .	46
Производныя отъ неявныхъ функцій (§§ 60—67) . . . . .	48
Упражненія . . . . .	53



	Стран.
<b>ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Функциональный определитель . . . . .</b>	<b>55</b>
Определение определителей (§§ 68—70) . . . . .	55
Определение функционального определителя (§§ 71—72) . . . . .	56
Случай, когда определитель равен нулю (§§ 73—74) . . . . .	58
Определитель системы функций от функций (§ 75) . . . . .	60
Определитель системы обратных функций (§ 76) . . . . .	61
Приведение определителя къ одночлену (§ 77) . . . . .	62
Упражнения . . . . .	64
<b>ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Аналитическая теорія касательныхъ линий и касательныхъ плоскостей . . . . .</b>	<b>66</b>
* Уравненія касательной и нормали къ плоской кривой (§§ 78—82) . . . . .	66
* Определение нѣкоторыхъ касательныхъ (§§ 83—86) . . . . .	70
* Замѣчаніе, относящееся къ предыдущимъ задачамъ (§ 87) . . . . .	78
Касательныя къ кривымъ, отнесеннымъ къ полярнымъ координатамъ (§§ 88—90) . . . . .	79
* Касательныя къ кривымъ двойкой кривизны (§§ 91—92) . . . . .	81
Кривыя на шарѣ (§ 93) . . . . .	83
* Уравненіе плоскости, касательной къ поверхности (§ 94) . . . . .	84
* Уравненіе нормали (§§ 95—97) . . . . .	86
* Определение нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей (§§ 98—103) . . . . .	88
* Огибающія кривыя и поверхности (§§ 104—108) . . . . .	100
* Приложение къ нѣкоторымъ примѣрамъ (§§ 109—113) . . . . .	104
Упражнения . . . . .	109
<b>ГЛАВА ПЯТАЯ.—Дифференціалы нѣкоторыхъ функций, заданныхъ геометрически . . . . .</b>	<b>110</b>
* Дифференціалъ площади, взятой на плоскости (§§ 114—117) . . . . .	110
* Дифференціалъ дуги кривой (§§ 118—122) . . . . .	112
Дифференціалъ дуги кривой въ криволинейныхъ координатахъ (§§ 123—131) . . . . .	117
Упражнения . . . . .	123
<b>ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Производныя и дифференціалы порядка выше перваго . . . . .</b>	<b>125</b>
Определение производныхъ высшаго порядка (§ 132) . . . . .	125
Определение дифференціаловъ высшаго порядка (§§ 133—138) . . . . .	125
Определение послѣдовательныхъ производныхъ отъ функций (§§ 139—145) . . . . .	128
Числовое значеніе нѣкоторыхъ производныхъ, когда переменная обращается въ нуль (§§ 146—153) . . . . .	136
Производныя и дифференціалы высшаго порядка для функций отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.—Принятое при этомъ обозначеніе (§ 159) . . . . .	150
Возможность мѣнять порядокъ дифференцированій (§§ 160—161) . . . . .	150
Дифференціалы различныхъ порядковъ для функций отъ нѣсколькихъ переменныхъ (§§ 162—164) . . . . .	152
Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функций (§§ 165—166) . . . . .	155
Упражнения . . . . .	158
<b>ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Замѣна переменныхъ . . . . .</b>	<b>160</b>
Вліяніе независимой переменной на дифференціалы порядка выше перваго (§§ 167—168) . . . . .	160

	Стран.
Замѣна независимой переменнѣй ( §§ 169—172 ). . . . .	161
Одновременная замѣна всѣхъ переменнѣхъ ( §§ 173—175 ). . . . .	164
Случай многихъ независимыхъ переменнѣхъ ( §§ 176—178 ). . . . .	167
Случай замѣны функцій (§ 179) . . . . .	170
Примѣры ( §§ 180—185 ). . . . .	171
Упражненія . . . . .	181
<b>ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Составленіе дифференціальныхъ уравненій . . . . .</b>	<b>183</b>
Опредѣленіе дифференціальныхъ уравненій ( §§ 186—187 ). . . . .	183
Исключеніе постоянныхъ ( §§ 188—190 ). . . . .	185
Исключеніе постоянныхъ въ уравненіяхъ съ нѣсколькими независимыми переменными ( §§ 191—196 ). . . . .	187
Исключеніе произвольныхъ функцій ( §§ 197—201 ). . . . .	193
Уравненія въ частныхъ производныхъ различныхъ классовъ поверхностей ( §§ 202—213 ). . . . .	198
Замѣчательное введеніе дифференціального уравненія въ одну ариометическую задачу (§ 214). . . . .	211
Полныя дифференціальныя уравненія (215—219). . . . .	213
Упражненія . . . . .	217

## ВТОРАЯ КНИГА

### Развертываніе въ ряды

<b>ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Общее ученіе о рядахъ . . . . .</b>	<b>220</b>
Опредѣленія (§ 220) . . . . .	220
Примѣры рядовъ ( §§ 221—227 ). . . . .	220
Необходимость изслѣдованія сходимости употребляемыхъ въ математикѣ рядовъ (§ 228). . . . .	225
Теоремы о сходимости рядовъ съ положительными членами ( §§ 229—241 ). . . . .	227
Правило Гаусса (§ 242) . . . . .	237
Методъ Куммера ( §§ 243—245 ) . . . . .	241
Ряды съ членами попеременно положительными и отрицатель- ными ( §§ 246—248 ) . . . . .	244
Мнимые ряды (§ 249) . . . . .	246
Преобразованіе Эйлера ( §§ 250—252 ). . . . .	248
Методъ Стирлинга ( §§ 253—254 ) . . . . .	254
Методъ Куммера ( §§ 255—257 ) . . . . .	256
Ряды, расположенные по степенямъ переменнѣй ( §§ 258—262 ) . . . . .	262
Непрерывность рядовъ ( §§ 263—268 ) . . . . .	265
Перемноженіе двухъ рядовъ ( §§ 269—271 ) . . . . .	271
Упражненія . . . . .	273
<b>ГЛАВА ВТОРАЯ.—Теорема Тэйлора . . . . .</b>	<b>275</b>
Доказательство Тэйлора (§ 272). . . . .	275
Выраженіе остатка ряда (§ 273). . . . .	276
Второй видъ остатка (§ 274) . . . . .	278

	Стран.
Третій видъ остатка (§ 275). . . . .	279
Безконечно-малое приращеніе функціи (§ 276) . . . . .	280
Замѣчаніе относительно ряда Тэйлора (§ 277). . . . .	280
Формула Маклорена (§§ 278—279). . . . .	282
Нѣкоторыя разложенія въ ряды (§§ 280—306) . . . . .	283
Нѣкоторыя приложенія теоремы Тэйлора (§§ 307—308) . . . . .	301
Упражненія . . . . .	303
<b>ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Нѣкоторыя разложенія въ ряды . . . . .</b>	<b>304</b>
Рядъ Бернулли (§§ 309—310). . . . .	304
Формула Лагранжа (§§ 311—313). . . . .	306
Второе доказательство формулы Лагранжа (§ 314). . . . .	311
Приложенія формулы Лагранжа (§§ 315—320) . . . . .	313
Рядъ Бурмана (§§ 321—322) . . . . .	317
Рядъ Абеля (§ 323). . . . .	318
Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ (§§ 324—336) . . . . .	319
Теорія производящихъ функцій (§§ 337—342) . . . . .	332
О символическомъ обозначеніи (343—346). . . . .	339
О числахъ Бернулли (§§ 347—353). . . . .	343
О функціяхъ, названныхъ Лежандромъ $X_n$ (§§ 354—358) . . . . .	351
Упражненія . . . . .	355
<b>ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Функціи отъ мнимой перемѣнной . . . . .</b>	<b>358</b>
Опредѣленіе мнимой функціи (§§ 356—364) . . . . .	358
Опредѣленіе нѣкоторыхъ простыхъ функцій (§§ 365—37) . . . . .	362
О функціяхъ недостаточно опредѣленныхъ (§§ 373—377) . . . . .	369
Разложеніе въ рядъ мнимыхъ функцій (§§ 378—380). . . . .	376
Разложеніе $\mathcal{U}(1+z)$ (§§ 381—383) . . . . .	377
Разложеніе $(1+z)^m$ (§§ 384—386) . . . . .	380
Нѣкоторыя разложенія въ рядъ, выведенныя изъ разсмотрѣнія мнимыхъ функцій (§§ 387—390) . . . . .	386
Упражненія . . . . .	388
<b>ГЛАВА ПЯТАЯ.—Разложеніе функцій отъ многихъ перемѣнныхъ . . . . .</b>	<b>390</b>
Распространеніе теоремы Тэйлора на функцію отъ двухъ пе- ремѣнныхъ (§§ 391—395) . . . . .	390
Символическое выраженіе теоремы Тэйлора (§ 396). . . . .	394
Распространеніе формулы Лагранжа на функціи отъ двухъ пермѣнныхъ (§ 397). . . . .	394
Доказательство Якоби (§§ 398—399) . . . . .	399
<b>ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Разложенія въ произведенія съ безконечнымъ числомъ множителей . . . . .</b>	<b>404</b>
Условіе сходимости безконечныхъ произведеній (§§ 400—403). . . . .	404
Выраженіе нѣкоторыхъ функцій въ видѣ безконечныхъ про- изведеній (§§ 404—405) . . . . .	408
Выраженіе нѣкоторыхъ другихъ функцій (§§ 406—408). . . . .	411
О нѣкоторыхъ рядахъ, вытекающихъ изъ предыдущихъ фор- мулъ (§§ 409—415). . . . .	414
Формула Валлиса (§§ 416—418) . . . . .	419
Упражненія . . . . .	422

	Стран.
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Разложенія въ непрерывныя дроби . . . . .	425
Опредѣленіе непрерывныхъ дробей (§ 419) . . . . .	425
Преобразование ряда въ непрерывную дробь (§§ 420—425) . . . . .	425
Выраженіе функціи подъ видомъ непрерывной дроби (§§ 426—433) . . . . .	430
Упражненія . . . . .	440
ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Теорія вычетовъ . . . . .	442
Предварительныя замѣчанія (§§ 434—435) . . . . .	442
Нахожденіе вычета (§§ 436—437) . . . . .	443
Обозначенія Коши (§ 438) . . . . .	445
Теоремы, относящіяся къ вычетамъ (§§ 439—441) . . . . .	447
Сумма вычетовъ раціональной функціи (§§ 442—443) . . . . .	449
Измѣненіе независимой переменнѣй (§§ 444—446) . . . . .	452
Нѣкоторыя приложенія теоріи вычетовъ (§ 447) . . . . .	456
Вычисленіе симметрическихъ функцій (§§ 448—450) . . . . .	457
Упражненія . . . . .	464
ГЛАВА ДЕВЯТАЯ.—Выраженія неопредѣленнаго вида и теорія особенныхъ точекъ . . . . .	466
Дроби, принимающія видъ $\frac{0}{0}$ (§§ 451—452) . . . . .	466
Дроби, принимающія видъ $\frac{\infty}{\infty}$ (§§ 453—455) . . . . .	468
Другіе виды неопредѣленностей (§ 456) . . . . .	470
Нѣкоторые примѣры (§§ 457—461) . . . . .	470
Теорія особенныхъ точекъ . . . . .	475
Опредѣленія (§ 462) . . . . .	475
Аналитическій признакъ особенныхъ точекъ (§§ 463—468) . . . . .	476
Особенныя точки поверхностей (§§ 469—471) . . . . .	483
Упражненія . . . . .	487
ГЛАВА ДЕСЯТАЯ.—Теорія значеній maxima и minima . . . . .	489
Maxima и minima функцій отъ одной переменнѣй (§§ 472—478) . . . . .	489
Геометрическое рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ (§ 479) . . . . .	496
Maxima и minima функцій отъ двухъ переменныхъ (§§ 480—481) . . . . .	496
Функціи отъ большаго числа переменныхъ (§§ 482—483) . . . . .	498
Maxima и minima неявныхъ функцій (§§ 484—487) . . . . .	500
Разысканіе выраженія даннаго вида, которое, въ извѣст- ныхъ предѣлахъ, наименѣе уклоняется отъ данной функціи (§§ 488—491) . . . . .	505
Упражненія . . . . .	514

### ТРЕТЬЯ КНИГА

#### Геометрическія приложенія.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Кривизна плоскихъ линій . . . . .	516
Что такое кривизна (§ 492) . . . . .	516
Опредѣленіе кривизны и радіуса кривизны (§§ 493—494) . . . . .	517



## VIII

	Стран.
Выраженіе для радіуса кривизны (§ 495). . . . .	518
Кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую (§ 496) . . . . .	519
Различныя выраженія для радіуса кривизны (§§ 497—503) . . . . .	519
Приложеніе къ нѣкоторымъ примѣрамъ (§ 504) . . . . .	524
Геометрическое опредѣленіе нѣкоторыхъ радіусовъ кривизны (505—506) . . . . .	526
Кривизна ортогональныхъ линій (§§ 507—515). . . . .	530
Приближенное выраженіе нѣкоторыхъ безконечно-малыхъ величинъ (§§ 515—518) . . . . .	543
Разность касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ дуги и оканчивающихся въ точкѣ ихъ встрѣчи (§§ 519—521) . . . . .	547
Теорія эволютъ (§§ 522—526). . . . .	549
Примѣры эволютъ (§§ 527—532). . . . .	553
<b>Соприкосновенія различныхъ порядковъ . . . . .</b>	<b>585</b>
Опредѣленіе порядка касанія (§§ 533—538) . . . . .	558
Соприкасающаяся кривая (§ 539) . . . . .	561
Соприкасающійся кругъ (§§ 540—541) . . . . .	562
<b>Упражненія . . . . .</b>	<b>563</b>
<b>ГЛАВА ВТОРАЯ.—Кривизна линій, нанесенныхъ на сферѣ . . . . .</b>	<b>565</b>
Опредѣленіе геодезической кривизны (§ 542) . . . . .	565
Кривизна малаго круга (§ 543) . . . . .	565
Кругъ кривизны (§ 544) . . . . .	566
Полюсъ круга кривизны (§ 545). . . . .	566
Различныя выраженія геодезической кривизны сферической линіи (§§ 546—552) . . . . .	568
Теорія сферическихъ эволютъ (§§ 553—555). . . . .	574
Кривизна ортогональныхъ траекторій на сферѣ (555—561) . . . . .	576
<b>Упражненія . . . . .</b>	<b>585</b>
<b>ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Соприкасающаяся плоскость кривой двоякой кривизны . . . . .</b>	<b>586</b>
Опредѣленіе соприкасающейся плоскости (§§ 562—570). . . . .	586
Огибающая поверхность для соприкасающихся плоскостей (§§ 571—573) . . . . .	591
Уравненіе соприкасающейся плоскости (§§ 574—577) . . . . .	595
<b>ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Двѣ кривизны кривой, соприкасающійся кругъ и соприкасающійся шаръ или сфера (sphère osculatrice) . . . . .</b>	<b>599</b>
Опредѣленіе кривизны (§§ 578—579). . . . .	599
Опредѣленіе второй кривизны (§ 580) . . . . .	600
Отношеніе обѣихъ кривизнъ (§ 581) . . . . .	600
Кругъ кривизны (§ 582) . . . . .	601
Соприкасающійся кругъ (§ 583) . . . . .	601
Вычисленіе радіуса кривизны (§§ 584—586) . . . . .	602
Главная нормаль (§§ 587—588) . . . . .	605
Выраженіе второй кривизны (§ 589) . . . . .	607
Формулы Серре (§§ 590—592) . . . . .	602
Ось соприкасающейся плоскости (§ 593—595) . . . . .	612

	Стран.
Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей (§§ 596—600) . . . . .	613
Соприкасающаяся сфера (§§ 601—602) . . . . .	617
Опредѣленіе соприкасающейся сферы (§§ 603—607) . . . . .	619
Опредѣленіе нѣкоторыхъ безконечно-малыхъ величинъ (§ 608—609) . . . . .	622
Опредѣленіе эволюты (§ 610) . . . . .	625
Длина дуги эволюты (§§ 611—614) . . . . .	625
Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ эволютъ (§§ 615—621) . . . . .	628
Уравненіе эволютъ (§§ 622—623) . . . . .	633
Упражненія . . . . .	634
<b>ГЛАВА ПЯТАЯ.—Теорія кривизны поверхностей . . . . .</b>	<b>635</b>
Кривизна нормальныхъ сѣченій (§§ 624—628) . . . . .	635
Кривизна наклоннаго сѣченія (§ 629) . . . . .	639
Кривизна линіи двойкой кривизны (§ 630) . . . . .	641
Геодезическая линія (ligne minima) на какой-угодно поверхности (§ 631) . . . . .	641
Болѣе общія формулы, относящіяся къ какимъ-угодно осямъ координатъ (§§ 632—637) . . . . .	642
Геометрическое доказательство предыдущихъ теоремъ . . . . .	649
Индикатриса (§§ 638—639) . . . . .	649
Законъ кривизны нормальныхъ сѣченій (§§ 640—642) . . . . .	651
Кривизна наклоннаго сѣченія (§ 643) . . . . .	653
Сопряженные касательныя (§§ 644—645) . . . . .	653
Упражненія . . . . .	654
<b>ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Ученіе о нормаляхъ къ одной и той же поверхности . . . . .</b>	<b>655</b>
Не существуетъ, вообще, поверхности, нормальной къ прямому пучку (§§ 646—647) . . . . .	655
Необходимое условіе для существованія поверхности (§§ 648—662) . . . . .	656
Упражненія . . . . .	673
<b>ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Теорія линій кривизны . . . . .</b>	<b>674</b>
Опредѣленіе линій кривизны (§§ 663—664) . . . . .	674
Дифференціальное уравненіе линій кривизны (§§ 665—672) . . . . .	675
Поверхность, касательная къ нормалямъ данной поверхности (§§ 673—677) . . . . .	683
Линія кривизны, общая для двухъ поверхностей (§§ 678—680) . . . . .	685
Ортогональныя поверхности (§§ 681—683) . . . . .	687
Опредѣленіе линій кривизны въ нѣкоторыхъ простыхъ случаяхъ (§§ 684—706) . . . . .	691
<b>ГЛАВА ВОСЬМАЯ.—Ученіе о линіяхъ, нанесенныхъ на поверхности . . . . .</b>	<b>710</b>
Геодезическія линіи (§§ 707—713) . . . . .	710
Геодезическая кривизна (§§ 714—719) . . . . .	715

	Стран.
Полная кривизна части поверхности (§§ 720—721) . . . . .	720
Мѣра кривизны (§§ 722—723) . . . . .	721
Теорія развертыванія поверхностей (§§ 724—729) . . . . .	722
Условіе, чтобы двѣ поверхности были наворачтываемы ( <i>applicables</i> ) одна на другую (§§ 730—738) . . . . .	730
Кривизна ортогональныхъ траекторій на какой-угодно поверх- ности (§§ 739—741) . . . . .	737
Алфавитный указатель . . . . .	742
Опечатки . . . . .	756

---



# ПЕРВАЯ КНИГА

## Дифференціалы и производныя

### ГЛАВА ПЕРВАЯ

Безконечно-малыя различныхъ порядковъ, ихъ употребленіе въ геометріи

#### ОПРЕДѢЛЕНІЯ

§ 1. *Безконечно-малою* или *безконечно-малымъ количествомъ* называется такое число или такая переменная величина, которая, неопредѣленно уменьшаясь, приближается къ нулю какъ-угодно близко, никогда его не достигая.

Если одновременно разсматривается нѣсколько безконечно-малыхъ, то одна изъ нихъ по произволу принимается за *главную безконечно-малую*, при чемъ вводятся слѣдующія опредѣленія.

*Безконечно-малою первого порядка* называется всякая безконечно-малая, отношеніе которой къ главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу въ то время, когда обѣ онѣ неопредѣленно приближаются къ нулю.

*Безконечно-малою второго порядка* называется всякая безконечно-малая, отношеніе которой къ квадрату главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу.

Вообще, *безконечно-малою  $n$ -го порядка* называется безконечно-малая, отношеніе которой къ  $n$ -ой степени главной безконечно-малой стремится къ конечному предѣлу.

Не слѣдуетъ думать, что всякая безконечно-малая непремѣнно будетъ опредѣленнаго порядка; въ самомъ дѣлѣ, мы встрѣтимся съ такими безконечно-малыми, что порядокъ одной изъ нихъ не совпадетъ съ порядкомъ какой-либо степени другой.

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  будутъ такія безконечно-малыя; отношеніе  $\frac{\alpha}{\beta}$  не можетъ имѣть конечнаго предѣла, потому что въ противномъ случаѣ онѣ были бы одного и того же порядка. Если этотъ предѣлъ есть нуль, то говорятъ, что  $\alpha$  — *высшаго порядка*, чѣмъ  $\beta$ , и — наоборотъ, если этотъ предѣлъ равенъ безконечности.

Изъ предыдущихъ опредѣленій, очевидно, вытекаетъ, что если двѣ безконечно-малыя соотвѣтственно порядковъ  $n$  и  $n'$ , то ихъ произведеніе  $\alpha\beta$  порядка  $n+n'$ .

не может также возрасть безпредѣльно при  $h$ , стремящемся къ нулю, или, другими словами, что приращеніе  $h$  переменной не может быть бесконечно-малою порядка

высшаго, чѣмъ приращеніе функціи. Не трудно замѣтить, что послѣдній выводъ тождественъ съ предыдущимъ. Въ самомъ дѣлѣ, при одновременномъ разсмотрѣніи функціи  $\varphi(x)$  и переменнѣй  $x$ , отъ которой она зависитъ, мы можемъ самую функцію обозначить одною буквою  $y$  и принять ее за переменную, отъ которой  $x$  будетъ уже функціею  $\psi(y)$ . Чтобы вполне убѣдиться въ этомъ, стоитъ только  $\varphi(x)$  считать ординатою кривой, заданной уравненіемъ:  $y = \varphi(x)$ ; дѣйствительно, построивъ эту кривую, мы тотчасъ замѣтимъ, что абсциссу какой-нибудь ея точки можно принять за функцію отъ ординаты совершенно такъ же, какъ раньше мы принимали ординату за функцію отъ абсциссы; а такъ какъ у насъ доказано въ общемъ видѣ, для одной изъ этихъ величинъ, что ея бесконечно-малое приращеніе не можетъ быть высшаго порядка, чѣмъ для другой, то наше предложеніе непремѣнно будетъ справедливо для каждой изъ нихъ, т.-е. что оба приращенія должны быть одного и того же порядка.

§ 3. Какова бы ни была функція  $\varphi(x)$ , отношеніе  $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ , по предыдущему, имѣетъ конечный предѣлъ при  $h$ , стремящемся къ нулю; этотъ предѣлъ есть новая функція отъ  $x$  и называется *производною функціи*  $\varphi$ ; ее часто обозначаютъ тѣмъ же символомъ, что и данную функцію, только со значкомъ наверху; такъ, напр.,  $\varphi'(x)$  есть производная  $\varphi(x)$ .

Разысканіе и изслѣдованіе производныхъ весьма важно въ исчисленіи бесконечно-малыхъ; мы посвятимъ этому нѣсколько главъ. Ближайшая же наша цѣль—дать нѣсколько примѣровъ бесконечно-малыхъ различныхъ порядковъ.

Непосредственно мы приведемъ нѣкоторыя геометрическія слѣдствія изъ предыдущаго предложенія.

§ 4. Если координаты точекъ кривой выражены въ функціи отъ переменнѣй  $\alpha$ , что, очевидно, можетъ быть выполнено для какой-нибудь кривой безчисленнымъ множествомъ способовъ, то разстояніе двухъ бесконечно-близкихъ точекъ этой кривой есть бесконечно-малая того же порядка, что и разность соответственныхъ значений  $\alpha$ .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $x$  и  $y$  обозначаютъ координаты одной изъ точекъ,  $(x+h)$  и  $(y+k)$  — координаты другой и  $\delta$  — приращеніе для  $\alpha$ ; тогда, такъ какъ  $x$  и  $y$  суть функціи отъ  $\alpha$ , изъ общей теоремы вытекаетъ, что ихъ приращенія, какъ  $h$ , такъ и  $k$ , будутъ одного и того же порядка съ  $\delta$ . Съ другой же стороны,

$$\frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^2},$$

откуда слѣдуетъ, что это отношеніе имѣетъ конечный предѣлъ, что и доказываетъ наше предложеніе, потому что  $\sqrt{h^2 + k^2}$  есть разстояніе между двумя разсматриваемыми точками.

Это предложеніе справедливо и для кривыхъ двоякой кривизны; если  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаты какой-нибудь точки такой кривой и выражены въ функціи отъ одной и той же переменнѣй  $\alpha$ , то при бесконечно-маломъ приращеніи  $\delta$  для величины  $\alpha$ , координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  перейдутъ соответственно въ  $x+h$ ,  $y+k$ ,  $z+l$ , при чемъ  $h$ ,  $k$  и  $l$  будутъ одного порядка съ  $\delta$ . Съ другой же стороны,

$$\frac{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{l}{\delta}\right)^2},$$



откуда слѣдуетъ, что отношеніе разстоянія двухъ бесконечно-близкихъ точекъ къ соотвѣтственному приращенію  $\alpha$  стремится къ конечному предѣлу.

**§ 5.** Если точкамъ одной кривой соотвѣтствуютъ точки другой кривой такимъ образомъ, что для точки, выбранной на одной изъ нихъ, найдется ей соотвѣтственная на другой кривой вполне определенная, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на одной изъ кривыхъ будетъ того же порядка, что и разстояніе между двумя соотвѣтственными точками на другой кривой.

Въ самомъ дѣлѣ, если предположить, что координаты  $x, y, z$  точки первой кривой выражены въ функціи отъ переменнѣй  $\alpha$ , то и координаты  $x_1, y_1, z_1$  соотвѣтственной точки второй кривой также выразятся въ функціи отъ  $\alpha$ . Поэтому, если желательно разсмотрѣть двѣ бесконечно-близкія точки на одной изъ кривыхъ и имъ соотвѣтственныя на другой, то достаточно приписать  $\alpha$  два бесконечно-близкихъ значенія:  $\alpha$  и  $\alpha + \delta$ . По предыдущему, разстоянія между полученными такимъ образомъ точками будутъ оба одного порядка съ  $\delta$ ; значить, они суть бесконечно-малыя одного и того же порядка.

Поэтому, какъ только будетъ доказано, въ какомъ-нибудь частномъ случаѣ, что разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на второй кривой постоянно остается бесконечно-малою высшаго порядка относительно разстоянія между соотвѣтственными точками на первой кривой, то необходимо заключить, что координаты точекъ второй кривой суть постоянныя и что самая кривая приводится къ точкѣ.

**§ 6.** Если прямая линія перемѣщается въ пространство по какому-нибудь непрерывному закону такимъ образомъ, что каждое изъ ея положеній соотвѣтствуетъ одному изъ значеній переменнѣй  $\alpha$ , то уголъ между двумя бесконечно-близкими положеніями этой прямой есть того же порядка, что и разность между соотвѣтственными значеніями  $\alpha$ .

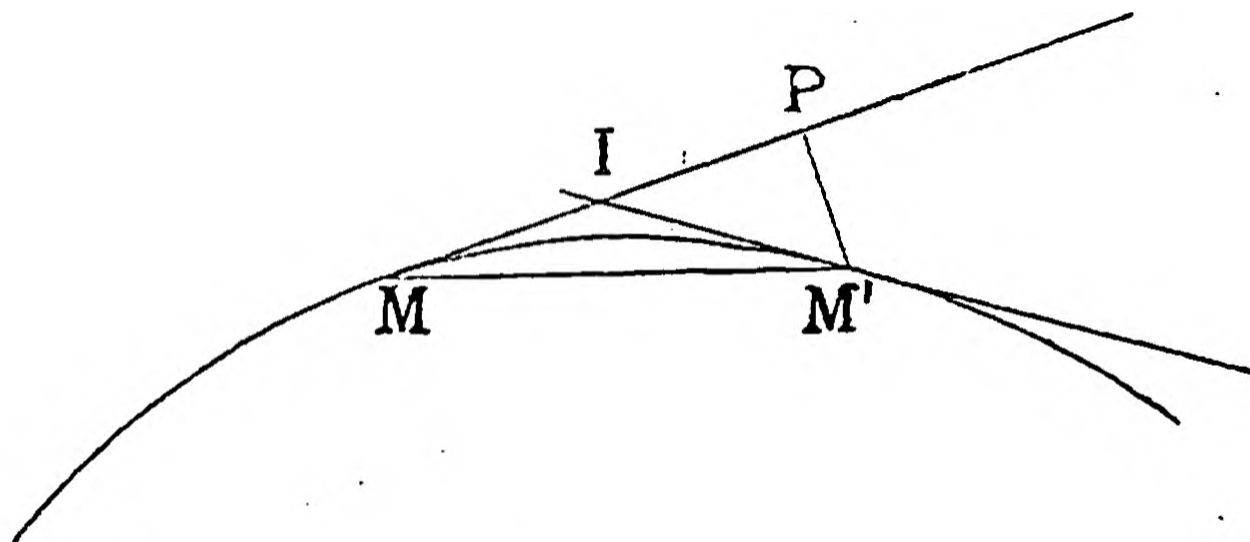
Для доказательства предположимъ, что черезъ начало координатъ  $O$  проведены параллельныя различнымъ разсматриваемымъ прямымъ; углы между ними, очевидно, будутъ такіе же, какъ и между нашими прямыми. Такимъ образомъ мы получимъ конусъ, производящій котораго соотвѣтствуютъ различнымъ значеніямъ переменнѣй  $\alpha$ . Если пересѣчь этотъ конусъ шаровою концентрическою поверхностью радіуса, равнаго единицѣ, то каждому значенію  $\alpha$  будетъ соотвѣтствовать точка кривой пересѣченія. Поэтому, разсматривая два бесконечно-близкихъ значенія этой переменнѣй,  $\alpha$  и  $\alpha + \delta$ , замѣтимъ, что соотвѣтствующія имъ точки  $M$  и  $M'$  на кривой относительно разстоянія того же порядка (§ 4), что и  $\delta$ , и слѣдовательно, въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ОММ'$  уголъ  $O$  такого же порядка, какъ и  $\delta$ , такъ какъ  $\sin \frac{O}{2} = \frac{MM'}{2}$ .

**§ 7.** Если точки какой-нибудь одной поверхности соотвѣтствуютъ точкамъ другой поверхности такимъ образомъ, что для точки, выбранной на одной изъ нихъ, найдется ей соотвѣтственная на другой поверхности вполне определенная, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на одной изъ поверхностей будетъ того же порядка, что и разстояніе между соотвѣтственными имъ точками на другой поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ двѣ точки  $A$  и  $B$  на первой поверхности и имъ соотвѣтственныя  $P$  и  $Q$  на второй поверхности. Предположимъ, что  $B$  приближается

къ  $A$  по нѣкоторой кривой на первой поверхности; въ такомъ случаѣ  $Q$  въ то же время будетъ приближаться къ  $P$  по соотвѣтственной кривой. Если мы обратимъ исключительно наше вниманіе на эти двѣ кривыя, то встрѣтимся съ случаемъ, уже разсмотрѣннымъ выше, и можемъ вывести изъ сказаннаго тамъ (§ 5), что разстоянія  $AB$  и  $PQ$ —безконечно-малыя одного порядка.

§ 8. Приведемъ теперь примѣръ безконечно-малой второго порядка. Разсмотримъ какую-нибудь плоскую кривую и касательную къ ней въ точкѣ  $M$ . Если изъ точки  $M'$ , взятой на кривой на безконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ точки  $M$ , опустимъ перпендикуляръ  $M'R$  на эту касательную, то  $M'R$  будетъ безконечно-малою второго порядка (черт. 1).



Черт. 1.

Прежде всего, разсматривая треугольникъ  $MM'R$ , не трудно замѣтить, что  $M'R$  есть безконечно-малая порядка выше перваго; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ треугольникѣ

$$\frac{M'R}{MM'} = \sin PMM',$$

и такъ какъ уголъ  $PMM'$ , очевидно, безконечно-малъ, а  $MM'$  — перваго порядка, то  $M'R$  есть безконечно-малая высшаго порядка (§ 1). Намъ остается доказать, что  $\sin PMM'$  или, что все равно, уголъ  $PMM'$  есть безконечно-малая перваго порядка, потому что тогда перпендикуляръ  $M'R$  явится произведеніемъ двухъ безконечно-малыхъ перваго порядка и, слѣдовательно, самъ будетъ второго порядка. Чтобы это доказать, разсмотримъ касательную къ данной кривой въ точкѣ  $M'$ . Пусть  $I$  обозначаетъ точку встрѣчи обѣихъ касательныхъ; называя черезъ  $\epsilon$  уголъ между этими двумя касательными, мы можемъ, очевидно, написать:

$$\epsilon = IMM' + IM'M,$$

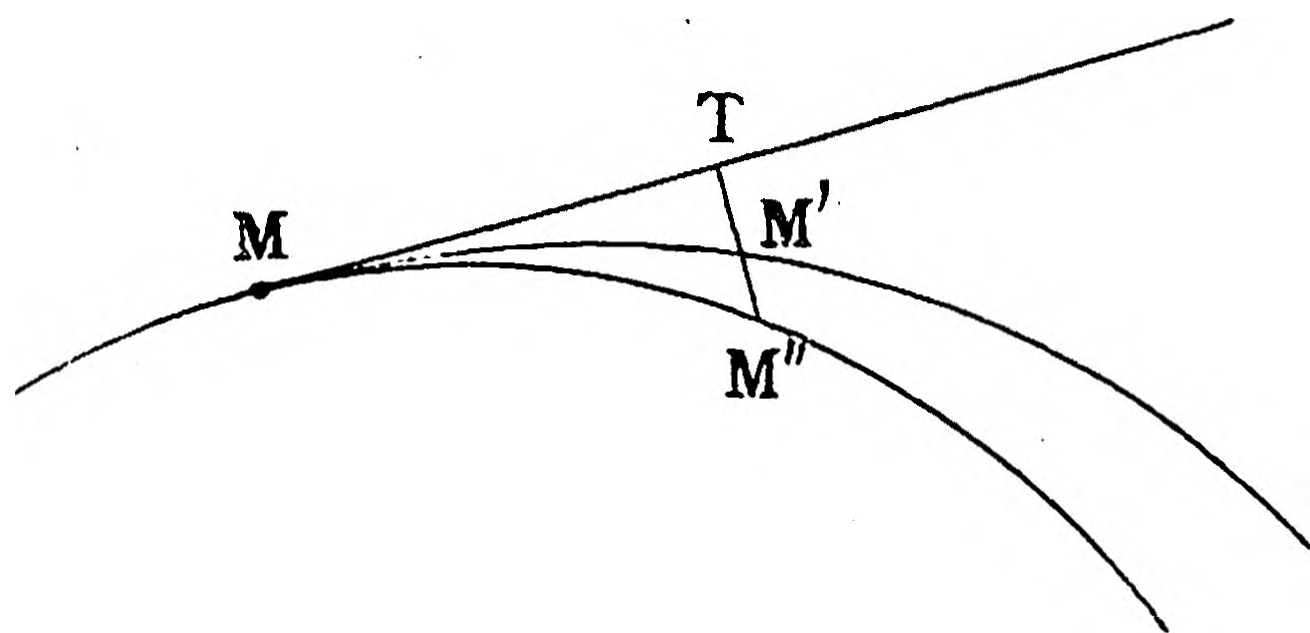
откуда слѣдуетъ, что  $\epsilon$  того же порядка, что и углы  $IMM'$  и  $IM'M$ ; поэтому достаточно установить, что уголъ  $\epsilon$  — перваго порядка, а это не трудно сдѣлать, основываясь на § 6-мъ. Въ самомъ дѣлѣ, направленіе касательной въ точкѣ  $M$  опредѣляется абсциссою точки  $M$ ; значитъ, если эта абсцисса увеличится на безконечно-малую величину перваго порядка, то касательная пойдетъ по новому направленію, образуя съ прежнимъ угломъ перваго порядка, равный точно величинѣ  $\epsilon$ .

Отмѣтимъ непосредственное слѣдствіе изъ предыдущаго предложенія. Если изъ нѣкоторой точки  $O$  опустить перпендикуляръ  $OP$  на прямую  $AB$  и затѣмъ соединить точку  $O$  съ точкою  $P'$  на той же прямой, отстоящей отъ точки  $P$  на безконечно-близкомъ разстояніи, то, принимая  $PP'$  за главную безконечно-малую, увидимъ, что разность  $OP' - OP$  будетъ второго порядка; дѣйствительно, она равна отрѣзку линіи  $OP'$ , заключенному между кругомъ, описаннымъ изъ точки  $O$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $OP$  и касательною  $PP'$  къ этому кругу.

§ 9. Это предложение справедливо и для кривых двойкой кривизны. Если въ точкѣ  $M$  нѣкоторой кривой двойкой кривизны провести касательную къ этой кривой, то разстояніе касательной до точки  $M'$ , находящейся на нашей кривой на бесконечно-близкомъ разстояніи отъ  $M$ , есть бесконечно-малая второго порядка относительно отрезка  $MM'$ , принимаемого за главную бесконечно-малую. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что разстояніе точки до прямой того же порядка, что и разстояніе между проеціями этой точки и прямой на произвольную плоскость. Поэтому, данную кривую можно замѣнить ея проеціею на нѣкоторую плоскость, не измѣняя порядка разсматриваемаго нами разстоянія, а это значитъ, что это разстояніе по теоремѣ, относящейся къ плоскимъ кривымъ, есть второго порядка.

§ 10. Геометрія даетъ намъ также простые примѣры бесконечно-малыхъ порядка выше второго.

Разсмотримъ какую-нибудь плоскую кривую и ея касательную въ точкѣ  $M$  (черт. 2). Если на этой касательной взять бесконечно-малую длину  $MT$  и возставить въ  $T$  перпендикуляръ  $TM'$ , пересѣкающій кривую въ  $M'$ , то  $TM'$  будетъ бесконечно-



Черт. 2.

малая второго порядка (§ 8); поэтому, полагая  $MT = h$ , мы можемъ написать:  $TM' = Kh^2$ , гдѣ  $K$  имѣетъ конечный предѣлъ при  $h$ , стремящемся къ нулю. Ведемъ теперь кругъ радіуса  $R$ , касательный въ  $M$  къ данной кривой и расположенный вмѣстѣ съ кривою по одну сторону отъ касательной. Продолжая линію  $TM'$  до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ  $M''$ , находимъ, по извѣстному свойству круга, что

$$TM'' = \frac{\overline{MT}^2}{2R - TM''} = \frac{h^2}{2R - TM''}$$

и, слѣдовательно,

$$M'M'' = TM'' - TM' = h^2 \left( \frac{1}{2R - TM''} - K \right).$$

Отсюда слѣдуетъ, что если опредѣлить  $R$  такимъ образомъ, чтобы  $\left( \frac{1}{2R - TM''} - K \right)$  въ предѣлѣ равнялось нулю, т.-е. если положить  $R = \frac{1}{2K_1}$ , гдѣ  $K_1$  есть предѣлъ  $K$ , то разстояніе  $M'M''$  будетъ бесконечно-малою порядка выше второго.

Итакъ, существуетъ въ каждой точкѣ плоской кривой такой касательный кругъ, который около точки касанія бесконечно болѣе близокъ къ кривой, чѣмъ касательная прямая. Этотъ кругъ, играющій большую роль при изученіи кривыхъ, называется соприкасающимся кругомъ.

Замѣчаніе. — Предыдущія теоремы могутъ быть неприменимы къ особеннымъ точкамъ; это бываетъ въ томъ случаѣ, если отношеніе  $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ , предѣлъ котораго

не может постоянно равняться нулю, может стремиться къ нулю при частномъ значеніи переменнѣй.

### ЗАМѢНА БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ

§ 11. Безконечно-малыя почти всегда употребляются, какъ посредствующія величины, и входятъ въ разсужденія то въ видѣ отношеній, имѣющихъ конечные предѣлы, то въ видѣ суммы безпредѣльно возрастающаго числа слагаемыхъ. Когда, такимъ образомъ, имѣется въ виду разысканіе предѣла отношенія или предѣла суммы, то часто вопросъ можно упростить при помощи слѣдующаго принципа:

*При разысканіи предѣла отношенія или предѣла суммы можно замѣнить одну безконечно-малую другою, отношеніе которой къ первой въ предѣлѣ равно единицѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha'$ ,  $\beta'$  двѣ пары такихъ безконечно-малыхъ, что

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha'} = 1, \quad \lim \frac{\beta}{\beta'} = 1.$$

Пишемъ тождество:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\beta'}{\beta};$$

имѣя въ виду, что  $\frac{\alpha}{\alpha'}$  и  $\frac{\beta}{\beta'}$  имѣютъ предѣломъ единицу, переходимъ къ предѣлу:

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Разсмотримъ теперь стремящуюся къ конечному предѣлу сумму

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \tag{A}$$

безконечно-малыхъ, число которыхъ  $n$  безпредѣльно увеличивается, по мѣрѣ того какъ онѣ сами стремятся къ нулю. Пусть  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  будутъ другія безконечно-малыя такія, что

$$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1, \quad \lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1, \dots, \quad \lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Докажемъ, что сумма (A) будетъ стремиться къ тому же предѣлу, что и сумма:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n. \tag{B}$$

Дѣйствительно, написавъ равенства:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1 + \varepsilon_1, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1 + \varepsilon_2, \dots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1 + \varepsilon_n,$$

гдѣ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ , по предположенію, безконечно-малыя, выводимъ изъ нихъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n.$$

Далѣе, обозначая черезъ  $\eta$  наибольшее по абсолютной величинѣ изъ количествъ:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  (само  $\eta$  — безконечно-мало), находимъ:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) < \eta(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n).$$

Во второй части неравенства первый множитель  $\eta$  стремится къ нулю, а второй множитель, по предположенію, имѣетъ конечный предѣлъ; значитъ, обѣ суммы, (A) и (B), имѣютъ одинъ и тотъ же предѣлъ.



§ 12. Чтобы двѣ безконечно-малыя  $\alpha$  и  $\beta$  могли замѣнять одна другую, достаточно, по предыдущему, чтобы предѣлъ отношенія  $\frac{\beta}{\alpha}$  былъ равенъ единицѣ; другими словами, достаточно, чтобы существовало равенство:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon,$$

гдѣ  $\varepsilon$  — безконечно-мало, или, что одно и то же, чтобы

$$\beta - \alpha = \alpha\varepsilon,$$

т.-е. чтобы разность  $\beta - \alpha$  была бы безконечно-малою относительно  $\alpha$ . Слѣдовательно, теорема § 11-го можетъ быть прочитана слѣдующимъ образомъ.

*При разысканіи предѣла отношенія или предѣла суммы двѣ безконечно-малыя  $\alpha$  и  $\beta$  можно замѣнить одна другою, не обращая вниманія на ихъ разность, лишь бы только эта разность была безконечно-малою относительно одной изъ нихъ.*

Эта теорема выражается различнымъ образомъ и имѣетъ большое примѣненіе въ исчисленіи безконечно-малыхъ.

#### УПОТРЕБЛЕНІЕ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ ПРИ РѢШЕНІИ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ.

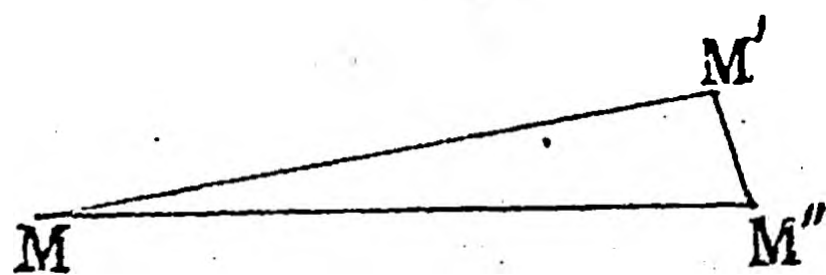
##### ОПРЕДѢЛЕНІЕ КАСАТЕЛЬНОЙ КЪ НѢКОТОРЫМЪ КРИВЫМЪ

§ 13. Мы покажемъ непосредственно пользу безконечно-малыхъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ геометрическихъ задачъ и сначала опредѣлимъ касательную къ нѣкоторымъ кривымъ.

Чтобы опредѣлить въ нѣкоторой точкѣ касательную къ кривой, необходимо, какъ извѣстно, соединить данную точку касанія съ какою-нибудь близъ лежащею точкою на той же кривой и отыскать предѣлъ направленія, къ которому стремится построенная такимъ образомъ хорда, по мѣрѣ того какъ вторая точка безпредѣльно приближается къ первой; короче говоря, нужно соединить данную точку касанія съ *безконечно ей близкою* точкою на кривой, при чемъ выраженіе *безконечно-близкій* достаточно для обозначенія безпредѣльнаго сближенія двухъ рассматриваемыхъ точекъ.

Слѣдующая теорема часто оказывается весьма полезною при опредѣленіи касательныхъ.

Если на кривой даны двѣ точки:  $M$  и  $M'$ , расположенная отъ  $M$  на безконечно-маломъ разстояніи перваго порядка, то предѣльное положеніе  $MM'$  не измѣнится, если



Черт. 3.

подставить на мѣсто точки  $M'$  другую точку  $M''$ , находящуюся внѣ кривой и отстоящую отъ точки  $M$  на безконечно-маломъ разстояніи высшаго порядка относительно перваго разстоянія.

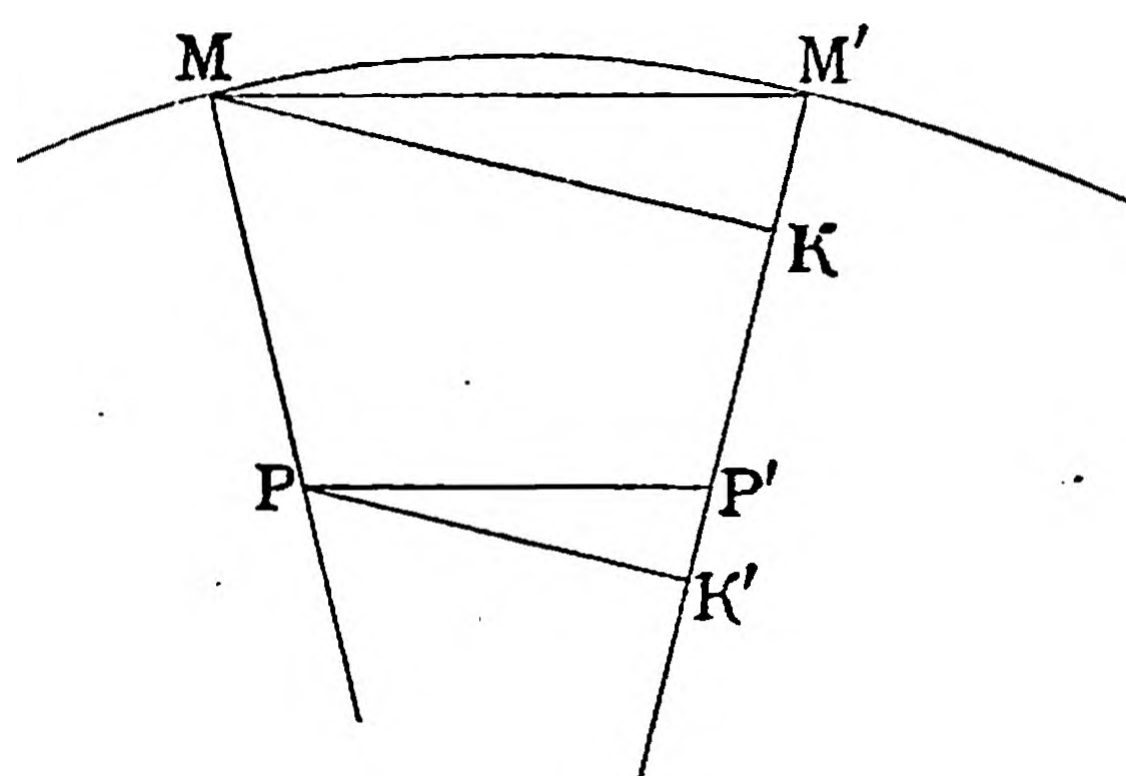




отсюда заключаемъ, что если поступить съ кривою, являющеюся геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $Q$ , такъ же, какъ мы поступили съ данною кривою, то получимъ эту послѣднюю, а это значитъ, что обѣ кривыя можно разсматривать, какъ сопряженныя.

**Задача III.** — На каждой нормали къ плоской кривой отъ точки ея встрѣчи съ кривою отложена постоянная длина; найти касательную къ геометрическому мѣсту концовъ этихъ длинъ.

Пусть  $M$  и  $M'$  (черт. 6) будутъ двѣ бесконечно-близкія точки на данной кривой, а  $P$  и  $P'$  соответственныя имъ точки, полученные вышеуказаннымъ путемъ, т.-е.



Черт. 6.

такія, что если  $MP$  и  $M'P'$  представляютъ нормали, то  $MP = M'P' = l$ . Соединяемъ  $M$  съ  $M'$  и  $P$  съ  $P'$  и опускаемъ изъ точекъ  $M$  и  $P$  перпендикуляры  $MK$  и  $PK'$  на  $M'P'$ ; тогда

$$KK' = MP \cos \varphi = l \cos \varphi,$$

гдѣ  $\varphi$  есть уголъ между двумя разсматриваемыми нормальми; слѣдовательно,

$$M'P' - KK' = M'K - P'K' = l(1 - \cos \varphi) = 2l \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Такъ какъ уголъ  $\varphi$  есть бесконечно-малая перваяго порядка (§ 6), то  $M'K - P'K'$  будетъ бесконечно-малою втораго порядка. Замѣчая же, что  $M'K = MM' \cos \angle MM'K$ , гдѣ  $MM'$  — бесконечно-малая перваяго порядка и уголъ  $\angle MM'K$  бесконечно-мало отличается отъ прямого, выводимъ, что  $M'K$  — бесконечно-малая порядка выше перваяго, а это показываетъ, что и бесконечно-малая  $P'K'$  — порядка выше перваяго, такъ какъ разность между нею и  $M'K$  — втораго порядка. Отсюда, на основаніи равенства:

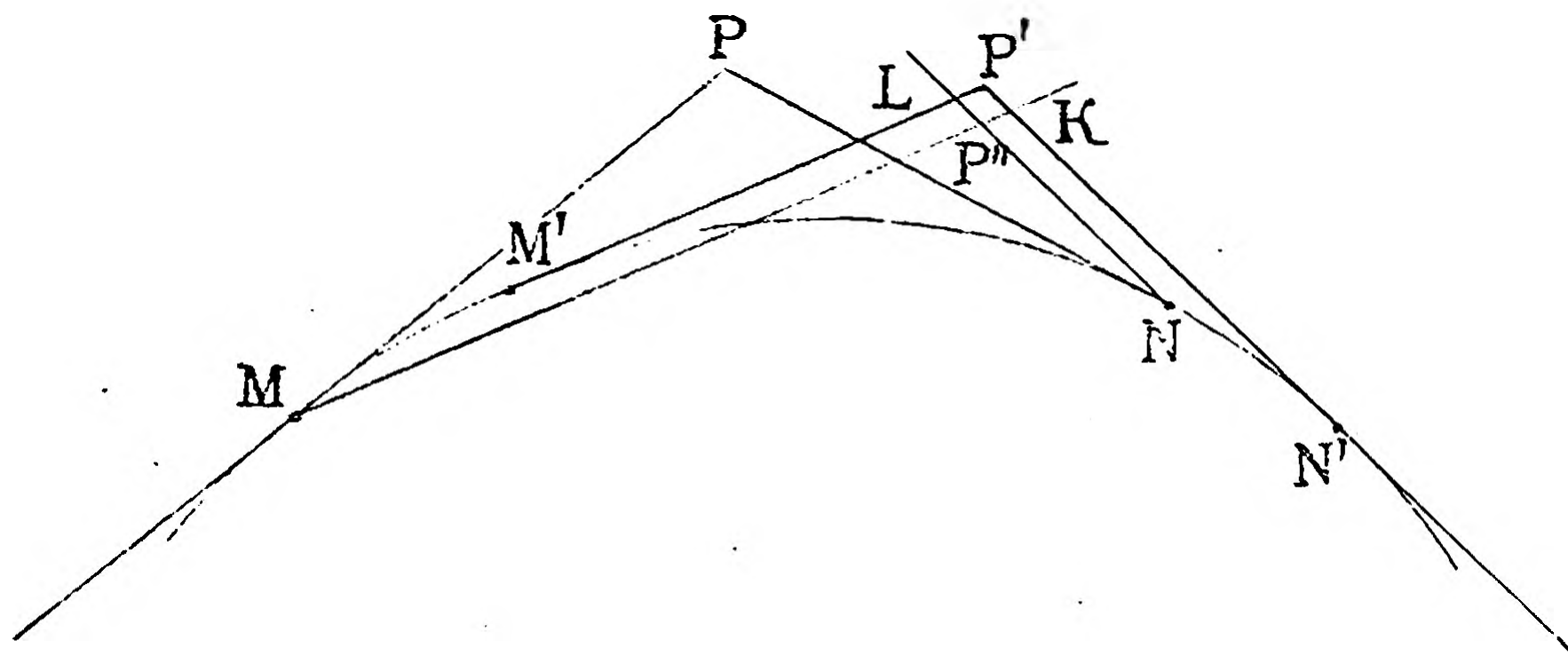
$$P'K' = PP' \cos \angle PP'K,$$

мы должны заключить, что или  $PP'$  — бесконечно-малая порядка выше перваяго, или что  $\angle PP'K$  бесконечно мало отличается отъ прямого угла. При первомъ предположеніи (§ 5) кривая приводится къ точкѣ и, слѣдовательно, линія  $MM'$  есть кругъ радіуса  $l$ . При второмъ предположеніи, которое, въ общемъ случаѣ, является единственно допустимымъ, т.-е. когда уголъ  $\angle PP'K$  стремится къ прямому,  $PP'$  обратится въ перпендикуляръ къ  $K'P'$  и, значитъ, къ линіи  $M'P'$ , которая въ предѣлѣ не отличается отъ  $MP$ ; слѣдовательно, касательная къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто точекъ  $P$ , будетъ параллельна касательной въ соответственной точкѣ на данной кривой, т.-е. обѣ кривыя будутъ имѣть однѣ и тѣ же нормали; ихъ называютъ *параллельными кривыми*.



**Задача IV.** — Около данной кривой описанъ уголъ постоянной величины; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто положеній его вершины.

Пусть  $P$  (черт. 7) одна изъ точекъ геометрическаго мѣста, а  $M$  и  $N$  — соответственныя точки касанія двухъ касательныхъ, пересекающихся въ точкѣ  $P$ ; пусть  $P'$  — вторая точка геометрическаго мѣста, бесконечно-близкая къ  $P$ , а  $M'$  и  $N'$  — точки касанія, соответствующія этой второй точкѣ. Такъ какъ координаты точки  $P$  суть опредѣленныя функціи отъ абсциссы точки  $M$ , то разстоянія  $PP'$  и  $MM'$  будутъ (§ 5) бесконечно-малыми одного и того же порядка; примемъ ихъ за бесконечно-малыя перваго порядка. Ведемъ теперь черезъ точки  $M$  и  $N$  линіи, параллельныя ка-



Черт. 7.

сательнымъ въ  $M'$  и  $N'$ , — получимъ параллелограммъ  $P''KP'L$ , стороны котораго суть бесконечно-малыя втораго порядка (§ 8), и потому мы можемъ (§ 13) подставить вмѣсто  $P'$  противоположную вершину  $P''$  этого параллелограмма. Наконецъ, принимая во вниманіе, что  $P$  и  $P''$  расположены на сегментѣ, вмѣщающемъ уголъ  $P$  и описанномъ на  $MN$ , какъ на хордѣ, и что  $PP''$  въ предѣлѣ есть касательная къ этому сегменту, заключаемъ, что искомая кривая имѣетъ въ точкѣ  $P$  ту же самую касательную, что и этотъ сегментъ, описанный около треугольника  $MNP$ .

**Задача V.** — Провести касательную къ циклоидѣ.

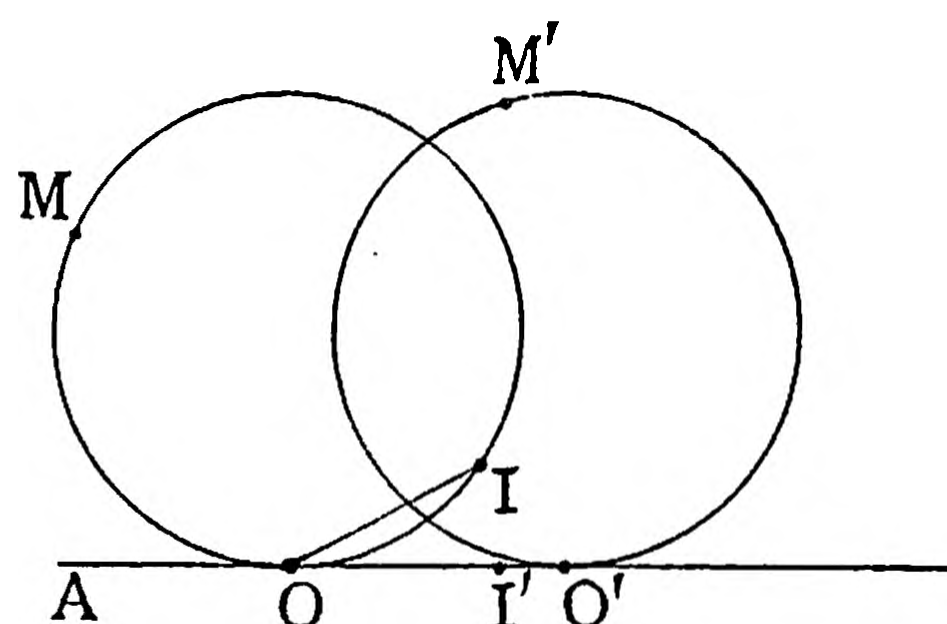
Циклоида представляетъ весьма замѣчательную кривую; мы часто будемъ ею пользоваться, какъ примѣромъ, при приложеніи общихъ методовъ. Начнемъ съ ея опредѣленія.

Циклоиду описываетъ точка окружности, катящейся безъ скольженія по одной изъ своихъ касательныхъ, остающейся все время неподвижною \*).

Пусть  $OM$  (черт. 8) есть положеніе производящаго круга и  $M$  положеніе точки, описывающей циклоиду. Разсмотримъ кругъ въ смежномъ положеніи  $O'M'$ , при чемъ точка  $M$  переходитъ въ точку  $M'$  и дуга  $OI$ , коснувшись прямой послѣдовательно всѣми своими точками, будетъ равна отрѣзку  $OO'$ ; такимъ образомъ, этотъ послѣдній

\*) Говорятъ, что подвижная кривая катится безъ скольженія по неподвижной линіи, если эта кривая перемѣщается, оставаясь постоянно касательною къ неподвижной линіи и притомъ касаясь этой послѣдней своими различными точками такимъ образомъ, что каждая дуга подвижной кривой равна по длинѣ той дугѣ неподвижной линіи, которая пройдева точками окружности. На основаніи законовъ физики, приводятъ которые здѣсь не мѣсто, мы говоримъ, что колесо кареты катится почти безъ скольженія, и если дорога прямолинейна, то кривая, описываемая какою-нибудь точкою колеса, будетъ циклоидою.

равенъ разности  $O'M' - OM$ . Точка  $I$  окружности  $MOI$  должна при движеніи перейти въ точку  $O'$ , такъ какъ она является точкою касанія прямой и круга; можно заставить окружность  $MO$  перейти изъ первоначальнаго положенія въ новое положеніе  $O'M'$  при помощи трехъ послѣдовательныхъ движеній:



Черт. 8.

1. Вращеніе вокругъ первоначальной точки касанія  $O$ , при чемъ уголъ вращенія  $IOO'$  таковъ, что точка  $I$  перемѣстится въ  $I'$  на прямой  $OO'$ .

2. Вслѣдствіе этого перваго движенія подвижная окружность станетъ пересѣкать прямую  $AOO'$  и дастъ на ней хорду  $O'I'$ ; вращеніе около точки  $I'$ , равное первому, сдѣлаетъ окружность снова касательною къ этой прямой.

3. Наконецъ, чтобы привести подвижную окружность въ желаемое положеніе, достаточно заставить всѣ ея точки перемѣститься на разстоянія, равныя и параллельныя отрезку  $I'O'$ ; тогда точка, находившаяся первоначально въ  $I$ , перейдетъ въ  $O'$  и станетъ, очевидно, точкою касанія прямой и круга.

Итакъ, точка  $M$ , чтобы занять на циклоидѣ смежное положеніе  $M'$ , должна будетъ пройти двѣ дуги круга, вмѣщающихъ одинъ и тотъ же уголъ, соотвѣтственно около центровъ  $O$  и  $I'$ , и прямую, равную и параллельную  $I'O'$ .

Эта послѣдняя прямая  $I'O'$ , равная разности между бесконечно-малою дугою и ея хордою, есть бесконечно-малая третьяго порядка \*) и, слѣдовательно, не вліяетъ (§ 13) на предѣльное направленіе  $MM'$ .

Что же касается до обѣихъ дугъ круга, то такъ какъ нормали ихъ направлены къ двумъ бесконечно-близкимъ точкамъ  $O$  и  $I'$ , то уголъ между ними стремится къ нулю, и линія, соединяющая первый конецъ одной изъ нихъ со вторымъ концомъ другой, въ предѣлѣ обратится въ перпендикуляръ къ общей нормали, т.-е. совпадетъ съ линіею  $MO$ .

Итакъ, нормаль къ циклоидѣ направлена въ точку касанія производящаго круга и прямой, по которой онъ катится.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 15. Плоскостью касательною къ поверхности въ нѣкоторой точкѣ называется такая плоскость, на которой лежатъ касательныя въ этой точкѣ ко всѣмъ кривымъ,

\*) Въ Тригонометріи доказывается, что разность между дугою и ея синусомъ меньше шестой части куба этой дуги и что разность между дугою и ея хордою равна удвоенному избытку половины дуги надъ соотвѣтственнымъ синусомъ.

нанесеннымъ на данной поверхности. Докажемъ сначала существованіе такой плоскости. Пусть  $M$  будетъ точка на данной поверхности, а  $MP$  и  $MQ$  двѣ какія-нибудь кривыя, пересѣкающіяся на этой поверхности въ точкѣ  $M$ . Въ такомъ случаѣ касательныя къ этимъ кривымъ въ точкѣ  $M$  находятся въ одной и той же плоскости съ касательною въ той же точкѣ къ третьей кривой  $MR$ , проведенной произвольно на той же поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ эту третью кривую  $MR$ , какъ предѣльное положеніе такой кривой  $R'R''$ , которая, постоянно находясь на данной поверхности и пересѣкая  $MP$  и  $MQ$  соответственно въ  $A$  и  $B$ , приближается непрерывно къ своему предѣльному положенію  $MR$ . Прямыя  $MA$ ,  $MB$  и  $AB$  лежатъ всегда въ одной плоскости, проходящей черезъ три точки  $M$ ,  $A$  и  $B$ ; поэтому, и ихъ предѣльныя направленія будутъ въ той же плоскости. А такъ какъ предѣльное направленіе  $MA$  есть касательная къ кривой  $MP$ , предѣльное направленіе  $MB$  есть касательная къ кривой  $MQ$ , а  $AB$ , соединяющая двѣ бесконечно-близкія точки кривой  $R'R''$ , будетъ касательною къ этой кривой въ предѣлѣ, т.-е. къ кривой  $MR$ , то теорема, такимъ образомъ, и доказана. Однако не трудно замѣтить, что могутъ быть исключенія для нѣкоторыхъ точекъ, такъ какъ линія, соединяющая двѣ бесконечно-близкія точки кривой, можетъ и не быть касательною, если одна изъ этихъ точекъ не вполне опредѣленная; слѣдовательно, линія  $AB$  въ предѣлѣ не всегда окажется касательною къ  $MR$ . Подобное исключеніе не лишаетъ, конечно, доказательства силы, потому что въ тѣхъ отдѣльныхъ случаяхъ, когда теорема не оправдывается, изъ самаго доказательства легко усматривается возможность такихъ случаевъ.

§ 16. Плоскость касательная къ поверхности  $S$  находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ всякой точки  $M'$ , находящейся на той же поверхности и расположенной на бесконечно-маломъ разстояніи первого порядка отъ точки касанія  $M$ . Въ самомъ дѣлѣ, если провести плоскость  $P$  черезъ прямую  $MM'$  перпендикулярно къ касательной плоскости въ точкѣ  $M$ , то эта плоскость пересѣчетъ поверхность  $S$  по кривой  $MM'$  и разстояніе точки  $M'$  до касательной плоскости въ точкѣ  $M$ , очевидно, будетъ то же, что и разстояніе до касательной къ этой кривой  $MM'$ ; значитъ (§ 8), оно будетъ бесконечно-малою второго порядка.

§ 17. Чтобы опредѣлить плоскость касательную къ поверхности въ точкѣ  $M$  на этой поверхности, необходимо разсматривать одновременно съ этою точкою  $M$  двѣ другія бесконечно-близкія точки  $N$  и  $P$  и искать предѣлъ для плоскости  $MNP$ . Дѣйствительно,  $MN$  и  $MP$  въ предѣлѣ будутъ касательными къ двумъ кривымъ, проведеннымъ на данной поверхности черезъ точку  $M$  и, слѣдовательно, плоскость, проходящая чрезъ нихъ, будетъ плоскостью, касательною въ точкѣ  $M$ .

Замѣтимъ, что точно такъ же, какъ и въ § 13-мъ, можно точки  $N$  и  $P$ , расположенныя отъ  $M$  на бесконечно-малыхъ разстояніяхъ первого порядка, замѣнить другими точками  $N'$  и  $P'$ , если разстоянія  $NN'$  и  $PP'$  — бесконечно-малыя высшаго порядка. Такая подстановка, не измѣняя предѣльнаго направленія прямыхъ  $MN$  и  $MP$ , не измѣнитъ также предѣльнаго положенія плоскости  $MNP$ .

**Задача I.**—Изъ нѣкоторой точки  $O$  опущены перпендикуляры на плоскости, касательныя къ данной поверхности; найти плоскость, касательную къ геометрическому мѣсту оснований этихъ перпендикуляровъ.

Пусть  $OP$  будетъ перпендикуляръ, опущенный изъ точки  $O$  на плоскость, ка-



сательную въ точкѣ  $A$ , а  $OQ$  и  $OR$  — перпендикуляры, опущенные изъ той же точки  $O$  на плоскости, касательныя соответственно въ точкахъ  $B$  и  $C$ , бесконечно-близкихъ къ  $A$ . На рассматриваемой поверхности три точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  будутъ бесконечно-близкими, и плоскость, проходящая черезъ нихъ, въ предѣлѣ явится искомою касательною плоскостью.

Если разстоянія  $AB$  и  $AC$  — бесконечно-малыя перваго порядка, то такими же бесконечно-малыми (§ 7) будутъ и разстоянія  $PQ$  и  $PR$ , а слѣдовательно, можно точки  $Q$  и  $R$  замѣнить другими  $Q_1$  и  $R_1$ , если  $QQ_1$  и  $RR_1$  — бесконечно-малыя втораго порядка.

Мы получимъ эти точки  $Q_1$  и  $R_1$ , если проведемъ черезъ точку  $A$  плоскости, параллельныя плоскостямъ, касательнымъ въ  $B$  и  $C$ , и опустимъ на эти плоскости перпендикуляры  $OQ_1$  и  $OR_1$ . Дѣйствительно (§ 16), каждая изъ этихъ новыхъ плоскостей находится на бесконечно-маломъ разстояніи втораго порядка отъ той касательной плоскости, параллельно которой она проведена, и общій перпендикуляръ къ этимъ плоскостямъ пересѣчетъ ихъ въ двухъ точкахъ, которыя можно замѣнять одна другою; слѣдовательно, искомая касательная плоскость есть предѣлъ плоскости  $PQ_1R_1$ , когда точки  $Q_1$  и  $R_1$  бесконечно приближаются къ точкѣ  $P$ . Принимая же во вниманіе, что геометрическимъ мѣстомъ оснований перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки  $O$  на всевозможныя плоскости, проведенныя черезъ точку  $A$ , есть шаровая поверхность, описанная на  $OA$ , какъ на діаметрѣ, а плоскость  $PQ_1R_1$ , проведенная черезъ три бесконечно-близкія точки на этой поверхности, есть касательная къ ней въ предѣлѣ, заключаемъ, что искомая касательная плоскость касательна въ точкѣ  $P$  къ шаровой поверхности, описанной на  $OA$ , какъ на діаметрѣ.

**Задача II.** — Изъ некоторой неподвижной точки  $O$  опущены перпендикуляры на плоскости, касательныя къ данной поверхности, и каждый перпендикуляръ  $OP$  продолженъ до такой точки  $Q$ , что произведеніе  $OP \cdot OQ$  равно данному квадрату  $a^2$ ; найти плоскость, касательную къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $Q$ .

Разсуждая совершенно такъ же, какъ въ предыдущей задачѣ, найдемъ, что искомая касательная въ точкѣ  $Q$  плоскость перпендикулярна къ прямой  $OA$ , соединяющей точку  $O$  съ точкою касанія той касательной плоскости, къ которой  $OQ$  перпендикулярна, и притомъ пересѣкаетъ прямую  $OA$  въ такой точкѣ  $B$ , что  $OA \cdot OB = a^2$ . Такимъ образомъ, данная поверхность и поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $Q$ , могутъ замѣнять одна другую, т.-е. если мы поступимъ со второю поверхностью такъ же, какъ съ первою, то получимъ эту послѣднюю; такія поверхности называются сопряженными.

Мы не станемъ приводить подробно всѣхъ разсужденій, не представляющихъ никакого затрудненія для тѣхъ, кто хорошо понялъ начало этой главы.

**Задача III.** — Дана поверхность  $S$  и построена другая поверхность  $S'$  такая, каждая точка которой связана съ соотвѣтственною ей касательною плоскостью къ поверхности  $S$  по одному определенному закону. Найти плоскость касательную въ некоторой точкѣ къ поверхности  $S'$ .

Пусть  $A$  есть точка на поверхности  $S$ ,  $MN$  — касательная плоскость въ этой точкѣ и  $P$  — точка на поверхности  $S'$ , связанная съ плоскостью  $MN$  по определенному закону.



Искомая касательная плоскость проходитъ черезъ точку  $P$  и черезъ двѣ точки,  $Q$  и  $R$ , связанныя по тому же закону, какъ и точка  $P$ , съ плоскостями, касательными къ поверхности  $S$  въ двухъ точкахъ  $B$  и  $C$ , бесконечно-близкихъ къ  $A$ . Въмѣсто этихъ плоскостей, касательныхъ въ точкахъ  $B$  и  $C$ , можно взять плоскости, имѣ параллельныя, проведенныя черезъ точку  $A$  и находящіяся отъ первыхъ (§ 16) на бесконечно-малыхъ разстояніяхъ второго порядка, и замѣнить  $Q$  и  $R$  точками  $Q_1$  и  $R_1$ , соотвѣтствующими этимъ новымъ плоскостямъ. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что координаты какой-нибудь изъ этихъ точекъ при какомъ-угодно построеніи зависятъ отъ коэффициентовъ уравненія той плоскости, съ которой эта точка связана, и что если эти коэффициенты измѣняются на бесконечно-малую величину второго порядка, то и соотвѣтственное измѣненіе координатъ будетъ бесконечно-малая того же порядка (§ 2).

А такъ какъ  $P$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  — три бесконечно-близкія точки, расположенныя на поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ, связанныхъ однимъ и тѣмъ же опредѣленнымъ построеніемъ со *всѣми* плоскостями, проведенными черезъ точку  $A$ , то искомая касательная плоскость есть не что иное, какъ касательная плоскость къ этой послѣдней поверхности.

Отсюда видно, что плоскость, касательная къ поверхности  $S'$ , можетъ быть опредѣлена при помощи замѣны касательныхъ плоскостей къ поверхности  $S$  плоскостями, проходящими черезъ неподвижную точку. Такая замѣна устраняетъ всѣ трудности, проистекающія отъ бѣльшей или меньшей сложности данной поверхности.

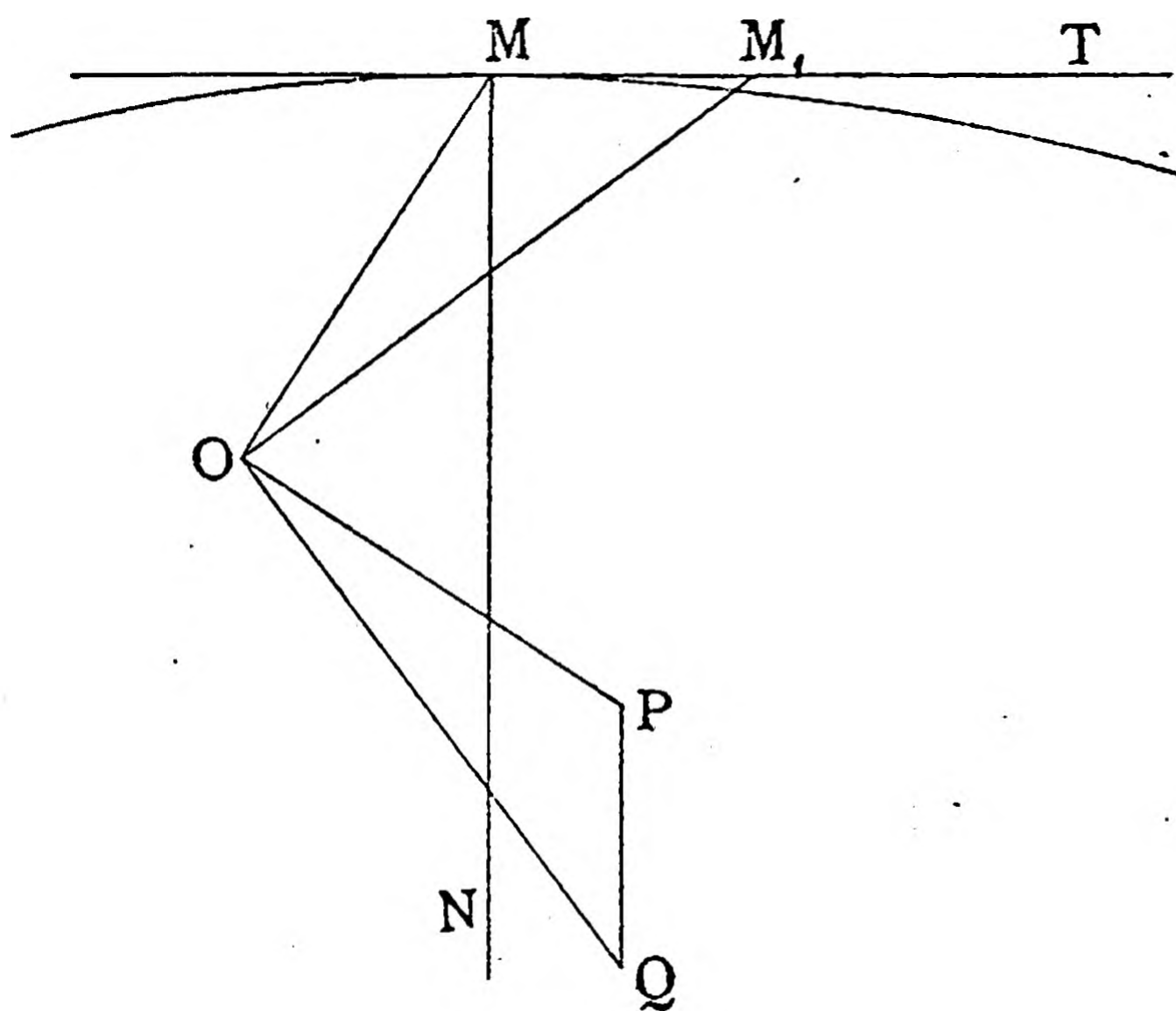
Это общее замѣчаніе содержитъ въ себѣ неявно рѣшеніе I и II задачъ и множества другихъ въ томъ же родѣ. Не мѣшаетъ всякій разъ имѣть въ виду, что совершенно произвольное построеніе, при помощи котораго получаютъ точки разсматриваемаго геометрическаго мѣста, не должно, однако, зависѣть отъ положенія точки касанія.

Если опустить, напр., изъ точки  $O$  перпендикуляръ  $OP$  на плоскость, касательную къ данной поверхности, и отложить на этомъ перпендикулярѣ длину  $OQ$ , равную разстоянію  $OM$  точки  $O$  до точки касанія, то плоскость, касательная къ геометрическому мѣсту построенныхъ такимъ образомъ точекъ  $Q$ , не можетъ быть получена по предыдущему способу, такъ какъ положеніе точки  $Q$  зависитъ не только отъ положенія касательной плоскости, служащей для ея опредѣленія, но также и отъ положенія точки  $M$ , въ которой эта плоскость касается поверхности.

**Задача IV.**—Изъ неподвижной точки  $O$  проведенъ къ некоторой точкѣ  $M$  на данной поверхности  $S$  радиусъ векторъ  $OM$  (черт. 9), черезъ точку  $M$  проведена нормаль  $MN$  къ поверхности  $S$  и черезъ точку  $O$ , въ плоскости  $OMN$ , проведена прямая  $OP$ , перпендикулярная къ  $OM$  и равная ей по длинѣ. Найти плоскость, касательную къ поверхности  $S$ , служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $P$ .

Пусть  $MT$  есть проэкція  $OM$  на плоскость, касательную къ поверхности  $S$  въ точкѣ  $M$ . Эта линія, очевидно, касательна къ кривой пересѣченія поверхности  $S$  плоскостью  $OMN$ . Предположимъ, что точка  $M$  перемѣщается по этой кривой; въ такомъ случаѣ можно допустить, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, что она перейдетъ въ точку  $M_1$ , расположенную на  $MT$ . Если бы нормаль въ  $M_1$  къ поверхности  $S$  находилась въ плоскости  $OMN$ , то соотвѣтственная точка поверхности  $S$  лежала бы въ той же самой плоскости и была бы концомъ прямой  $PQ$ , пер-

пендикулярной къ  $MM_1$  и равной ей по длинѣ. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что треугольники  $OMM_1$  и  $OPQ$  были бы равны и имѣли бы взаимно-перпендикулярныя стороны. А такъ какъ обѣ точки  $M$  и  $M_1$  расположены на поверхности  $S$ , на бесконечно-маломъ разстояніи первого порядка одна отъ другой, то нормаль въ  $M_1$  составитъ какъ съ нормалью въ  $M$ , такъ и съ плоскостью  $OMN$ , вообще, бесконечно-малый уголъ первого порядка; такимъ образомъ точка  $P_1$  поверхности  $\Sigma$ , соответствующая  $M_1$ , не совпадетъ съ  $Q$ : она получится, если возставитъ къ  $OM_1$  перпендикуляръ въ плоскости, проходящей черезъ  $OM_1$  и образующей съ плоскостью  $OMNPQ$  бесконечно-малый



Черт. 9.

уголъ, и отложить на этомъ перпендикулярѣ  $OP_1 = OM_1$ . Ясно, что для полученія этой прямой достаточно повернуть  $OQ$ , не измѣняя ея длины, на бесконечно-малый уголъ вокругъ  $OM_1$ ; при этомъ вращеніи точка  $Q$  опишетъ бесконечно-малую дугу круга  $QP_1$ , которая можетъ быть замѣнена, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, ея тангенсомъ, перпендикулярнымъ къ плоскости  $QPOMM_1$ ; слѣдовательно, плоскость  $P_1QR$  перпендикулярна къ  $MT$ , а, значитъ, перпендикулярна къ  $MT$  и линія  $PP_1$ , которая, соединяя двѣ бесконечно-близкія точки поверхности  $\Sigma$ , есть касательная къ этой поверхности.

Докажемъ, что какая-нибудь вторая касательная къ поверхности  $\Sigma$  перпендикулярна къ  $MT$ .

Чтобы найти эту вторую касательную, предположимъ, что точка  $M$  перемѣщается по поверхности  $S$  и приходитъ въ точку  $M_2$ , служащую концомъ перпендикуляра  $MM_2$  бесконечно-малой длины, возставленнаго въ  $M$  къ плоскости  $OMM_1$ . Пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, можно допустить, что опредѣленная такимъ образомъ точка  $M_2$  принадлежитъ поверхности  $S$ , потому что линія  $MM_2$ , будучи перпендикулярна къ плоскости  $OMN$ , перпендикулярна также къ нормали  $MN$  и, значитъ, расположена въ касательной плоскости.

Чтобы построить точку поверхности  $\Sigma$ , соответствующую  $M_2$ , нужно соединить точку  $O$  съ  $M_2$  и возставить къ  $OM_2$  въ точкѣ  $O$ , въ неизвѣстной плоскости, проходящей черезъ  $OM_2$  и черезъ нормаль  $M_2N_2$  къ поверхности  $S$ , перпендикуляръ, равный по длинѣ  $OM_2$ . Каково бы ни было неизвѣстное направленіе нормали  $M_2N_2$ ,

этотъ перпендикуляръ, который мы назовемъ черезъ  $OP_2$ , расположенъ въ плоскости  $\Pi$ , проведенной черезъ точку  $O$  перпендикулярно къ  $OM_2$ ; далѣе, эта плоскость содержитъ  $OP$  и образуетъ съ плоскостью  $ROM$  уголъ, бесконечно-мало отличающійся отъ прямого; сверхъ того (§ 8), пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, имѣемъ:

$$OM_2 = OM,$$

и, слѣдовательно,

$$OP_2 = OP.$$

Такимъ образомъ точки  $P_2$  и  $P$  лежатъ на окружности круга, описаннаго изъ точки  $O$ , какъ изъ центра, въ плоскости  $\Pi$ ; значитъ, бесконечно-малая линія  $PP_2$  есть, въ этой плоскости, перпендикуляръ къ радіусу  $OP$ , и такъ какъ плоскость  $\Pi$  образуетъ съ плоскостью  $ROM$  уголъ, бесконечно-мало отличающійся отъ прямого, то направленіе  $PP_2$  въ предѣлѣ перпендикулярно къ плоскости  $ROM$  и, слѣдовательно, перпендикулярно къ  $MT$ , что мы и высказали выше.

Итакъ, мы нашли двѣ касательныя къ поверхности  $\Sigma$ , перпендикулярныя къ  $MT$ ; поэтому, искомая касательная плоскость, проходящая чрезъ нихъ, также перпендикулярна къ  $MT$ .

Въ заключеніе можно сдѣлать одно любопытное замѣчаніе. Двѣ поверхности  $S$  и  $\Sigma$  могутъ замѣнять одна другую; иначе говоря, если мы рассмотримъ поверхность  $\Sigma$  какъ данную и поступимъ съ нею такъ же, какъ поступили съ поверхностью  $S$ , то получимъ эту послѣднюю. Въ самомъ дѣлѣ, ведя радіусъ векторъ  $OP$  и черезъ точку  $P$  нормаль къ поверхности  $\Sigma$ , замѣтимъ, что эта нормаль параллельна  $MT$  и что, поэтому, плоскость, проходящая черезъ эти двѣ линіи, есть какъ-разъ плоскость  $ROM$ ; значитъ, перпендикуляръ въ этой плоскости къ  $OP$  въ точкѣ  $M$  есть  $OM$ , и если мы отложимъ на немъ длину, равную  $OP$ , то получимъ точку  $M$ .

#### Длина дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ

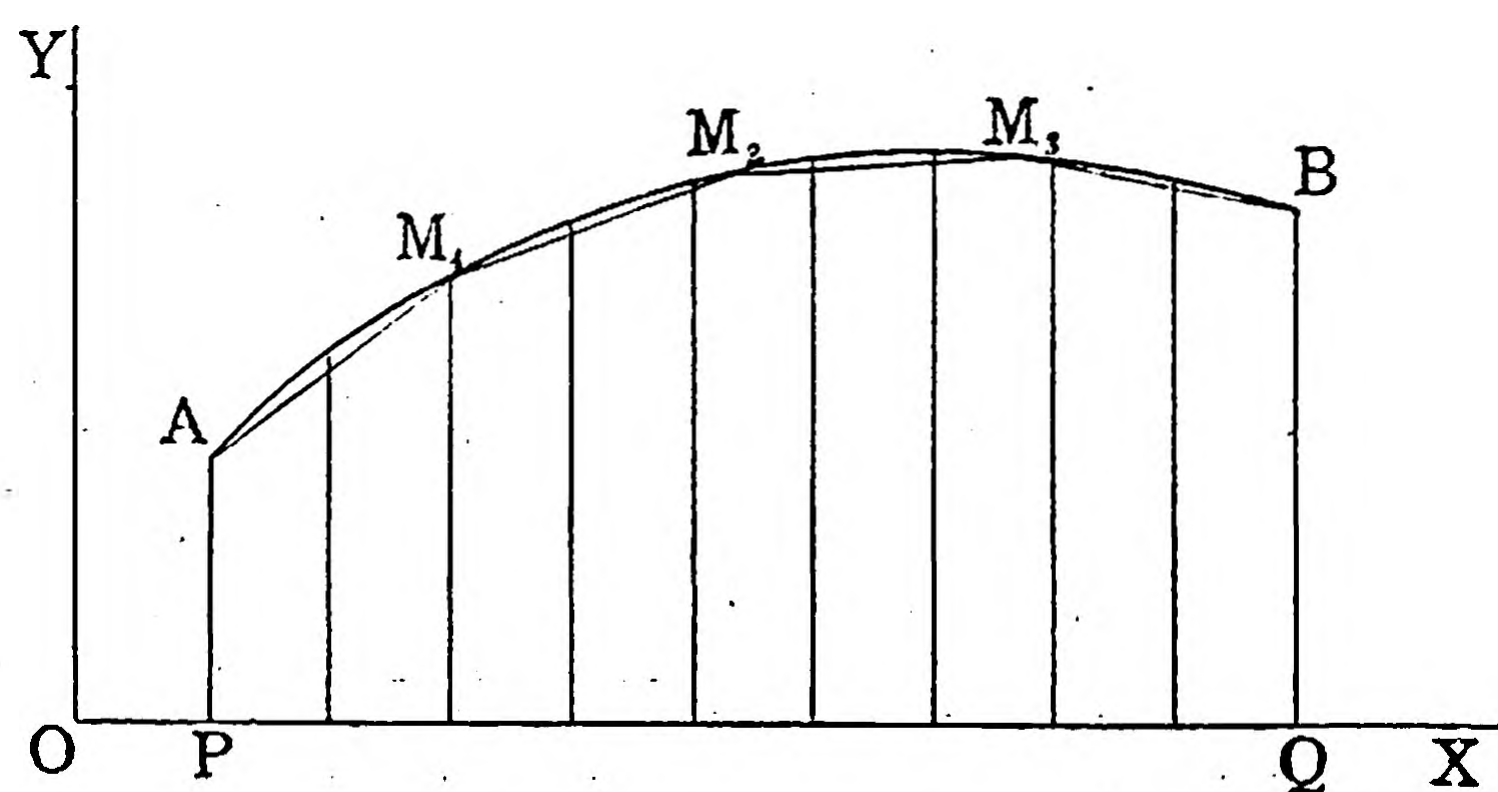
§ 18. При вычисленіи суммы бесконечно-малыхъ можно, не измѣняя предѣла (§ 11), отбрасывать бесконечно малыя порядка высшаго, чѣмъ каждая изъ разсматриваемыхъ величинъ. Этотъ принципъ часто употребляется въ исчисленіи бесконечно-малыхъ. Приложимъ его къ опредѣленію длины дугъ нѣкоторыхъ кривыхъ.

Разсмотримъ длину дуги нѣкоторой кривой, какъ предѣлъ, къ которому приближается периметръ вписаннаго многоугольника при безпредѣльномъ уменьшеніи его сторонъ. Не трудно замѣтить, что такое опредѣленіе вполне справедливо и что предѣлъ не зависитъ отъ закона, по которому увеличивается число сторонъ вписаннаго многоугольника.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $AB$  (черт. 10) есть дуга нѣкоторой кривой. Отнесемъ ее къ двумъ прямоугольнымъ осямъ  $OX$ ,  $OY$  и раздѣлимъ на бесконечно-большое число равныхъ частей отрезокъ  $PQ$  оси  $X$ -овъ, на которую она проектирована. Если вписать въ дугу  $AB$  два различныхъ многоугольника, но оканчивающихся оба въ точкахъ  $A$  и  $B$ , то предѣлы периметровъ этихъ многоугольниковъ будутъ равны, потому что отношеніе бесконечно-малыхъ частей между двумя параллелями оси  $Y$ -овъ, проведенными черезъ двѣ послѣдовательныя точки дѣленія, въ предѣлѣ равно еди-



ницѣ. Дѣйствительно, эти двѣ бесконечно-малыя части многоугольниковъ имѣютъ однѣ и тѣ же проэкціи на оси  $X$ -овъ и каждая изъ этихъ проэкцій, очевидно, равна суммѣ проэктированныхъ длинъ, умноженной на нѣкоторое среднее значеніе косинусовъ угловъ, образуемыхъ съ осью различными сторонами или частями сторонъ, составляющими рассматриваемую часть периметра; углы же эти бесконечно-мало отли-



Черт. 10.

чаются отъ угловъ, образуемыхъ съ осью касательными, проведенными въ соответственной точкѣ дуги  $AB$ . Итакъ, отношеніе длинъ, которыя, будучи умножены хотя и на конечные косинусы, но между собою различающіеся на бесконечно-малую величину, даютъ одно и то же произведеніе, въ предѣлѣ, очевидно, равно единицѣ.

§ 19. Разность между дугою нѣкоторой кривой и ея хордою, на основаніи предыдущаго, есть бесконечно-малая третьяго порядка, когда самая дуга принимается за бесконечно-малую перваго порядка.

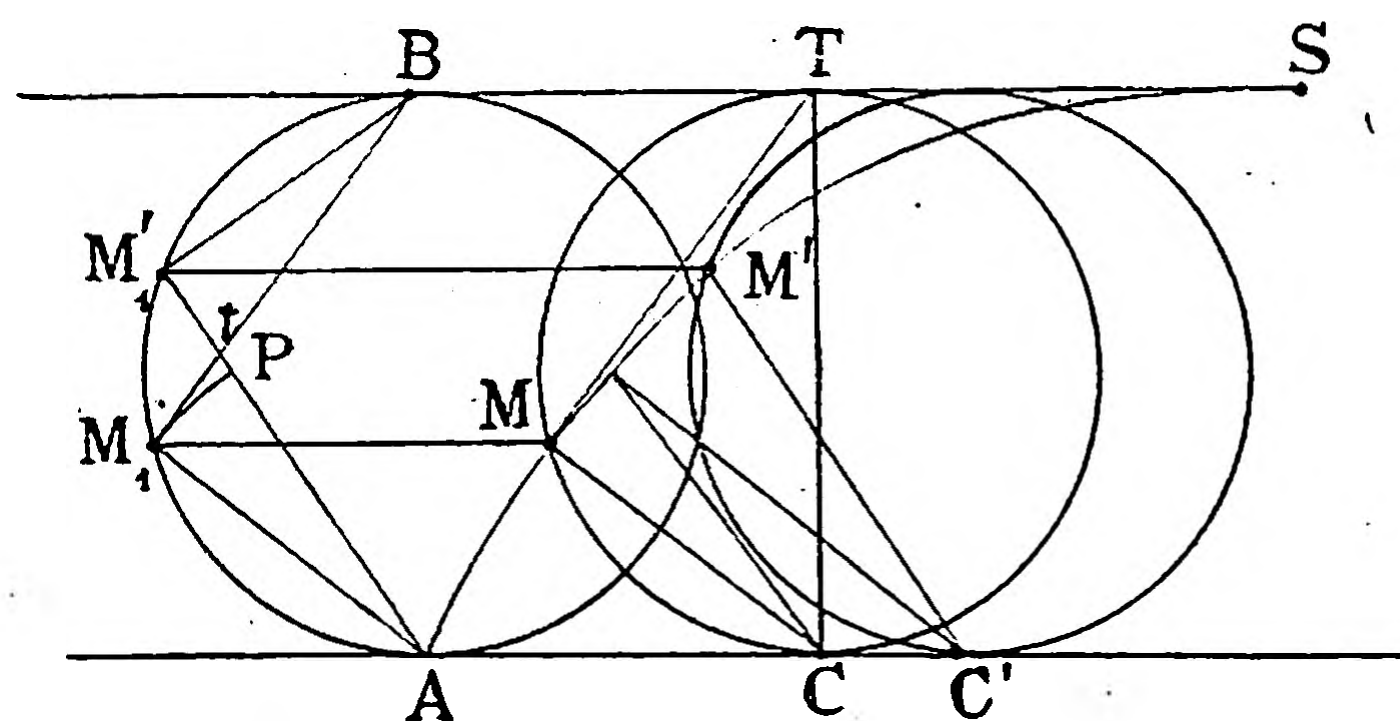
Чтобы доказать это, рассмотримъ бесконечно-малую дугу  $AMB$  и ея хорду  $AB$ . Дуга  $AMB$ , по опредѣленію, есть предѣлъ вписаннаго многоугольника, число сторонъ котораго возрастаетъ безпредѣльно. Если спроектировать каждую изъ этихъ сторонъ на хорду  $AB$ , то сумма проэкцій будетъ сама хорда  $AB$ ; но такъ какъ проэкція каждой стороны равна длинѣ этой стороны, умноженной на косинусъ угла, образуемаго ею съ  $AB$ , и такъ какъ этотъ уголъ есть бесконечно-малая перваго порядка и, слѣдовательно, разность между его косинусомъ и единицею есть бесконечно-малая второго порядка, что, очевидно, вытекаетъ изъ формулы  $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$ , то, замѣняя вписанный многоугольникъ его проэкціею  $AB$ , мы слѣлаемъ ошибку, равную суммѣ его сторонъ, умноженныхъ соответственно на бесконечно-малыя второго порядка. Итакъ, эта ошибка равна бесконечно-малому периметру многоугольника, умноженному на нѣкоторую среднюю величину изъ бесконечно-малыхъ второго порядка; значитъ, сама она есть бесконечно-малая третьяго порядка.

§ 20. Дуга циклоиды. — Разсужденія, съ помощію которыхъ мы сумѣемъ опредѣлить тангенсъ въ любой точкѣ циклоиды, дадутъ намъ возможность вычислить длину какой-угодно дуги этой кривой.

Пусть  $AB$  (черт. 11) есть положеніе катящагося круга въ тотъ моментъ, когда производящая точка находится на неподвижной прямой, а  $M$  и  $M'$  — двѣ бесконечно-близкія точки, соответствующія положеніямъ подвижнаго круга въ тѣ моменты, когда онъ касается неподвижной прямой соответственно въ точкахъ  $C$  и  $C'$ . Мы ви-



дѣли (§ 14), что для перемѣщенія точки  $M$  циклоиды въ точку  $M'$  можно подвергнуть ее двумъ послѣдовательнымъ вращеніямъ на одинъ и тотъ же уголъ, 1) вокругъ точки  $C$  и 2) вокругъ точки, находящейся на бесконечно-маломъ разстояніи третьяго порядка отъ точки  $C'$ , а затѣмъ перенести ее на бесконечно-малое разстояние третьяго порядка параллельно  $CC'$ . Изъ доказанныхъ выше теоремъ вытекаетъ, что бесконечно-малымъ перемѣщеніемъ третьяго порядка можно пренебречь и что обѣ круговыя дуги можно разсматривать какъ дуги одного радіуса и, слѣдовательно, считать ихъ равными; измѣняя такимъ образомъ длину пути  $MM'$ , мы на самомъ дѣлѣ отбрасываемъ только бесконечно-малую часть ея истиннаго значенія, и предѣлъ суммы бесконечно-малыхъ дугъ остается безъ измѣненія. Итакъ, вычислимъ круговую дугу радіуса  $CM$ , соотвѣтственный центральный уголъ которой (§ 14, Задача V) измѣряется, въ производящемъ кругѣ, половиною дуги, равною  $CC'$ . Проведемъ, теперь, черезъ точки  $M$  и  $M'$  прямыя, параллельныя основанію: онѣ встрѣтятъ первоначальное положеніе производящаго круга въ такихъ двухъ точкахъ  $M_1$  и  $M_1'$ , что дуга  $M_1M_1'$ , по самому образованію циклоиды, окажется равною  $CC'$  и, значитъ, уголъ  $M_1AM_1'$  будетъ равнымъ



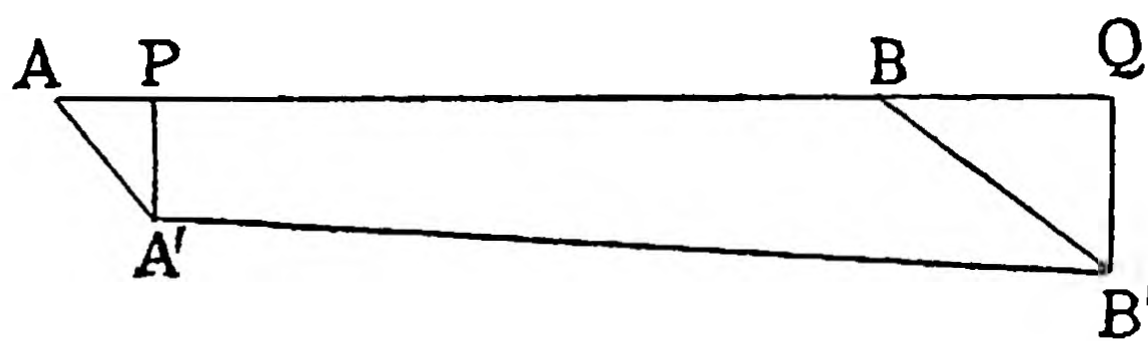
Черт. 11.

центральному углу дуги, которую мы хотимъ вычислить; кромѣ того, замѣчая, что радіусъ этой дуги равенъ  $M_1A$ , мы можемъ замѣнить бесконечно-малую дугу  $MM'$  циклоиды удвоенною дугою  $M_1P$ , описанною изъ точки  $A$ , какъ изъ центра, и заключающеюся между  $AM_1$  и  $AM_1'$ . Соединяя точку  $M_1$  съ точкою  $B$ , діаметрально противоположною точкѣ  $A$  на производящемъ кругѣ, увидимъ, что  $BM_1$  есть касательная къ  $M_1P$  и что часть  $M_1t$  этой прямой, заключенная между  $AM_1$  и  $AM_1'$ , можетъ замѣнить дугу  $M_1P$ . А такъ какъ прямая  $BM_1'$ , перпендикулярная къ  $AM_1'$ , равна  $Bt$  (§ 8), если пренебречь бесконечно-малыми втораго порядка, то отрѣзокъ  $M_1t$  можетъ быть замѣненъ разностью  $BM_1 - BM_1'$  и дугу циклоиды можно считать равною удвоенной этой разности. Отсюда слѣдуетъ, что если мы станемъ такимъ же образомъ вычислять бесконечно-малыя дуги, содержащіяся между точкою  $M$  и высшею точкою  $S$  разсматриваемой кривой, то ихъ сумма, т.-е. дуга  $MS$ , будетъ равна удвоенной суммѣ послѣдовательныхъ уменьшеній, претерпѣваемыхъ линіей  $BM_1$  при ея измѣненіи отъ  $BM_1$  до нуля, иначе говоря, будетъ равна  $2BM_1$ , или, что то же самое, удвоенной части касательной  $MT$ , заключающейся между точкою  $M$  и касательною въ вершинѣ.

**§ 21. Измѣненіе длины прямой линіи.**—Когда прямая перемѣщается въ пространствѣ и заняла какое-нибудь новое положеніе, то измѣненіе ея длины есть сумма измѣненій,

претерпѣваемыхъ ею при каждомъ изъ бесконечно-малыхъ перемѣщеній, изъ которыхъ въ ихъ послѣдовательномъ порядкѣ и можетъ быть составлено все перемѣщеніе. Мы сейчасъ изложимъ одну весьма полезную теорему, при помощи которой можно получить выраженіе для такихъ бесконечно-малыхъ измѣненій, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка.

Пусть  $AB$  и  $A'B'$  (черт. 12) два бесконечно-близкихъ положенія, образующихъ (§ 6) между собою бесконечно-малый уголъ первого порядка, косинусъ котораго отличается отъ единицы на бесконечно-малую второго порядка. Пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, мы можемъ прямую  $A'B'$  считать равною ея проэкціи  $PQ$  на  $AB$  и, слѣдовательно, разность  $A'B' - AB$  считать равною  $PQ - AB$ , т.-е.  $QB - AP$ ,



Черт. 12.

или  $BB' \cos B'BQ - AA' \cos A'AP$ , или, наконецъ, *сумма* перемѣщеній прямыхъ  $AA'$  и  $BB'$ , при вращеніи ихъ около точекъ  $A$  и  $B$ , умноженныхъ соотвѣтственно на косинусы угловъ, образуемыхъ ими съ прямою  $AB$ , причемъ направленіе  $AB$  принимается отъ  $A$  къ  $B$  для перемѣщенія  $BB'$  и отъ  $B$  къ  $A$  для перемѣщенія  $AA'$ .

Отмѣтимъ два замѣчательныхъ случая.

Когда прямая остается постоянно нормальною къ линіи, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный перемѣщенію этого конца, будетъ содержать множителемъ косинусъ прямого угла и, слѣдовательно, будетъ равенъ нулю; отсюда заключаемъ, что бесконечно-малое приращеніе длины въ этомъ случаѣ приведетъ къ одному только члену.

Когда прямая остается постоянно касательною къ кривой, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный перемѣщенію этого конца будетъ содержать множителемъ косинусъ угла, равнаго нулю, и приведетъ, слѣдовательно, къ самому перемѣщенію, т.-е. къ бесконечно-малой дугѣ кривой, къ которой разсматриваемая прямая остается касательною.

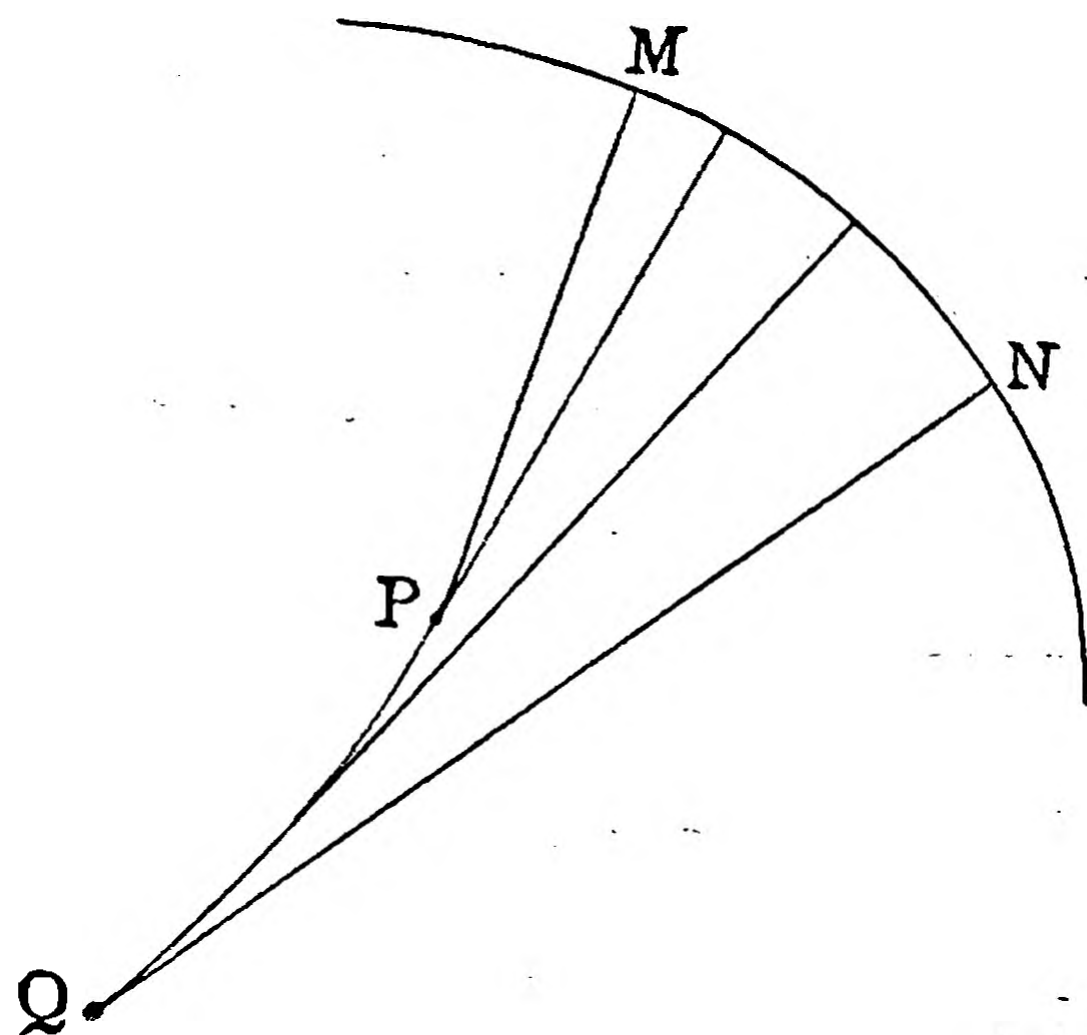
**§ 22. Дуга эволюты.** — Два предыдущихъ случая могутъ представиться одновременно. Разсмотримъ такія двѣ кривыя, что касательныя къ одной изъ нихъ будутъ нормальми къ другой; прямая  $MP$  (черт. 13), оставаясь нормальною къ первой кривой и касательною ко второй, перемѣщается изъ положенія  $MP$  въ положеніе  $NQ$  такимъ образомъ, что ея приращеніе, равное, по предыдущему, суммѣ элементарныхъ дугъ, составляющихъ дугу  $PQ$ , будетъ сама дуга  $PQ$ ; слѣдовательно,

$$\text{дуга } PQ = NQ - MP.$$

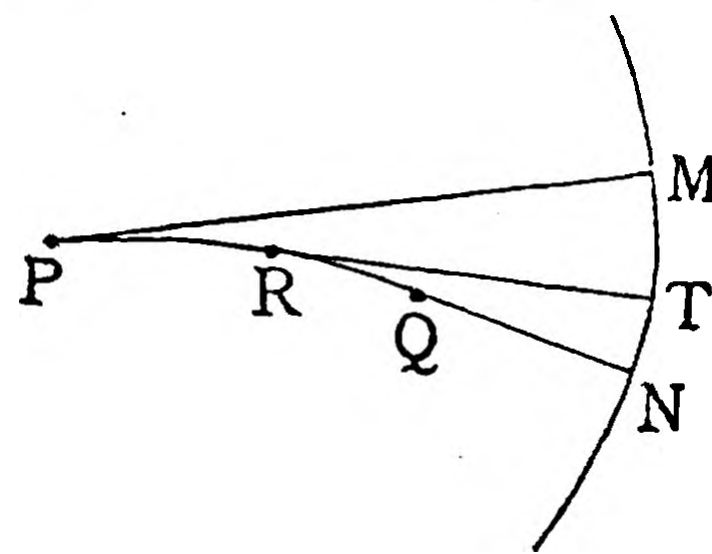
Обратно, если мы разсмотримъ какую-нибудь кривую  $PQ$  (черт. 14) и отложимъ на каждой касательной  $RT$  длину  $RT$ , равную нѣкоторой постоянной, увеличенной на дугу  $RQ$ , отдѣляющей точку касанія отъ неподвижной точки  $Q$ , то всѣ касательныя къ разсматриваемой кривой будутъ нормальми къ кривой  $MTN$ , представляющей



геометрическое мѣсто точекъ  $T$ . Дѣйствительно, когда линія  $QN$ , совпадая послѣдовательно съ различными касательными определенной длины, займетъ конечное положеніе  $RT$ , все ея приращеніе будетъ равно, по предположенію, дугѣ  $RQ$ , т.-е. суммѣ бесконечно-малыхъ членовъ, пропорціональныхъ перемѣщенію конца  $Q$ , въ общемъ выраженіи элементарнаго приращенія. Отсюда слѣдуетъ, что остальные члены, про-



Черт. 13.



Черт. 14.

порціональные перемѣщеніямъ конца  $N$ , въ суммѣ постоянно должны давать нуль и, слѣдовательно, должны быть равными нулю; для этого же необходимо, чтобы былъ равенъ нулю косинусъ, на который умножается перемѣщеніе точки  $N$  и, значитъ, чтобы подвижная прямая составляла постоянно прямой уголъ съ тою кривою, которую описываетъ ея конецъ.

Изученіе такихъ кривыхъ, какъ  $PRQ$  и  $MTN$ , для первой изъ которыхъ служатъ касательными всѣ нормали второй, играетъ весьма важную роль въ геометріи. Мы разсматриваемъ ихъ здѣсь, какъ простой примѣръ *спрямляемыхъ* кривыхъ. Прибавимъ еще, что первая изъ нихъ,  $PRQ$ , называется *эволютою* второй кривой  $MTN$ , а кривая  $MTN$  называется *эвольвентою*  $PRQ$ . Изъ предыдущаго, очевидно, вытекаетъ, что кривая имѣетъ только одну эволюту и, наоборотъ, безчисленное множество эвольвентъ. Мы вернемся впослѣдствіи къ этой важной теоріи и остановимся на ней тогда болѣе подробно.

#### УПРАЖНЕНІЯ

1. Какова бы ни была функція  $\varphi(x)$  отъ переменнѣй  $x$ , выраженіе

$$\varphi(x + 2h) - 2\varphi(x + h) + \varphi(x),$$

гдѣ  $h$ —бесконечно-малая перваго порядка, есть бесконечно-малая втораго порядка.

2. Дана плоская кривая и соприкасающійся съ нею кругъ въ нѣкоторой точкѣ; доказать, что отрезокъ прямой, параллельной общей касательной, заключенный между обѣими кривыми, есть бесконечно-малая втораго порядка, если разстоянія точки касанія до обѣихъ точекъ пересѣченія—бесконечно-малыя перваго порядка.

3. Если изъ точки  $O$ , расположенной въ плоскости нѣкоторой плоской кривой, опустить перпендикуляры на касательныя къ этой кривой и на каждомъ изъ нихъ отложить отъ точки  $O$  линію, пропорціональную его длинѣ, если точно такъ же поступить съ вновь полученною кривою и повторить это построеніе неопредѣленное число разъ, то предѣльная кривая, соответствующая безчислен-

ному множеству такихъ дѣйствій, пересѣчетъ всѣ радіусы-векторы, исходящіе изъ точки  $O$ , подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

4. Изъ точки  $O$ , расположенной въ плоскости нѣкоторой плоской кривой, проведены радіусы-векторы къ точкамъ этой кривой и каждый изъ нихъ продолженъ за данную кривую на постоянную длину. Найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ, и доказать, что нормаль къ этой кривой, нормаль въ соответственной точкѣ къ данной кривой и перпендикуляръ къ радіусу-вектору, проведенному черезъ точку  $O$ , сходятся въ одной точкѣ.

5. Изъ точки  $O$ , расположенной въ плоскости нѣкоторой плоской кривой, проведены радіусы-векторы къ различнымъ точкамъ этой кривой и на каждомъ изъ нихъ отъ точки  $O$  отложена длина, обратно-пропорціональная длинѣ радіуса; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ. Доказать, что если двѣ данныя кривыя пересѣкаются подъ какимъ-нибудь угломъ, то подъ тѣмъ же угломъ пересѣкаются и кривыя, построенныя по указанному способу.

6. Если всѣ касательныя плоскости къ нѣкоторой поверхности касаются ея по линіямъ, то эти линіи непремѣнно прямыя.

7. Изъ неподвижной точки  $O$  проведены радіусы-векторы къ различнымъ точкамъ нѣкоторой поверхности и на каждомъ изъ нихъ отложена отъ точки  $O$  длина обратно-пропорціональная длинѣ радіуса-вектора; найти плоскость, касательную къ поверхности, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.

Нормали въ соответственныхъ точкахъ къ обѣимъ поверхностямъ пересѣкаются между собою.

Если двѣ данныя поверхности пересѣкаются подъ нѣкоторымъ угломъ, то подъ тѣмъ же угломъ пересѣкаются и поверхности, построенныя по указанному способу.

8. Разсматриваются на плоскости двѣ какія-нибудь кривыя и за *соответственныя* точки приняты точки, въ которыхъ касательныя параллельны; если черезъ неподвижную точку провести прямыя, равныя и параллельныя прямымъ, соединяющимъ двѣ соответственныя точки, то касательная къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ, параллельна касательнымъ къ даннымъ кривымъ въ соответственныхъ точкахъ, и дуга этой кривой есть сумма или разность дугъ, соответствующихъ ей на данныхъ кривыхъ.

9. Доказать посредствомъ разсужденій, подобныхъ тѣмъ, каими мы пользовались (§ 20) при нахожденіи дуги циклоиды, что площадь, заключенная между циклоидою и ея основаніемъ, вдвое больше площади производящаго круга.

10. Если какая-нибудь плоская кривая катится безъ скольженія по неподвижной прямой, то точка плоскости, связанная неизмѣнно съ этою кривою и увлекаемая послѣднею въ ея движеніи, описываетъ такую кривую, нормаль къ которой въ какой-нибудь точкѣ проходитъ черезъ точку касанія неподвижной прямой съ соответственнымъ положеніемъ катящейся кривой.

11. Если изъ точки  $O$ , расположенной въ плоскости нѣкоторой кривой, опустить перпендикуляры на касательныя къ этой кривой, то длина дуги кривой, представляющей геометрическое мѣсто основаній этихъ перпендикуляровъ, равна длинѣ дуги кривой, описываемой точкою  $O$ , связанной неизмѣнно съ данною кривою, въ то время какъ соответственная дуга послѣдней катится безъ скольженія по неподвижной прямой.



## ГЛАВА ВТОРАЯ

### Производныя и дифференціалы перваго порядка

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 23. Мы уже видѣли (§ 2), что если  $\varphi(x)$  обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ переменнѣй  $x$ , то выраженіе

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

т.-е. отношеніе приращенія функціи къ приращенію переменнѣй, имѣетъ, при  $h$  безконечно-маломъ, опредѣленный предѣлъ для каждаго значенія  $x$ . Этотъ предѣлъ, представляющій также функцію отъ  $x$ , называется производною отъ  $\varphi(x)$  и часто обозначается такъ же, какъ и первообразная функція, но только со значкомъ наверху. Итакъ,

$\varphi'(x)$  есть производная отъ  $\varphi(x)$ .

§ 24. Если разсматривать функцію  $\varphi(x)$ , какъ ординату нѣкоторой кривой, заданной въ прямолинейныхъ координатахъ посредствомъ уравненія  $y = \varphi(x)$ , то производная  $\varphi'(x)$  есть угловой коэффициентъ касательной къ этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

есть угловой коэффициентъ хорды, соединяющей двѣ точки, абсциссы которыхъ суть  $x$  и  $x+h$ ; слѣдовательно, предѣлъ этого отношенія есть коэффициентъ касательной, служащей предѣльнымъ положеніемъ упомянутой хорды.

Покажемъ, какъ можно вычислять производныя отъ функцій, заданныхъ явно посредствомъ знаковъ, обычно употребляемыхъ въ элементарномъ анализѣ.

#### Производныя отъ простыхъ функцій

§ 25. Нѣкоторыя изъ функцій, употребляемыхъ въ анализѣ, носятъ названіе *простыхъ* функцій. Число ихъ можетъ быть увеличено или уменьшено, до нѣкоторой

степени, по нашему произволу. Дѣйствительно, эти простыя функціи таковы, что къ нимъ приводятся другія и посредствомъ комбинированія ихъ образуются *сложныя* функціи; поэтому, можетъ случиться, смотря по точкѣ зрѣнія, что одна и та же функція разсматривается то какъ простая, то какъ сложная. Приведемъ для примѣра функціи  $\sin x$  и  $\cos x$ , которыя весьма часто разсматриваются въ анализѣ и которыя мы сами будемъ разсматривать, какъ простыя; тѣмъ не менѣе, каждая изъ формулъ:

$$\begin{aligned}\cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x}, \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\end{aligned}$$

выражающая  $\cos x$  посредствомъ дѣйствій, куда входитъ символъ *sinus*, даетъ возможность разсматривать косинусъ не какъ простую функцію. Какъ бы то ни было, мы будемъ принимать за простыя слѣдующія функціи:  $x^m$  (при  $m$  цѣломъ),  $a^x$ ,  $\log x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  и  $\tan x$ . Отыщемъ сначала ихъ производныя, а затѣмъ дадимъ общія теоремы, посредствомъ которыхъ можно было бы выводить производныя отъ всѣхъ явныхъ функцій.

**§ 26. Производная отъ  $x^m$ .** — Первая изъ простыхъ функцій, встрѣчающаяся въ алгебрѣ, есть  $x^m$ ; отъ нея мы прежде всего и отыщемъ производную, предполагая, что показатель  $m$  — цѣлый и положительный. Функція  $x^m$  при  $m$  дробномъ можетъ быть разсматриваема такъ же, какъ простая функція, но для насъ будетъ выгоднѣе свести этотъ болѣе общій случай къ случаю, когда  $m$  — цѣлое.

Производная отъ  $x^m$ , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

при  $h$  стремящемся къ нулю; но такъ какъ  $m$  — цѣлое, то эта дробь равна

$$\frac{m h x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{m-2} + \dots}{h}.$$

Выполняя дѣленіе на  $h$  и полагая затѣмъ  $h = 0$ , находимъ, что предѣлъ этой дроби есть  $m x^{m-1}$ . Итакъ, *производная отъ  $x^m$  есть  $m x^{m-1}$ .*

**§ 27. Производная отъ  $a^x$ .** — Производная отъ  $a^x$ , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

при  $h$  стремящемся къ нулю, но такъ какъ, очевидно,

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

то производная есть предѣлъ отношенія

$$a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}. \quad (A)$$

Полагаемъ  $a^h - 1 = \alpha$  и, слѣдовательно,  $a^h = 1 + \alpha$ ,  $h \log a = \log(1 + \alpha)$ ; выраженіе (A) преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$a^x \frac{\alpha \log a}{\log(1 + \alpha)} = \frac{a^x \log a}{\frac{1}{\alpha} \log(1 + \alpha)} = \frac{a^x \log a}{\log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (B)$$

Когда  $h$  стремится къ нулю,  $\alpha$ , равное  $a^h - 1$ , стремится также къ нулю; значитъ,  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  въ предѣлѣ есть основаніе неперовыхъ логарифмовъ, обозначаемое обыкновенно буквою  $e$ ; такимъ образомъ, выраженіе (B) имѣетъ предѣломъ  $a^x \frac{\log a}{\log e}$  и производная отъ  $a^x$  есть  $a^x \frac{\log a}{\log e}$ .

Основаніе системы, въ которой взяты оба логарифма, произвольно и не вліяетъ на ихъ отношеніе, въ какомъ видѣ они только и входятъ въ полученное выраженіе. Если  $a$  равно  $e$ , то отношеніе логарифмовъ будетъ единица, и, значитъ, производная отъ  $e^x$  есть  $e^x$ .

**§ 28. Производная отъ  $\log x$ .** — Производная отъ функціи  $\log x$ , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія  $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$  при  $h$  стремящемся къ нулю. Пишемъ:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}. \quad (C)$$

Полагаемъ  $\frac{h}{x} = \alpha$ ,  $h = \alpha x$ ; предыдущее выраженіе преобразуется слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{\log(1 + \alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x} \log(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

При  $h$  стремящемся къ нулю  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  въ предѣлѣ дастъ  $e$  и выраженіе (C) будетъ имѣть предѣломъ  $\frac{\log e}{x}$ ; итакъ, производная отъ  $\log x$  есть  $\frac{\log e}{x}$ .

Логарифмъ, взятый по основанію  $e$ , обозначаютъ обыкновенно черезъ  $\lg x$ ; въ такомъ случаѣ производная отъ  $\lg x$  есть  $\frac{1}{x}$ .

**§ 29. Производная отъ  $\sin x$ .** — Производная отъ  $\sin x$ , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}.$$

Преобразовываемъ это выраженіе:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

и замѣчаемъ, что по известной теоремѣ предѣломъ  $\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$  при  $h$  стремящемся къ нулю

будетъ единица, а второй множитель въ предѣлѣ обратится въ  $\cos x$ ; слѣдовательно, производная отъ  $\sin x$  есть  $\cos x$ .

§ 30. Производная отъ  $\cos x$ . — Производная отъ  $\cos x$ , по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}.$$

Преобразовываемъ это выраженіе:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = - \frac{2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

и замѣчаемъ, что предѣлъ  $\frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h}$  есть единица, а слѣдовательно, предѣлъ всего выраженія есть  $-\sin x$ ; итакъ, производная отъ  $\cos x$  есть  $-\sin x$ .

§ 31. Производная отъ  $\tan x$ . — Такъ какъ функція  $\tan x$  равна  $\frac{\sin x}{\cos x}$ , то ее можно не причислять къ простымъ функціямъ, но можно ее производную получить и непосредственно, болѣе легкимъ путемъ. Эта производная, по опредѣленію, есть предѣлъ отношенія

$$\frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h} = \frac{\tan h (1 + \tan^2 x)}{h (1 - \tan x \tan h)};$$

зная же, что предѣлъ  $\frac{\tan h}{h}$  при  $h$  стремящемся къ нулю есть единица, заключаемъ, что это послѣднее выраженіе стремится къ  $1 + \tan^2 x$  или, что одно и то же, къ  $\frac{1}{\cos^2 x}$ ; итакъ, производная отъ  $\tan x$  есть  $\frac{1}{\cos^2 x}$ .

### Производныя отъ обратныхъ функцій

§ 32. Когда двѣ переменныя связаны уравненіемъ, то каждая изъ нихъ можетъ быть рассматриваема какъ функція отъ другой. Если, напр., дано, что

$$x = \psi(y),$$

то можно, рѣшивъ это уравненіе относительно  $y$ , представить его въ видѣ:

$$y = \varphi(x),$$

гдѣ знакъ  $\varphi$  обозначаетъ функцію обратную той, которая была обозначена знакомъ  $\psi$ . Поэтому, если мы возьмемъ какую-нибудь функцію отъ переменной, а затѣмъ обратную отъ результата, то эти два дѣйствія взаимно уничтожатся и мы придемъ снова къ самой переменной. Такимъ образомъ, удерживая предыдущія обозначенія, можемъ написать:

$$\begin{aligned} \varphi[\psi(y)] &= \varphi(x) = y, \\ \psi[\varphi(x)] &= \psi(y) = x. \end{aligned}$$

Примѣры. — Если дано, что

$$x = y^2,$$

то

$$y = \sqrt{x};$$



слѣдовательно, квадратный корень есть обратная функція отъ второй степени; кромѣ того, очевидно, что эти два дѣйствія взаимно уничтожаются, если ихъ выполнить въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Если дано, что

$$x = c^y,$$

то

$$y = \lg x;$$

слѣдовательно, логарифмъ есть обратная функція степени; кромѣ того, согласно съ общимъ замѣчаніемъ,

$$\lg e^x = x.$$

§ 33. Зная производную отъ нѣкоторой функціи, можно найти производную и отъ функціи, ей обратной. Пусть  $x$  есть функція отъ  $y$ , опредѣляемая уравненіемъ

$$x = \varphi(y),$$

и предположимъ, что это уравненіе даетъ:

$$y = \psi(x).$$

Производная  $\varphi'(y)$ , т.-е. производная отъ  $x$ , взятая по  $y$ , есть предѣлъ отношенія приращенія  $x$  къ соотвѣтственному приращенію  $y$ , иначе говоря, производная  $\varphi'(y)$  есть предѣлъ отношенія  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ , гдѣ  $\Delta x$  обозначаетъ приращеніе  $x$ , а  $\Delta y$ —соотвѣтственное приращеніе  $y$ ; этими обозначеніями мы будемъ пользоваться весьма часто.

Производная  $\psi'(x)$ , т.-е. производная отъ  $y$ , взятая по  $x$ , есть предѣлъ отношенія приращенія  $y$  къ соотвѣтственному приращенію  $x$ , иначе говоря, есть предѣлъ отношенія  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , и такъ какъ переменныя  $x$  и  $y$  тѣ же самыя, что и въ предыдущемъ слѣчаѣ, то отношенія  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  и  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  имѣютъ предѣлы, обратные другъ другу; итакъ,

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Это равенство даетъ намъ производную отъ функціи  $\psi$ .

§ 34. Покажемъ, какъ вышеизложенное примѣняется на примѣрахъ.

Пусть

$$x = y^m;$$

отсюда

$$y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}.$$

Слѣдовательно, производная отъ функціи  $x^{\frac{1}{m}}$ , взятая по  $x$ , есть обратная производной отъ  $y^m$ , взятой по  $y$ , т.-е. равна  $\frac{1}{my^{m-1}}$ ; замѣняя здѣсь  $y$  его величиной, находимъ,

что эта производная есть  $\frac{1}{mx^{\frac{m-1}{m}}}$ , или, что одно и то же,  $\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$ .

Итакъ, производная отъ  $x^{\frac{1}{m}}$  есть  $\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}$ , гдѣ  $m$  есть какое-угодно цѣлое число.

Разсмотримъ еще

$$x = \sin y.$$

Изъ этого равенства слѣдуетъ:

$$y = \arcsin x;$$

поэтому производная отъ  $\arcsin x$ , взятая по  $x$ , есть обратная производной отъ  $\sin y$ , взятой по  $y$ , т.-е. равна  $\frac{1}{\cos y}$ , или, что одно и то же,  $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Полагая

$$x = \cos y,$$

мы точно также нашли бы, что производная отъ  $\arccos x$  есть  $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Этотъ весьма важный результатъ требуетъ нѣкоторыхъ поясненій.

Функция  $\sin x$  есть вполне опредѣленная функція, т.-е. такая функція, которая для каждаго значенія  $x$  имѣетъ единственное и опредѣленное значеніе; нельзя того же сказать про функцію  $\arcsin x$ . Дѣйствительно, одному и тому же синусу соотвѣтствуетъ безчисленное множество различныхъ дугъ и если  $\alpha$  обозначаетъ одну изъ нихъ, то остальные заключаются въ формулахъ  $2K\pi + \alpha$  и  $(2K+1)\pi - \alpha$ , гдѣ  $K$  есть произвольное цѣлое число; изъ сказаннаго заключаемъ, что въ общемъ выраженіи ихъ производной должны стоять двойной знакъ  $\pm$ . Если же приходится, въ частномъ случаѣ, разсматривать одну изъ дугъ, выражаемыхъ символомъ  $\arcsin x$ , то опредѣленіе знака производной не представляетъ никакой трудности. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x = \sin y,$$

находимъ, что производная отъ  $y$ , взятая по  $x$ , есть  $\frac{1}{\cos y}$  и что въ этомъ выраженіи нѣтъ никакой двойственности. Вопросъ о двойномъ знакѣ  $\pm$  можетъ представиться только въ томъ случаѣ, когда  $\cos y$  замѣняется черезъ  $\pm \sqrt{1-x^2}$ , причемъ видно, что знакъ радикала долженъ совпадать со знакомъ  $\cos y$ . Точно такъ же, если

$$x = \cos y,$$

то

$$y = \arccos x,$$

и производная отъ  $y$ , взятая по  $x$ , есть  $-\frac{1}{\sin y}$ , т.-е.  $\frac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$ , причемъ знакъ этого выраженія противоположенъ знаку  $\sin y$ .

Пусть

$$x = \tan y$$

и, значитъ,

$$y = \arctan x.$$

Производная отъ  $y$ , взятая по  $x$ , есть, слѣдовательно,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Здѣсь нѣтъ двойственности, такъ какъ дуги съ однимъ и тѣмъ же тангенсомъ содержатся въ общемъ выраженіи  $K\pi + \alpha$  и, значитъ, отличаются одна отъ другой на постоянную величину, что на производную не вліяетъ.

§ 35. Введеніе обратныхъ функцій даетъ возможность производныя отъ функцій  $a^x$  и  $\log x$ , полученные отдѣльно, вывести одну изъ другой.

Если

$$x = a^y,$$

то

$$y = \log x.$$

Слѣдовательно, производная отъ  $\log x$ , взятая по  $x$ , есть обратная производной отъ  $a^y$ , взятой по  $y$ , т. е., если логарифмы взяты по основанію  $a$ , то

$$\frac{\log_e a^y}{a^y} = \frac{\log_e x}{x}.$$

### Производныя функцій отъ функцій

§ 36. Если буква  $u$  обозначаетъ данную функцію отъ переменнѣй  $x$ , то всякая функція отъ  $u$  будетъ функціей отъ  $x$ ; поэтому, такія функціи получили названіе *функцій отъ функцій*.

Такъ, напр., если

$$u = \varphi(x), \quad y = F(u),$$

то  $y$ , разсмотрѣнная въ зависимости отъ  $x$ , есть *функція отъ функцій*.

Покажемъ, что если функціи  $\varphi$  и  $F$  таковы, что мы можемъ составить ихъ производныя, то мы можемъ также составить производную отъ  $y$  по  $x$ .

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что переменнѣй  $x$  придано приращеніе  $\Delta x$  и что вслѣдствіе этого получилось

для  $u$  приращеніе  $\Delta u$ ,  
для  $y$  приращеніе  $\Delta y$ .

Пишемъ тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

и переходимъ къ предѣлу, приближая  $\Delta x$  къ нулю; первая часть этого равенства, по опредѣленію, въ предѣлѣ дастъ производную отъ  $y$  по  $x$ , два же множителя второй части будутъ стремиться соотвѣтственно къ производной отъ  $u$  по  $x$  и къ производной отъ  $y$  по  $u$ . Обозначая эти производныя черезъ  $\varphi'(x)$  и  $F'(u)$ , заключаемъ, что производная отъ  $y$  по  $x$  есть

$$\varphi'(x) F'(u).$$

Этотъ результатъ можно прочесть слѣдующимъ образомъ:

*Производная функцій отъ функцій есть произведеніе производныхъ отъ составляющихъ ее простыхъ функцій, причемъ каждая изъ послѣднихъ берется по той переменнѣй, отъ которой она непосредственно зависитъ.*

Примѣры. — Пусть дана функція  $y = \cos x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ . Это выражение можетъ быть рассматриваемо, какъ функція отъ функціи. Дѣйствительно, полагая

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

мы можемъ написать, что

$$y = \sin u.$$

Прилагая общее правило, находимъ для производной отъ  $y$  по  $x$

$$(-1) \cos u = -\sin x,$$

что согласно съ найденнымъ раньше (§ 30).

Пусть дана функція  $y = \cot x = \text{tang} \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ . Полагая

$$\frac{\pi}{2} - x = u,$$

мы можемъ написать, что

$$y = \text{tang} u.$$

Прилагая общее правило, находимъ для производной отъ  $y$

$$(-1) \frac{1}{\cos^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пусть будетъ дана еще функція  $\ln x^5$ . Полагаемъ:

$$x^5 = u,$$

$$y = \ln u.$$

По общему правилу находимъ для производной отъ  $y$

$$\frac{1}{u} \cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{x^5} = \frac{5}{x};$$

и, дѣйствительно,  $\ln x^5 = 5 \ln x$ , откуда ясно, что производная отъ заданной функціи должна быть равна производной  $\ln x$ , взятой пять разъ.

§ 37. Какъ послѣдній примѣръ, составимъ производную отъ функціи  $y = x^{\frac{m}{n}}$ , гдѣ  $m$  и  $n$  обозначаютъ цѣлыя числа. Эта функція можетъ быть рассматриваема, какъ функція отъ функціи. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x^{\frac{1}{n}} = u,$$

напишемъ:

$$y = u^m.$$

По общему правилу и на основаніи результатовъ, полученныхъ въ §§ 26-мъ и 34-мъ, находимъ для производной отъ  $y$

$$y' = m u^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1};$$



следовательно, производная отъ  $x^{\frac{m}{n}}$  получается по той же самой формулѣ, какъ если бы показатель  $\frac{m}{n}$  былъ цѣлымъ числомъ.

§ 38. Предыдущее правило можно распространить на составленіе производной функціи отъ функціи, связанной съ переменною  $x$  посредствомъ нѣсколькихъ промежуточныхъ функцій. Дѣйствительно, полагая

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(u), \quad w = f(v), \quad y = F(w),$$

найдемъ производную отъ  $y$  по  $x$ . Пусть  $\Delta x$  есть приращеніе  $x$ , а  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ ,  $\Delta w$ ,  $\Delta y$  — соотвѣтственные приращенія  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $y$ ; пишемъ тождество

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и замѣчаемъ, что когда  $\Delta x$  стремится къ нулю, то первая часть этого равенства въ предѣлѣ даетъ производную отъ  $y$  по  $x$ , а множители второй части стремятся къ производнымъ отъ  $y$ ,  $w$ ,  $v$ ,  $u$ , причемъ каждая изъ этихъ послѣднихъ берется по той переменной, отъ которой она непосредственно зависитъ. Отсюда заключаемъ, что производная отъ  $y$  есть произведеніе производныхъ отъ отдѣльныхъ функцій  $y$ ,  $w$ ,  $v$ ,  $u$ , причемъ каждая изъ производныхъ взята по той переменной, отъ которой она непосредственно зависитъ.

### Производная отъ произведенія

§ 39. Пусть  $u$ ,  $v$ ,  $w$  будутъ данныя функціи отъ одной и той же переменной  $x$ ; назовемъ черезъ  $y$  ихъ произведеніе, отъ котораго и требуется найти производную. Пишемъ:

$$y = u \cdot v \cdot w;$$

беремъ отъ обѣихъ частей этого равенства неперовы логарифмы:

$$\lg y = \lg u + \lg v + \lg w;$$

теперь переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, применяя правило функцій отъ функцій и обозначая черезъ  $y'$ ,  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  производныя отъ  $y$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ :

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w';$$

отсюда

$$y' = \frac{y}{u} u' + \frac{y}{v} v' + \frac{y}{w} w' = vw u' + uv v' + uw w'.$$

Такимъ образомъ, производная отъ произведенія есть сумма произведеній, получаемыхъ отъ послѣдовательнаго умноженія производныхъ каждаго множителя на произведеніе всѣхъ остальныхъ.

### Производная отъ частнаго

§ 40. Пусть  $u$  и  $v$  будутъ двѣ функціи отъ одной и той же перемѣнной  $x$ ; назовемъ черезъ  $y$  ихъ частное, отъ котораго и требуется найти производную. Пишемъ:

$$y = \frac{u}{v};$$

беремъ отъ обѣихъ частей этого равенства неперовы логариѣмы:

$$\lg y = \lg u - \lg v;$$

теперь переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь тѣми же обозначеніями, что и въ предыдущемъ случаѣ:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v};$$

отсюда

$$y' = \frac{yu'}{u} - \frac{yv'}{v} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

По этой формулѣ и составляется производная отъ частнаго  $\frac{u}{v}$ , если извѣстны производныя  $u'$  и  $v'$  отъ дѣлимаго и дѣлителя.

### Производная отъ степени

§ 41. Пусть  $u$  есть функція отъ  $x$ , а  $m$ —какой-нибудь показатель, положительный или отрицательный. Полагая

$$y = u^m,$$

беремъ логариѣмы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\lg y = m \lg u;$$

переходимъ теперь къ производнымъ по  $x$  отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь прежними обозначеніями:

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u};$$

отсюда

$$y' = \frac{myu'}{u} = mu^{m-1}u'.$$

**Замѣчаніе.**—Если положить  $u = x$ , то  $u' = 1$ , и предыдущая формула покажетъ, что производная отъ функціи  $x^m$  есть  $mx^{m-1}$ . Этотъ результатъ былъ полученъ для показателя цѣлаго (§ 26) или дробнаго (§ 37) и притомъ положительнаго. Теперь же мы можемъ считать его вполнѣ общимъ, потому что предыдущее доказательство прилагается ко всѣмъ безъ исключенія положительнымъ или отрицательнымъ значеніямъ  $m$ .

Производная отъ  $u^v$ 

§ 42. Разсмотримъ, наконецъ, сложное выраженіе  $u^v$ , гдѣ  $u$  и  $v$  обозначаютъ функціи отъ переменной  $x$ . Полагаемъ

$$y = u^v$$

и беремъ логариѣмы отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\lg y = v \lg u;$$

дальѣ, переходимъ къ производнымъ отъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, пользуясь правиломъ (§ 39) для производной отъ произведенія; получаемъ:

$$\frac{y'}{y} = v' \lg u + \frac{v}{u} u',$$

откуда

$$y' = y \left( v' \lg u + \frac{vu'}{u} \right).$$

Если предположить, напр., что

$$v = x, \quad u = x,$$

то

$$v' = 1, \quad u' = 1,$$

и производная отъ  $x^x$  будетъ

$$x^x (1 + 1).$$

## Нѣкоторыя приложенія

§ 43. Полученные въ этой главѣ результаты даютъ возможность найти производную отъ какой-угодно явной функціи, составленной посредствомъ простыхъ дѣйствій. Важно освоиться съ этими первыми принципами на примѣрахъ.

1. Производная отъ  $\arctang \frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = y$ .

Полагаемъ

$$\frac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)} = u;$$

тогда

$$y = \arctang u$$

и  $y$  есть функція отъ функціи, производная отъ которой равна произведенію  $\frac{1}{1+u^2}$  на производную отъ  $u$ . Примѣняя правило § 40-го, находимъ для производной отъ  $u$

$$\frac{3(a^4 + 2a^2x^2 + x^4)}{a(a^2 - 3x^2)^3} = \frac{3(a^2 + x^2)^2}{a(a^2 - 3x^2)^3};$$

кромѣ того,

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{a^2(a^2 - 3x^2)^2}{(a^2 + x^2)^3};$$

значеніе, искомая производная, послѣ всѣхъ упрощеній, будетъ

$$\frac{3a}{a^2 + x^2}.$$

Этотъ результатъ не трудно было предвидѣть, такъ какъ по извѣстнымъ формуламъ тригонометріи функція  $y$  равна  $3 \operatorname{arctang} \frac{x}{a}$ , и если бы мы стали составлять производную отъ послѣдняго выраженія, то нашли бы непосредственно полученное выше значеніе.

2. Производная отъ  $\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = y$ .

Разсматривая  $y$ , какъ степень отъ дроби  $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$  съ показателемъ  $\frac{1}{2}$ , и примѣняя къ этой функціи правило, данное въ § 41-мъ, находимъ для производной отъ нея

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x) + \cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{2(1-\sin x) \sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{1-\sin x}.$$

Къ тому же результату можно придти, замѣтивъ, что

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right);$$

дѣйствительно, производная отъ  $\operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$  равна  $\frac{1}{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}$ , что равносильно предыдущему выраженію.

3. Изъ формулы

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

вывести выраженіе для суммы

$$\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx.$$

Для этого достаточно взять производныя отъ обѣихъ частей:

$$\cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + \dots + n \cos nx = \frac{\frac{n+1}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

4. Изъ формулы

$$\sin x \sin \left( x + \frac{\pi}{m} \right) \sin \left( x + \frac{2\pi}{m} \right) \dots \sin \left( x + \frac{(m-1)\pi}{m} \right) = \frac{\sin mx}{2^{m-1}}$$

вывести выраженіе для суммы

$$\cot x + \cot \left( x + \frac{\pi}{m} \right) + \dots + \cot \left( x + \frac{m-1}{m} \pi \right).$$



Для этого достаточно взять отъ обѣихъ частей данного равенства сначала дотриемы, а потомъ производныя; найдемъ:

$$\cot x + \cot \left( x + \frac{\pi}{m} \right) + \dots + \cot \left( x + \frac{m-1}{m} \pi \right) = m \cot mx.$$

#### УПОТРЕБЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНЫХЪ ПРИ ИЗСЛѢДОВАНИИ ФУНКЦІЙ

§ 44. Если безконечно-малое приращеніе функціи совпадаетъ по знаку съ безконечно-малымъ приращеніемъ переменнѣй, то говорятъ, что такая функція — возрастающая; въ противномъ случаѣ она — убывающая. Слѣдовательно, на основаніи этихъ опредѣленій, выраженіе, напр., такое, какъ «функція — возрастающая» означаетъ, что она возрастаетъ *вмѣстѣ съ перемѣнною*.

Когда функція — возрастающая, ея производная — положительна, такъ какъ дробь  $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ , дающая въ предѣлѣ эту производную, постоянно положительна; наоборотъ, если функція — убывающая, ея производная — отрицательна. Эти, очевидно, справедливыя замѣчанія часто бываютъ полезны при изученіи послѣдовательныхъ значеній функціи; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1. Разсмотримъ функцію

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

производная отъ которой есть

$$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

Такъ какъ въ предѣлахъ отъ  $x=0$  до  $x=\frac{\pi}{2}$  всегда  $x < \tan x$  и, значитъ,  $x \cos x - \sin x < 0$ , то эта производная отрицательна: функція  $\frac{\sin x}{x}$ , поэтому, убывающая; кромѣ того, эта функція равна единицѣ при  $x=0$  и  $\frac{2}{\pi}$  при  $x=\frac{\pi}{2}$ . Слѣдовательно, она для всякаго промежуточнаго значенія  $x$  меньше единицы и больше  $\frac{\pi}{2}$ .

2. Дана функція

$$y = 1(1+x) - x;$$

ея производная

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1.$$

Эта послѣдняя отрицательна при положительныхъ значеніяхъ  $x$ ; слѣдовательно, данная функція — убывающая и, такъ какъ она равна нулю при  $x=0$ , то при всякомъ положительномъ значеніи  $x$

$$1(1+x) - x < 0.$$

3. Разсмотримъ, наконецъ, функцію

$$y = 1(1+x) - x + \frac{x^2}{2},$$

производная отъ которой

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Эта послѣдняя положительна при положительныхъ значеніяхъ  $x$ ; слѣдовательно, данная функція — возрастающая и, такъ какъ она равна нулю при  $x=0$ , то она постоянно положительна, т.-е.

$$l(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0.$$

Такимъ образомъ, для всякаго положительнаго значенія  $x$  функція  $l(1+x)$  содержится между  $x$  и  $x - \frac{x^2}{2}$ ; отсюда заключаемъ, что ее можно представить посредствомъ  $x - \frac{\theta x^2}{2}$ , гдѣ  $\theta$  меньше единицы.

#### Порядокъ величины безконечно-малой производной

§ 45. Разсмотримъ функцію отъ  $x$ ,  $\varphi(x)$ , обращающуюся въ нуль при  $x=0$ . Производная  $\varphi'(x)$  при значеніи переменнѣй, равномъ нулю, по опредѣленію есть  $\lim \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$ , т.-е. предѣлъ отношенія  $\frac{\varphi(x)}{x}$ . Слѣдовательно, она обращается въ нуль, всякій разъ какъ  $\varphi(x)$  при весьма малыхъ значеніяхъ  $x$  есть безконечно-малая высшаго порядка относительно  $x$ .

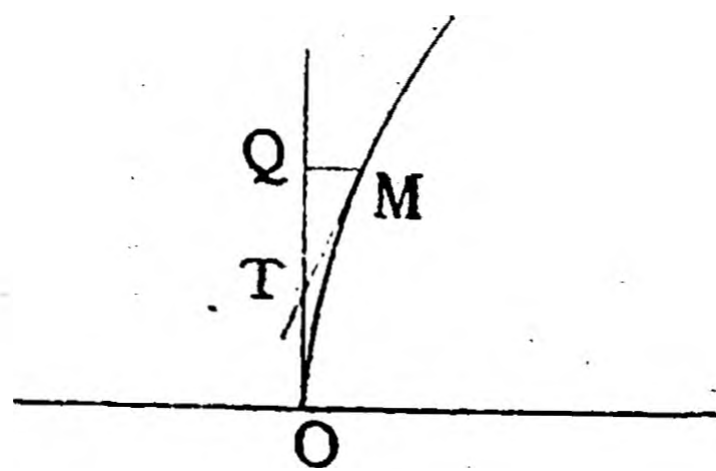
Можно итти дальше: если  $\varphi(x)$  есть безконечно-малая  $n$ -го порядка относительно  $x$ , т.-е. когда  $x$  принимается за безконечно-малую перваго порядка, то  $\varphi'(x)$  будетъ безконечно-малою  $(n-1)$ -го порядка. Въ самомъ дѣлѣ, представляя  $\varphi(x)$  въ видѣ

$$\varphi(x) = x^n (A + \varepsilon), \quad (1)$$

гдѣ  $A$  есть постоянная, а  $\varepsilon$  — функція отъ  $x$ , обращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ  $x$ , и называя производную отъ  $\varepsilon$  черезъ  $\varepsilon'$ , выводимъ:

$$\varphi'(x) = nx^{n-1} (A + \varepsilon) + x^n \varepsilon'. \quad (2)$$

Можно утверждать, что  $x\varepsilon'$  стремится къ нулю. Это — очевидно, если  $\varepsilon'$  не непре-



Черт. 15.

дѣльно возрастаетъ; поэтому изслѣдуемъ только тотъ случай, когда  $\varepsilon'$  обращается въ безконечность при  $x$  равномъ нулю; строимъ кривую, уравненіе которой есть  $y = \varepsilon$ ; такая кривая пройдетъ черезъ начало (черт. 15) и въ этой точкѣ ось  $y$ -овъ будетъ

къ ней касательною. Пусть  $MT$  есть касательная къ этой кривой въ точкѣ  $M$ , безконечно-близкой къ  $O$ , а  $MQ$ —абсцисса точки  $M$ . Производная  $\varepsilon'$  есть тангенсъ угла  $QMT$ ; значитъ,  $x\varepsilon'$  равно  $QT$  и, слѣдовательно, меньше  $QO$ , т.-е. меньше  $\varepsilon$ ; а такъ какъ  $\varepsilon$  стремится къ нулю вмѣстѣ съ  $x$ , то и выходитъ, что  $x\varepsilon'$  также стремится къ нулю. Отсюда заключаемъ, что  $x^n\varepsilon'$  есть безконечно-малая относительно  $x^{n-1}$  и выраженіе (2) для  $\varphi'(x)$  есть безконечно-малая  $(n-1)$ -го порядка. Также видно, что отношеніе  $\frac{\varphi'(x)}{x^{n-1}}$  имѣетъ предѣломъ  $nA$ .

Этимъ замѣчаніемъ пользовался О. Боннэ (O. Bonnet) при доказательствѣ многихъ важныхъ теоремъ, о которыхъ мы будемъ говорить ниже.

### ДИФФЕРЕНЦІАЛЪ ФУНКЦІИ ОТЪ ОДНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ

**§ 46.** Пусть  $\varphi(x)$  есть функція отъ переменнѣй  $x$ , а  $\varphi'(x)$ —ея производная; въ такомъ случаѣ

$$\varphi'(x) = \lim \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h},$$

гдѣ  $h$ —безконечно-малая. Слѣдовательно,

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h[\varphi'(x) + \varepsilon] = h\varphi'(x) + h\varepsilon,$$

при чемъ  $\varepsilon$  обозначаетъ другую безконечно-малую. Такъ какъ  $\varphi'(x)$  конечная величина, то  $h\varepsilon$  есть безконечно-малая относительно  $h\varphi'(x)$  и разность  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  равна  $h\varphi'(x)$ , если отбросить безконечно-малую часть ея значенія.

Итакъ, на основаніи § 11-го, произведеніе  $h\varphi'(x)$ , при  $h$  безконечно-маломъ, можетъ быть поставлено вмѣсто приращенія  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  во всякой задачѣ, гдѣ рѣчь идетъ о вычисленіи отношенія или суммы безконечно-малыхъ; это произведеніе называютъ дифференціаломъ  $\varphi(x)$  и обозначаютъ его, ставя букву  $d$  передъ функціею.

По этому обозначенію дифференціалъ отъ  $x$  есть не что иное, какъ само приращеніе этой переменнѣй, такъ какъ производная въ этомъ случаѣ равна единицѣ. Слѣдовательно, при замѣнѣ буквы  $h$  равносильнымъ ей выраженіемъ  $dx$  дифференціалъ функціи  $\varphi(x)$  приметъ видъ

$$d\varphi(x) = \varphi'(x) dx,$$

которымъ мы и будемъ теперь часто пользоваться.

Этотъ дифференціалъ  $d\varphi(x)$  не равняется строго, какъ только-что объяснено, приращенію  $\varphi(x)$ , но оно можетъ его замѣнять, если послѣднее безконечно-мало, и отъ этого не произойдетъ никакой ошибки при разысканіи предѣловъ суммъ или отношеній, куда входитъ такое приращеніе.

**§ 47.** Поясняя почти всегда получаемые результаты, для ясности, геометрически, считаемъ не лишнимъ и здѣсь, для дифференціала, указать на его геометрическое значеніе.

Разсмотримъ кривую, уравненіе которой въ прямолинейныхъ координатахъ есть

$$y = \varphi(x);$$

угловой коэффициентъ касательной въ точкѣ, координаты которой суть  $x$  и  $y$ , есть (§ 24)  $\varphi'(x)$  и, слѣдовательно, уравненіе касательной будетъ

$$u - y = \varphi'(x)(t - x),$$

гдѣ  $u$  и  $t$ —текуція координаты этой прямой, т.-е. координаты какой-угодно ея точки. Если, поэтому, мы припишемъ, начиная отъ точки касанія, координаты которой суть  $x$  и  $y$ , абсциссу точки касательной приращеніе  $t - x = h$ , то соотвѣтственное приращеніе ординаты будетъ

$$u - y = \varphi'(x)h,$$

и дифференціалъ  $h\varphi'(x)$  явится приращеніемъ ординаты  $y$ , соотвѣтствующимъ приращенію  $h$  абсциссы при переходѣ отъ кривой къ ея касательной. Итакъ, замѣна приращенія  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  функціи  $\varphi(x)$  дифференціаломъ  $\varphi'(x)h$  то же самое, что замѣна бесконечно-малой дуги кривой ея касательною. Обѣ эти подстановки равнозначны и допустимы при однихъ и тѣхъ же обстоятельствахъ.

§ 48. Казалось бы, что употребленіе дифференціала, представляющаго, по предыдущему, произведеніе производной  $\varphi'(x)$  на приращеніе  $dx$  переменной, будетъ тождественно съ употребленіемъ производной и не дастъ ни малѣйшей спеціальной выгоды.

Слѣдующее замѣчаніе покажетъ однако, что это не такъ и что употребленіе дифференціаловъ можетъ быть болѣе выгоднымъ, чѣмъ употребленіе производныхъ.

Изъ соотношенія

$$y = \varphi(x)$$

вытекаетъ, что

$$dy = \varphi'(x) dx; \quad (A)$$

здѣсь  $dx$  и  $dy$  одинаково произвольны, одно только отношеніе  $\frac{dy}{dx}$  опредѣленно и равно производной  $\varphi'(x)$ . Поэтому, можно сказать, что такъ какъ  $y$  является функціею отъ  $x$ , то одинъ изъ дифференціаловъ,  $dy$  или  $dx$ , произволенъ и отношеніе его къ другому равно отношенію бесконечно-малыхъ приращеній, какія могутъ принять одновременно  $x$  и  $y$ .

Это опредѣленіе, очевидно, равносильное опредѣленію, принятому нами вначалѣ, имѣетъ весьма существенное преимущество въ томъ случаѣ, если оба количества,  $x$  и  $y$ , входятъ одинаковымъ образомъ. Разовьемъ это подробнѣе.

Если  $y$  есть функція отъ  $x$ , то  $x$  этимъ самымъ есть функція отъ  $y$ , и ничто не обязываетъ насъ считать одну изъ этихъ переменныхъ или какую бы то ни было функцію отъ той или другой изъ нихъ за главную переменную. Введеніе же производныхъ требуетъ безусловно подобнаго выбора, потому что производная имѣетъ опредѣленный смыслъ только тогда, когда указана и та переменная, отъ которой она взята, и та главная переменная, по которой она взята. Наоборотъ, изъ уравненія:

$$dy = \varphi'(x) dx, \quad (A)$$

опредѣляющаго дифференціалъ отъ  $y$ , мы узнаемъ отношеніе дифференціаловъ  $dy$  и  $dx$ , т.-е. отношеніе бесконечно-малыхъ приращеній, какія можно приписать одно-



временно  $x$  и  $y$ ; одинъ изъ этихъ дифференціаловъ произволень, но какой именно,  $dx$  или  $dy$ , изъ соотношенія (1) не видно; дѣйствительно, послѣднее можетъ быть написано въ видѣ:

$$dx = \frac{1}{\varphi'(x)} dy$$

и, слѣдовательно, дифференціалъ отъ переменнѣй  $x$  можетъ быть разсмотрѣнъ какъ функція отъ переменнѣй  $y$ , соотвѣтствующая произвольному значенію  $dy$ .

Болѣе того, дифференціалъ функціи всегда одинъ и тотъ же, какова бы ни была переменная, по которой эта функція выражена. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $y$  есть функція отъ  $u$ , а  $u$ , въ свою очередь, есть функція отъ  $x$ , т.-е. пусть

$$y = \psi(u)$$

и

$$u = \varphi(x).$$

Дифференціалъ отъ  $y$ , если разсматривать  $y$ , какъ функцію отъ  $x$ , есть произведеніе  $dx$  на производную отъ  $y$  (§ 36), равную  $\psi'(u)\varphi'(x)$ ; значить,

$$dy = \psi'(u)\varphi'(x) dx.$$

Съ другой же стороны, дифференціалъ отъ  $y$ , если разсматривать  $y$ , какъ функцію отъ  $u$ , есть

$$dy = \psi'(u) du,$$

что вполнѣ совпадетъ съ предыдущимъ выраженіемъ, стоитъ только въ этомъ послѣднемъ равенствѣ дифференціалъ  $du$  замѣнить его значеніемъ

$$du = \varphi'(x) dx,$$

вытекающимъ изъ самаго опредѣленія  $u$ , какъ функціи отъ  $x$ .

Здѣсь такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, изъ соотношеній:

$$\begin{aligned} du &= \varphi'(x) dx, \\ dy &= \psi'(u) du, \end{aligned}$$

связывающихъ дифференціалы  $dx$ ,  $dy$ ,  $du$  трехъ переменныхъ  $x$ ,  $y$ ,  $u$ , изъ которыхъ каждая выражается черезъ двѣ другія, видно, что одинъ изъ этихъ дифференціаловъ произволень и что отсюда мы можемъ узнавать только отношенія бесконечно-малыхъ приращеній, какія могутъ получить одновременно  $x$ ,  $y$  и  $u$ ; при этомъ не указывается, какую изъ переменныхъ принимать за главную.

§ 49. То же самое замѣчаніе распространяется на какое-угодно число переменныхъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , лишь бы только онѣ были связаны между собою такимъ образомъ, чтобы всѣ ихъ можно было разсматривать, какъ функціи отъ одной изъ нихъ. Принимая  $x$  за главную переменную, получимъ для  $dy$ ,  $dz$ ,  $du$ ,  $dv$ ,  $dw$  значенія:

$$dy = y'dx, \quad dz = z'dx, \quad du = u'dx, \quad dv = v'dx, \quad dw = w'dx,$$

или, что то же самое,

$$\frac{dy}{y'} = \frac{dz}{z'} = \frac{du}{u'} = \frac{dv}{v'} = \frac{dw}{w'} = \frac{dx}{1};$$

не дѣлая новыхъ вычисленій, мы можемъ за главную переменную принять другую изъ данныхъ, хотя бы  $u$ : отношенія дифференціаловъ  $dy, dz, du, dv, dw, dx$  останутся тѣ же, — достаточно будетъ считать  $du$  получающимъ произвольное значеніе взамѣнъ  $dx$ .

Чтобы вычислить производныя различныхъ переменныхъ, взятыя по главной переменной  $u$ , достаточно раздѣлить на  $du$  дифференціалы отъ этихъ переменныхъ. Слѣдовательно, производныя будутъ:

$$\frac{dy}{du} = \frac{y'}{u'}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{z'}{u'}, \quad \frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'}, \quad \frac{dw}{du} = \frac{w'}{u'}, \quad \frac{dx}{du} = \frac{1}{u'};$$

точно такіе же результаты мы получили бы на основаніи теоріи функцій отъ функцій.

#### Частныя производныя функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ

§ 50. Если функція зависитъ отъ нѣсколькихъ переменныхъ, независимыхъ другъ отъ друга, то производную отъ нея можно брать по каждой изъ этихъ переменныхъ, считая при этомъ всѣ остальные за постоянныя. Взятая такимъ образомъ производная называется *частною производною*.

Разысканіе частной производной точно такое же, какъ и производной отъ одной только переменной, и не требуетъ, поэтому, новаго изложенія.

Если  $\varphi(x, y, z)$  есть функція отъ трехъ переменныхъ  $x, y, z$ , то частныя производныя по этимъ тремъ переменнымъ напишутся слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}.$$

Смыслъ этихъ символовъ ясенъ изъ предыдущаго:  $\frac{d\varphi}{dx}$  есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія  $\varphi$  къ соотвѣстственному приращенію  $x$ , при чемъ  $y$  и  $z$  остаются постоянными; также, при вычисленіи  $\frac{d\varphi}{dy}$  постоянными будутъ  $x$  и  $z$ , а при вычисленіи  $\frac{d\varphi}{dz}$  постоянными будутъ  $x$  и  $y$ .

§ 51. Разсматриваемая функція  $\varphi$  можетъ быть выражена безчисленнымъ количествомъ способовъ, потому что вмѣсто переменныхъ  $x, y, z$  можно подставить три новыхъ переменныхъ, которыя были бы опредѣленными функціями отъ первыхъ. Полагая, напр.,

$$\begin{aligned} u &= \psi_1(x, y, z), \\ v &= \psi_2(x, y, z), \\ w &= \psi_3(x, y, z), \end{aligned}$$

мы можемъ функцію  $\varphi$  выразить въ зависимости отъ  $u, v, w$  и, значитъ, можемъ разсуждать о частныхъ производныхъ  $\frac{d\varphi}{du}, \frac{d\varphi}{dv}, \frac{d\varphi}{dw}$ . Далѣе мы увидимъ, что можно вычислять эти производныя, не выражая явно функцію  $\varphi$  въ зависимости отъ новыхъ переменныхъ. Слѣдуетъ, однако, замѣтить теперь же, что для опредѣленія значенія  $\frac{d\varphi}{du}$  недостаточно знать функцію  $\varphi$  и переменную  $u$ . Эта производная зависитъ

также отъ выбора двухъ другихъ переменныхъ  $v$  и  $w$ , которыя необходимы, кромѣ  $u$ , для выраженія  $\varphi$  и которыя должны при дифференцированіи оставаться постоянными.

Разсмотримъ, для примѣра, функцію

$$\varphi = x^2(x + y + z)yz;$$

пишемъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2x(x + y + z)yz + x^2yz.$$

Полагая же

$$x + y + z = u, \quad yz = v,$$

придаемъ функціи  $\varphi$  видъ:

$$\varphi = x^2uv$$

и находимъ:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2xuv = 2x(x + y + z)yz.$$

Отсюда заключаемъ, что одна и та же функція  $\varphi$  можетъ имѣть весьма различныя частныя производныя, взятыя по одной и той же переменной  $x$ , и что эти производныя зависятъ отъ выбора переменныхъ, служащихъ вмѣстѣ съ  $x$  для выраженія  $\varphi$  и остающихся при дифференцированіи постоянными.

§ 52. Предыдущій примѣръ не оставляетъ никакого сомнѣнія относительно вѣрности высказаннаго предложенія. Мы считаемъ, однако, полезнымъ прибавить нѣсколько поясненій для лучшаго усвоенія отмѣченнаго нами различія.

Разсмотримъ, для ясности, функцію отъ двухъ только переменныхъ:

$$z = \varphi(x, y); \quad (1)$$

эта функція  $z$  можетъ быть выражена равнымъ образомъ черезъ  $x$  и какую-нибудь новую переменную, связанную съ двумя первыми даннымъ соотношеніемъ. Пусть эта новая переменная  $u$  опредѣляется уравненіемъ:

$$u = \psi(x, y); \quad (2)$$

изъ уравненій (1) и (2) можно исключить  $y$  и получить соотношеніе вида:

$$z = F(x, u). \quad (3)$$

Производная  $\frac{dz}{dx}$  изъ уравненія (1) есть предѣлъ отношенія приращенія  $z$  къ приращенію  $x$ , когда  $y$  остается постояннымъ.

Производная  $\frac{dz}{dx}$  изъ уравненія (3) есть предѣлъ отношенія приращенія  $z$  къ приращенію  $x$ , когда  $u$  остается постояннымъ.

Съ другой же стороны ясно, что при  $y$  постоянномъ  $u$  — переменная, а при  $u$  постоянномъ  $y$  — переменная; слѣдовательно, оба значенія  $\frac{dz}{dx}$ , выведенныя изъ уравненій (1) и (3), не тождественны по опредѣленію и, понятно, не равны между собою.

Если рассматривать уравнение (1), какъ представляющее поверхность, то  $\frac{dz}{dx}$  явится предѣломъ отношенія приращенія  $z$  къ приращенію  $x$ , когда перемѣщеніе по поверхности происходитъ безъ измѣненія  $y$ , т.-е. происходитъ по части, параллельной плоскости  $ZX$ . Наоборотъ, вывести  $\frac{dz}{dx}$  изъ уравненія (3) значитъ найти отношеніе приращенія  $z$  къ приращенію  $x$ , когда перемѣщеніе по поверхности происходитъ при  $u$ , сохраняющемъ постоянное значеніе, т.-е. по нѣкоторой кривой, зависящей отъ природы функціи  $u$ ; отношеніе же приращенія  $z$  къ приращенію  $x$ , вообще говоря, различно для разнаго рода кривыхъ, какія можно нанести на одной и той же поверхности отъ данной точки. Это настолько справедливо, что выбирая кривую, получаемую отъ пересѣченія поверхности съ плоскостью, параллельною плоскости  $XY$ , для которой  $z$ —постоянно, мы можемъ всегда это отношеніе привести къ нулю. Когда же  $z$  содержитъ двѣ перемѣнныхъ и нѣтъ указаній для выбора той перемѣнной, которую нужно присоединить къ  $x$  и предположить постоянною при разысканіи производной, тогда  $\frac{dz}{dx}$  является неопредѣленнымъ.

#### ДИФФЕРЕНЦІАЛЬ ФУНКЦІИ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 53. Безконечно-малое приращеніе функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ можетъ быть представлено, подобно безконечно-малому приращенію функцій отъ одной только перемѣнной, въ видѣ весьма простаго выраженія, отличающагося отъ истиннаго значенія на безконечно-малую величину высшаго порядка. Разсмотримъ сначала функцію  $\varphi(x, y)$  отъ двухъ перемѣнныхъ, независимыхъ одна отъ другой. Придадимъ каждой изъ этихъ перемѣнныхъ безконечно-малыя приращенія перваго порядка  $h$  и  $k$ , тогда приращеніе для  $\varphi$  будетъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = \varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y) + \varphi(x + h, y) - \varphi(x, y).$$

Но разность

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y)$$

можетъ быть рассмотрѣна, какъ приращеніе функціи  $\varphi(x + h, y)$ , въ которой перемѣнная  $y$  получаетъ приращеніе  $k$ . Въ такомъ случаѣ, пренебрегая (§ 46) безконечно-малыми второго порядка, пишемъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x + h, y) = k\varphi'_y(x + h, y).$$

Точно такъ же, отбрасывая безконечно-малыя второго порядка, находимъ:

$$\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y).$$

Здѣсь  $\varphi'_x$  и  $\varphi'_y$  обозначаютъ производныя отъ  $\varphi$ , взятые соотвѣтственно по  $x$  и по  $y$ .

Итакъ, пренебрегая вездѣ безконечно-малыми второго порядка, имѣемъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = k\varphi'_y(x + h, y) + h\varphi'_x(x, y).$$



А такъ какъ  $\varphi'_y(x+h, y)$  бесконечно-мало отличается отъ  $\varphi'_y(x, y)$ , то произведение на  $k$  разности этихъ выражений можетъ быть отброшено и, пренебрегая всегда бесконечно-малыми порядка выше перваго, можно написать:

$$\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x(x, y) + k\varphi'_y(x, y).$$

§ 54. Предыдущее выражение весьма замѣчательно: оно показываетъ, что для значеній переменныхъ бесконечно-мало отличающихся отъ данныхъ значеній  $x$  и  $y$  приращение функции есть функция первой степени относительно приращеній  $h$  и  $k$ , приписанныхъ соответственно  $x$  и  $y$ . При этомъ, понятно, всегда отбрасываются бесконечно-малыя второго порядка.

Если назвать черезъ  $dx$  и  $dy$  произвольныя приращенія  $h$  и  $k$  и замѣнить въ то же время производныя  $\varphi'_x$  и  $\varphi'_y$  принятыми обозначеніями  $\frac{d\varphi}{dx}$  и  $\frac{d\varphi}{dy}$ , то выражение приращенія функции  $\varphi$  будетъ

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy.$$

Это выражение называется полнымъ дифференціаломъ отъ  $\varphi$ , который принято обозначать черезъ  $d\varphi$ , такъ что, по опредѣленію,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy.$$

Этотъ дифференціалъ  $d\varphi$ , если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, есть приращение функции  $\varphi$ , соответствующее бесконечно-малымъ приращеніямъ  $dx$  и  $dy$ , приписаннымъ соответственно  $x$  и  $y$ .

Необходимо при этомъ замѣтить, что во второй части предыдущаго уравненія числители дробей  $\frac{d\varphi}{dx}$ ,  $\frac{d\varphi}{dy}$  представляютъ различные символы и что ни одинъ изъ нихъ не должно смѣшивать съ полнымъ дифференціаломъ  $d\varphi$ , который пишется точно такъ же.

Числитель въ  $\frac{d\varphi}{dx}$  есть дифференціалъ отъ  $\varphi$ , взятый по одной только переменной  $x$ .

Числитель въ  $\frac{d\varphi}{dy}$  есть дифференціалъ отъ  $\varphi$ , взятый по одной только переменной  $y$ .

Наконецъ, первая часть уравненія есть полный дифференціалъ, представляющій сумму двухъ другихъ.

Неудобно, конечно, писать одинаково количества существенно различныя, но предупрежденный читатель не найдетъ въ этомъ серьезнаго затрудненія.

§ 55. Совершенно такія же разсужденія показываютъ, что бесконечно-малое приращение функции отъ трехъ переменныхъ  $\varphi(x, y, z)$ , когда  $x, y, z$  получаютъ бесконечно-малыя приращенія перваго порядка  $h, k, l$ , можетъ быть представлено, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, въ видѣ

$$\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k + \frac{d\varphi}{dz} l;$$

эта сумма называется *полным* дифференціаломъ при  $h = dx$ ,  $k = dy$ ,  $l = dz$ ; итакъ, по опредѣленію,

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{d\varphi}{dy} dy = \frac{d\varphi}{dz} dz. \quad (1)$$

Когда  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ —бесконечно-малыя первого порядка, то  $d\varphi$  представляетъ, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, приращеніе  $\varphi$ , соотвѣтствующее бесконечно-малымъ приращеніямъ  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  трехъ переменныхъ.

Здѣсь нужно сдѣлать то же замѣчаніе, какъ и въ случаѣ функцій отъ двухъ переменныхъ, именно, что выраженіе  $d\varphi$  въ уравненіи (1) имѣетъ четыре различныхъ значенія.

§ 56. Предыдущая теорема и опредѣленіе распространяются безъ труда на случай какого-угодно числа переменныхъ. Бесконечно-малое приращеніе функцій  $\varphi(x, y, z, u, v)$ , соотвѣтствующее бесконечно-малымъ приращеніямъ  $h, k, l, m, n$  переменныхъ, равно, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка,

$$\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k + \frac{d\varphi}{dz} l + \frac{d\varphi}{du} m + \frac{d\varphi}{dv} n;$$

обозначая въ этой суммѣ приращенія  $h, k, l, m, n$  соотвѣтственно черезъ  $dx, dy, dz, du, dv$ , получаемъ выраженіе:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv,$$

которое называется полнымъ дифференціаломъ отъ  $\varphi$  и обозначается черезъ  $d\varphi$ ; этотъ дифференціалъ можетъ замѣнять приращеніе функцій, если  $dx, dy, dz, du, dv$ —бесконечно-малы.

§ 57. Пусть  $u$  обозначаетъ функцію отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ и, чтобы остановиться на чемъ-нибудь опредѣленномъ, предположимъ, напр., отъ трехъ независимыхъ переменныхъ. Приписывая этимъ послѣднимъ бесконечно-малыя приращенія  $dx, dy, dz$  и отбрасывая бесконечно-малыя второго порядка, приращеніе отъ  $u$  мы выразимъ, по предыдущему, формулою:

$$du = \left(\frac{du}{dx}\right) dx + \left(\frac{du}{dy}\right) dy + \left(\frac{du}{dz}\right) dz,$$

гдѣ  $\left(\frac{du}{dx}\right)$ ,  $\left(\frac{du}{dy}\right)$ ,  $\left(\frac{du}{dz}\right)$  суть три функцій отъ  $x, y, z$ , независящія отъ  $dx, dy$  и  $dz$ . Этотъ результатъ можно изложить еще слѣдующимъ образомъ: придавая  $x, y, z$  и  $u$  одновременно четыре бесконечно-малыхъ приращенія и пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, получаемъ уравненіе первой степени относительно этихъ четырехъ приращеній, изъ которыхъ какія-нибудь три будутъ произвольными.

Очень важно замѣтить, что при такомъ изложеніи исчезаетъ всякое различіе между функціею  $u$  и переменными, отъ которыхъ она зависитъ:  $x, y, z, u$  являются четырьмя переменными, связанными однимъ уравненіемъ, и каждая изъ нихъ можетъ быть рассматриваема, какъ функція трехъ остальныхъ.

Уравнение первой степени, связывающее  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и  $du$ , будучи решено относительно каждого изъ этихъ дифференціаловъ, дастъ производныя для соотвѣтственной перемѣнной, взятыя по тремъ остальнымъ перемѣннымъ, разсмотрѣннымъ какъ независимыя. Если, напр.,

$$du = Pdx + Qdy + Rdz, \quad (1)$$

гдѣ  $u$  разсматривается какъ функція отъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то

$$P = \frac{du}{dx}, \quad Q = \frac{du}{dy}, \quad R = \frac{du}{dz}.$$

Но уравненіе (1) даетъ также:

$$dy = \frac{1}{Q} du - \frac{P}{Q} dx - \frac{R}{Q} dz;$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}, \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dy}}.$$

Первое изъ трехъ послѣднихъ равенствъ очевидно, потому что оба частныя  $\frac{dy}{du}$  и  $\frac{du}{dy}$  выражаютъ отношеніе безконечно-малыхъ приращеній, которыя могутъ принимать одновременно (§ 48)  $y$  и  $u$ , въ то время какъ  $z$  и  $x$  остаются постоянными.

#### Производныя отъ сложныхъ функцій

**§ 58.** Изъ самаго названія: «сложная функція» слѣдуетъ, что это такая функція, которая требуетъ предварительнаго выполненія нѣкоторыхъ дѣйствій надъ другими функціями.

Пусть  $u$  и  $v$  будутъ двѣ функціи отъ перемѣнной  $x$ . Всякая функція вида

$$y = \varphi(u, v)$$

есть сложная функція отъ  $x$ .

Разыщемъ теперь производную отъ сложной функціи. Такая задача была бы болѣе у мѣста сейчасъ послѣ правилъ, относящихся къ нахожденію производныхъ, еслибы рѣшеніе ея не облегчалось тѣми упрощеніями, какія вносятъ теоремы, доказанныя въ предыдущихъ параграфахъ.

Придавая  $x$  безконечно-малое приращеніе  $\Delta x$ , получимъ для  $u$  и  $v$  соотвѣтственно приращенія  $\Delta u$  и  $\Delta v$ ; пренебрегая же безконечно-малыми второго порядка, мы выразимъ приращеніе  $\Delta y$  функціи  $y$  (§ 54) въ видѣ:

$$\Delta y = \frac{d\varphi}{du} \Delta u + \frac{d\varphi}{dv} \Delta v, \quad (1)$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{d\varphi}{du} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{\Delta v}{\Delta x};$$

предѣлы обѣихъ частей послѣдняго уравненія, при  $\Delta x$  стремящемся къ нулю, строго равны между собою, потому что въ уравненіи (1) мы отбросили только бесконечно-малыя второго порядка; слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx}.$$

Точно такъ же, обозначая черезъ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  три функціи отъ  $x$ , для производной отъ сложной функціи  $y = \varphi(u, v, w)$  мы составимъ формулу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dx}.$$

Вообще, производная сложной функціи отъ какого-угодно числа функцій

$$y = \varphi(u, v, w, z, t)$$

выразится формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx} + \frac{d\varphi}{dw} \frac{dw}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dx},$$

что можно прочесть слѣдующимъ образомъ: производная отъ сложной функціи есть сумма производныхъ отъ данной функціи, получаемыхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, при чемъ всякій разъ за измѣняющуюся одновременно съ  $x$  принимается только одна изъ функцій, отъ которыхъ зависитъ данная, а остальные разсматриваются какъ постоянныя; каждая производная отъ данной функціи сводится, такимъ образомъ, на производную функціи отъ функціи.

**§ 59.** Предыдущая теорема можетъ быть приложена къ составленію уже полученныхъ производныхъ отъ произведенія или отъ выраженія вида  $u^v$ .

Разсмотримъ сначала произведеніе:

$$y = u \cdot v \cdot w,$$

гдѣ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обозначаютъ функціи отъ переменнѣй  $x$ . Это произведеніе можно принять за сложную функцію отъ  $u$ ,  $v$  и  $w$  и воспользоваться предыдущею теоремою:

$$\frac{dy}{dx} = vw \frac{du}{dx} + uv \frac{dv}{dx} + uv \frac{dw}{dx},$$

что совпадаетъ съ полученнымъ раньше (§ 39) результатомъ.

Точно такъ же, полагая

$$y = u^v,$$

гдѣ  $u$  и  $v$  обозначаютъ функціи отъ  $x$ , можно  $y$  разсмотрѣть какъ сложную функцію и составить формулу:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx},$$

что вполне согласуется съ полученнымъ раньше (§ 42) результатомъ.



## Производныя отъ неявныхъ функций

§ 60. Подъ именемъ *неявной* функции разумѣютъ всякую, вполне определенную функцию, аналитическое выраженіе которой не дано.

Изъ неявныхъ функций мы рассмотримъ здѣсь только такія, которыя опредѣляются не рѣшенными уравненіями.

Рассмотримъ сначала простѣйшій случай, когда функция  $y$  опредѣляется уравненіемъ между этою функцией и переменною  $x$ ,

$$\varphi(x, y) = 0. \quad (1)$$

Чтобы вывести изъ такого уравненія производную, или, что то же самое, дифференціалъ отъ  $y$ , замѣтимъ, что функция  $\varphi$  будетъ тождественно равна нулю, если предположить  $y$  замѣненнымъ его значеніемъ черезъ  $x$ , а въ такомъ случаѣ дифференціалъ отъ  $\varphi$  будетъ равенъ нулю:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = 0, \quad (2)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

и задача рѣшена.

Непремѣнно слѣдуетъ замѣтить, что уравненіе (2) есть строгое слѣдствіе уравненія (1). Такъ какъ при недостаточно полномъ разсужденіи можно было бы допустить противное, то мы остановимся на этомъ важномъ пунктѣ.

Такъ какъ уравненіе

$$\varphi(x, y) = 0$$

обращается въ тождество при замѣнѣ  $y$  его значеніемъ чрезъ  $x$ , то приращеніе функции  $\varphi$  будетъ строго равно нулю; поэтому, казалось бы, его значеніе

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy,$$

въ которомъ отброшены (§ 53) бесконечно-малыя второго порядка, нельзя принять равнымъ нулю, а только бесконечно-малой второго порядка, такъ что строго было бы

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = \varepsilon, \quad (3)$$

гдѣ  $\varepsilon$  — бесконечно-малая второго порядка. Этого уравненія достаточно для нахождения значенія  $\frac{dy}{dx}$ , потому что  $\frac{\varepsilon}{dx}$  въ предѣлѣ обращается въ нуль, но можно доказать, что  $\varepsilon$  строго равно нулю и что уравненіе (2) имѣетъ мѣсто безъ всякой ошибки. Дѣйствительно, такъ какъ  $y$  есть функция отъ  $x$  (все равно, извѣстная или неизвѣстная), то  $dy$  есть вида  $Kdx$ , а въ такомъ случаѣ первая часть уравненія (2) представляетъ про-

изведеіе  $dx$  на нѣкоторый коэффициентъ-функцію отъ  $x$ ; съ другой же стороны, только при условіи, что этотъ коэффициентъ есть нуль, произведеіе будетъ безконечно-малою порядка выше перваго,—значить, онъ строго равенъ нулю.

§ 61. Дано, напр., уравненіе:

$$f(x, y) = 4y^3 - 3y + \sin x = 0; \quad (1)$$

пишемъ:

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \cos x, \quad \frac{df(x, y)}{dy} = 12y^2 - 3,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3(1 - 4y^2)}. \quad (2)$$

Этотъ результатъ легко повѣрить. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) находимъ  $y = \sin \frac{1}{3} x$ , и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} x,$$

такъ что уравненіе (2) равносильно

$$\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3} x = \frac{\cos x}{3(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{3} x)} = \frac{\cos x}{3[1 - 4(1 - \cos^2 \frac{1}{3} x)]} = \frac{\cos x}{3(4 \cos^2 \frac{1}{3} x - 3)},$$

т.-е.

$$\cos x = 4 \cos^3 \frac{1}{3} x - 3 \cos \frac{1}{3} x,$$

а это — извѣстная формула для косинуса тройной дуги черезъ степени косинуса простой дуги.

§ 62. Переходимъ къ болѣе сложному случаю. Предположимъ, что  $y$  и  $z$  двѣ функціи отъ  $x$ , связанныя съ переменною уравненіями:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Если бы эти уравненія были рѣшены относительно  $y$  и  $z$ , то подставляя въ нихъ вмѣсто  $y$  и  $z$  найденныя значенія, представляющія функціи отъ  $x$ , мы получили бы тождества, первыя части которыхъ имѣли бы, поэтому, дифференціалы строго равны нулю; слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}},$$

а эти уравненія даютъ дифференціалы  $dy$ ,  $dz$ , или, что одно и то же, производныя:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz}}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy}}.$$

§ 63. Ходъ разсужденій остается тотъ же и для бóльшаго числа уравненій, но равнаго всегда числу неизвѣстныхъ функцій. Отношенія дифференціаловъ въ каждомъ случаѣ получаются посредствомъ рѣшенія системы уравненій первой степени, и ничего другого, какъ только эти отношенія, узнать изъ такихъ системъ нельзя, потому что одинъ изъ дифференціаловъ непремѣнно произволенъ.

Если, напр.,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_3(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi_4(x, y, z, u, v) &= 0, \end{aligned}$$

то дифференціалы будутъ связаны уравненіями:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} dx + \frac{d\varphi_1}{dy} dy + \frac{d\varphi_1}{dz} dz + \frac{d\varphi_1}{du} du + \frac{d\varphi_1}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} dx + \frac{d\varphi_2}{dy} dy + \frac{d\varphi_2}{dz} dz + \frac{d\varphi_2}{du} du + \frac{d\varphi_2}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_3}{dx} dx + \frac{d\varphi_3}{dy} dy + \frac{d\varphi_3}{dz} dz + \frac{d\varphi_3}{du} du + \frac{d\varphi_3}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi_4}{dx} dx + \frac{d\varphi_4}{dy} dy + \frac{d\varphi_4}{dz} dz + \frac{d\varphi_4}{du} du + \frac{d\varphi_4}{dv} dv &= 0, \end{aligned}$$

и эти уравненія, опредѣляя отношеніе двухъ какихъ-нибудь изъ этихъ дифференціаловъ, даютъ возможность вычислить производную отъ одной изъ переменныхъ по другой, принимаемой за главную.

§ 64. Разсужденія остаются тѣ же и въ случаѣ неявныхъ функцій, зависящихъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ. При вычисленіи производной отъ функціи по одной изъ переменныхъ всѣ остальные независимыя переменныя будутъ постоянными, иначе говоря, онѣ будутъ входить въ вычисленія, какъ постоянные параметры.

Пусть, напр., двѣ функціи  $u$  и  $v$  отъ  $x$  и  $y$  опредѣляются уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0, \\ \varphi(x, y, u, v) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При вычисленіи производныхъ  $\frac{du}{dx}$  и  $\frac{dv}{dx}$  переменную  $y$  можно принять за постоянную, а это значитъ, что обѣ заданныя функціи будутъ отъ одной только переменной. Точно такъ же, при  $x$  постоянномъ, получимъ  $\frac{du}{dy}$  и  $\frac{dv}{dy}$ .

Производныя  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$  получатся изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а производныя  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dy}$  изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Понятно, что въ уравненіяхъ (2)  $du$  и  $dv$  обозначаютъ не то же самое, что въ уравненіяхъ (3); въ первыхъ дифференціалы взяты по  $x$ , а во вторыхъ—по  $y$ . То, что сказано въ § 48-мъ, здѣсь не приложимо: дифференціалъ функціи не зависитъ отъ переменнѣй, по которой онъ берется, если функція зависитъ отъ одной только переменнѣй и эта послѣдняя замѣнена новою переменнѣй, зависящей отъ нея; здѣсь же обѣ переменныя  $x$  и  $y$ —независимыя и ихъ дифференціалы  $dx$  и  $dy$  находятся въ отношеніи вполне неопредѣленномъ.

§ 65. Можно поступить иначе и вычислить заразъ четыре производныя  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ; для этого нужно принять за неизвѣстныя полные дифференціалы  $du$  и  $dv$ . Если въ уравненіяхъ (1) придать одновременно  $x$  и  $y$  приращенія  $dx$  и  $dy$ , то для  $u$  и  $v$  получатся приращенія, которыя можно, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, принять равными  $du$  и  $dv$  (§ 54); не измѣняя при этомъ функцій  $F$  и  $\varphi$  и пренебрегая вездѣ безконечно-малыми второго порядка, напомнимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Можно, кромѣ того, доказать, что эти уравненія, принятые нами за точныя, съ приближеніемъ до безконечно-малыхъ второго порядка, суть *строго* вѣрны. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $du$  и  $dv$ —дифференціалы, то оба они, по опредѣленію, вида  $Mdx + Ndy$  и, слѣдовательно, первыя части уравненій (4) суть вида

$$Pdx + Qdy,$$

гдѣ  $P$  и  $Q$  будутъ функціями отъ  $x$  и  $y$ ; далѣе, такъ какъ  $dx$  и  $dy$  независимы одинъ отъ другого, то подобная сумма можетъ быть безконечно-малою порядка выше перваго только въ томъ случаѣ, если  $P=0$ ,  $Q=0$ , а въ такомъ случаѣ она строго равна нулю.



Рѣшая уравненія (4) относительно  $du$  и  $dv$ , мы получимъ для этихъ дифференціаловъ значенія вида

$$\begin{aligned} du &= A dx + B dy, \\ dv &= A' dx + B' dy, \end{aligned}$$

откуда по § 57-му

$$\frac{du}{dx} = A, \quad \frac{du}{dy} = B, \quad \frac{dv}{dx} = A', \quad \frac{dv}{dy} = B'.$$

Выполняя вычисленія, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{dF}{dv} - \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, & \frac{du}{dy} &= \frac{\frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{dv} - \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dy}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\frac{dF}{dx} \frac{d\varphi}{du} - \frac{dF}{du} \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}, & \frac{dv}{dy} &= \frac{\frac{d\varphi}{dy} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dy}}{\frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{du} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dv}}. \end{aligned}$$

§ 66. Равнымъ образомъ можно вывести изъ уравненій (4)  $dx$  и  $dy$  въ функціяхъ отъ  $du$  и  $dv$ , и если

$$\begin{aligned} dx &= A_1 du + B_1 dv, \\ dy &= A'_1 du + B'_1 dv, \end{aligned}$$

то

$$\frac{dx}{du} = A_1, \quad \frac{dx}{dv} = B_1, \quad \frac{dy}{du} = A'_1, \quad \frac{dy}{dv} = B'_1.$$

Необходимо замѣтить, что здѣсь не имѣетъ мѣста, какъ въ § 33-мъ, равенство:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, приращенія, отношеніе которыхъ выражается черезъ  $\frac{dx}{du}$ , не одинаковы съ тѣми, которыя входятъ въ  $\frac{du}{dx}$ . При вычисленіи частной производной  $\frac{du}{dx}$  измѣняются  $u$  и  $x$ , а  $y$  остается постояннымъ. Когда же вычисляется  $\frac{dx}{du}$ , то  $x$  разсматривается какъ функція отъ  $u$  и  $v$ , и, слѣдовательно, измѣняются  $x$  и  $u$ , а  $v$  остается постояннымъ; но чтобы  $v$  оставалось постояннымъ, необходимо, чтобы  $y$  измѣнялся, — значитъ, разсматриваемыя измѣненія другія, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ.

Это замѣчаніе очень важно и ошибки, въ которыя можно впасть, не обращая на него вниманія, весьма тяжелы. Приведемъ примѣръ.

Пусть будутъ

$$\begin{aligned} x &= u + v, \\ y &= u - v \end{aligned}$$

данныя соотношенія между  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $v$ ; выводимъ:

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{dx}{du} = 1, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

и равенство:

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

не имѣетъ мѣста.

§ 67. Впрочемъ, существуютъ простыя соотношенія, въ случаѣ функцій отъ двухъ переменныхъ, связывающія производныя  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dx}{dv}$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $\frac{dy}{dv}$  съ обратными имъ производными  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ . Эти соотношенія суть слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{dx}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dx}, \\ 1 &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dy}, \\ 0 &= \frac{dx}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dy}, \\ 0 &= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{dv} \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Доказательство ихъ крайне просто; если предположить  $x$  и  $y$  выраженными въ функціяхъ отъ  $u$  и  $v$ , и затѣмъ замѣнить въ этихъ выраженіяхъ  $u$  и  $v$  ихъ значеніями въ функціяхъ отъ  $x$  и  $y$ , то мы получимъ два тождества, равносильныхъ  $x = x$ ,  $y = y$ , вторыя части которыхъ представляютъ сложныя функціи, содержащія  $u$  и  $v$ , которыя, въ свою очередь, содержатъ  $x$  и  $y$ . Беря, теперь, производныя отъ этихъ тождествъ сначала по  $x$ , потомъ по  $y$ , мы въ первыхъ частяхъ получимъ соотвѣтственно  $\frac{dx}{dx} = 1$ ,  $\frac{dy}{dy} = 1$ ,  $\frac{dx}{dy} = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , вторыя же части дадутъ точно вторыя части формулъ (1).

Не трудно составить подобныя соотношенія для какого-угодно числа функцій, зависящихъ отъ такого же числа переменныхъ.

#### УПРАЖНЕНІЯ

1. Не разсматривая  $\arcsin x$  и  $\arctang x$ , какъ обратныя функціи, найти отъ нихъ производныя посредствомъ формулъ:

$$\begin{aligned} \arcsin(x+h) - \arcsin x &= \arcsin [(x+h)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+h)^2}], \\ \arctang(x+h) - \arctang x &= \arctang \frac{h}{1+hx+x^2}. \end{aligned}$$

2. Доказать, что если  $P$  и  $Q$  обозначаютъ двѣ цѣлыя функціи отъ  $x$ , удовлетворяющія уравненію:

$$\sqrt{1-P^2} = Q\sqrt{1-x^2},$$

то

$$\frac{dP}{\sqrt{1-P^2}} = n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

гдѣ  $n$  обозначаетъ цѣлое число.

3. Полагая  $y = \frac{1}{x}$ , находимъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 0.$$

4. Полагая  $x = \frac{y\sqrt{2}}{1-y^4}$ , находимъ:

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

5. Обозначая через  $\varphi$  функцію отъ четырехъ переменныхъ  $x, y, u, v$ , однородную и второй степени относительно  $u$  и  $v$ , полагая

$$\frac{d\varphi}{du} = p, \quad \frac{d\varphi}{dv} = q$$

и рассматривая  $\varphi$  какъ функцію отъ  $x, y, p$  и  $q$ , находимъ:

$$\frac{d\varphi}{dp} = u, \quad \frac{d\varphi}{dq} = v, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\right), \quad \frac{d\varphi}{dy} = -\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

при чемъ  $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)$  и  $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)$  суть производныя отъ  $\varphi$  по  $x$  и по  $y$ , когда функція выражена въ  $x, y, u$  и  $v$ .

6. *Обобщеніе предыдущей теоремы.* Пусть  $\varphi$  обозначаетъ функцію отъ  $2n$  переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_n$ , однородную и второй степени относительно  $n$  послѣднихъ изъ этихъ переменныхъ; если положить

$$\frac{d\varphi}{du_1} = p_1, \quad \frac{d\varphi}{du_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{d\varphi}{du_n} = p_n$$

и выразить  $\varphi$  въ функціи отъ  $x_1, x_2, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ , то при всякомъ цѣломъ  $k$

$$\frac{d\varphi}{dp_k} = u_k, \quad \frac{d\varphi}{dx_k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx_k}\right).$$

7. Если  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$z = \frac{[y - \varphi(\alpha)]^2}{\varphi'(\alpha)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)},$$

то, какова бы ни была функція  $\varphi(\alpha)$ ,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = z.$$

8. Если  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$[z - \varphi(\alpha)]^2 = x^2(y^2 - \alpha^2),$$

$$[z - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) = \alpha x^2,$$

то, какова бы ни была функція  $\varphi(\alpha)$ ,

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = xy.$$


---

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### Функциональный определитель

#### ОПРЕДЛЕНИЕ ОПРЕДЛИТЕЛЕЙ

§ 68. При рѣшеніи такой системы уравненій первой степени, гдѣ число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, значенія для этихъ послѣднихъ получаются въ видѣ дробей съ общимъ знаменателемъ, который называется *опредлителемъ* системы коэффициентовъ. По этому опредѣленію, всякій разъ какъ система изъ  $n^2$  количествъ расположена группами въ  $n$  строкъ, каждая изъ которыхъ содержитъ  $n$  изъ этихъ количествъ, представляется случай разсматривать *опредлитель* системы. Для обозначенія опредѣлителя поступаютъ обыкновенно такъ: коэффициенты, служащіе для его составленія, размѣщаютъ въ видѣ квадрата и съ лѣвой стороны послѣдняго ставятъ букву D; напр.,

$$D \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba';$$

$$D \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' - ac'b'' + bc'a'' - ba'c'' + ca'b'' - cb'a''.$$

Теорія опредѣлителей входитъ въ алгебраическій анализъ. Мы напомнимъ только основныя теоремы, которыя понадобятся намъ въ этой главѣ.

§ 69. Чтобы *опредлитель* равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы существовала одна и та же линейная зависимость между всеми членами въ каждой изъ строкъ или въ каждомъ изъ столбцовъ.

Такъ, напр., чтобы

$$0 = D \begin{vmatrix} a''' & b''' & c''' & d''' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$



необходимо и достаточно, чтобы существовали четыре множителя,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , удовлетворяющих системѣ:

$$\begin{aligned}\lambda_1 a + \lambda_2 a' + \lambda_3 a'' + \lambda_4 a''' &= 0, \\ \lambda_1 b + \lambda_2 b' + \lambda_3 b'' + \lambda_4 b''' &= 0, \\ \lambda_1 c + \lambda_2 c' + \lambda_3 c'' + \lambda_4 c''' &= 0, \\ \lambda_1 d + \lambda_2 d' + \lambda_3 d'' + \lambda_4 d''' &= 0.\end{aligned}$$

**§ 70.** Произведение двухъ определителей, составленныхъ изъ одного и того же числа буквъ, выражается также определителемъ.

Пусть, напр., даны два определителя:

$$D \begin{vmatrix} a_1^1, a_2^1, a_3^1, \dots, a_n^1 \\ a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n, a_2^n, a_3^n, \dots, a_n^n \end{vmatrix}, \quad D \begin{vmatrix} b_1^1, b_2^1, b_3^1, \dots, b_n^1 \\ b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots, b_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^n, b_2^n, b_3^n, \dots, b_n^n \end{vmatrix};$$

ихъ произведение равно определителю

$$D \begin{vmatrix} c_1^1, c_2^1, c_3^1, \dots, c_n^1 \\ c_1^2, c_2^2, c_3^2, \dots, c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^n, c_2^n, c_3^n, \dots, c_n^n \end{vmatrix},$$

въ которомъ каждый изъ элементовъ дается уравненіемъ:

$$c_i^k = a_1^k b_i^1 + a_2^k b_i^2 + a_3^k b_i^3 + \dots + a_n^k b_i^n$$

при соответственныхъ значеніяхъ  $i$  и  $k$ , равныхъ послѣдовательно  $1, 2, \dots, n$ .

Объ предыдущія теоремы мы считаемъ хорошо извѣстными и не будемъ, поэтому, останавливаться на ихъ доказательствахъ.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ФУНКЦИОНАЛЬНАГО ОПРЕДѢЛИТЕЛЯ

**§ 71.** Даны  $n$  функций отъ  $n$  независимыхъ переменныхъ:

$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ; составляя производныя отъ этихъ функций по каждой изъ переменныхъ:

$$\begin{aligned}& \frac{d\varphi_1}{dx_1}, \frac{d\varphi_1}{dx_2}, \frac{d\varphi_1}{dx_3}, \dots, \frac{d\varphi_1}{dx_n}, \\ & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, \frac{d\varphi_2}{dx_2}, \frac{d\varphi_2}{dx_3}, \dots, \frac{d\varphi_2}{dx_n}, \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \frac{d\varphi_n}{dx_1}, \frac{d\varphi_n}{dx_2}, \frac{d\varphi_n}{dx_3}, \dots, \frac{d\varphi_n}{dx_n},\end{aligned}$$

замѣчаемъ, что всѣхъ производныхъ будетъ  $n^2$ .

Определитель системы изъ этихъ  $n^2$  производныхъ названъ Якоби функциональнымъ определителемъ; по примѣру нѣкоторыхъ математиковъ мы будемъ обозначать его посредствомъ

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}.$$

Если, напр.,  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  двѣ функціи отъ  $x$  и  $y$ , то по этому обозначенію

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx}.$$

§ 72. Функциональный определитель играетъ, при одновременномъ изученіи нѣсколькихъ функцій отъ такого же числа переменныхъ, роль подобную той, какую играетъ производная при изученіи функціи отъ одной только переменной. Цѣль этой главы указать на эту аналогію, которая ярче раскроется впоследствии.

Производная отъ функціи есть предѣлъ отношенія безконечно-малаго приращенія этой функціи къ соотвѣтственному приращенію переменной.

Функциональный определитель можетъ получить аналогичное опредѣленіе на основаніи слѣдующей теоремы:

Разсматривая  $n$  функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ , каждая изъ которыхъ содержитъ  $n$  переменныхъ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , и приписывая каждой переменной безконечно-малое приращеніе, мы получимъ для каждой функціи соотвѣтственное приращеніе. Выбирая произвольно  $n$  различныхъ системъ приращеній для переменныхъ, мы получимъ  $n$  системъ соотвѣтственныхъ приращеній для функцій. Функциональный определитель равенъ отношенію определителя системы приращеній функцій къ определителю соотвѣтственной системы приращеній переменныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\begin{array}{c} d_1x_1, d_1x_2, \dots, d_1x_n, \\ d_2x_1, d_2x_2, \dots, d_2x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ d_nx_1, d_nx_2, \dots, d_nx_n \end{array}$$

будутъ  $n$  системъ безконечно-малыхъ приращеній, приписанныхъ послѣдовательно  $n$  переменнымъ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ; приращеніе функціи  $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  будетъ вида (§ 56):

$$d_n\varphi_i = \frac{d\varphi_i}{dx_1} d_kx_1 + \frac{d\varphi_i}{dx_2} d_kx_2 + \dots + \frac{d\varphi_i}{dx_n} d_kx_n,$$

что дастъ всѣ разсматриваемыя приращенія, стоитъ только въ этомъ послѣднемъ равенствѣ придать указателямъ  $k$  и  $i$  всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до  $n$  въ послѣдовательномъ порядкѣ; но по этому выраженію для  $d_n\varphi_i$  видно (§ 70), что определитель системы:

$$\left. \begin{array}{c} d_1\varphi_1, d_1\varphi_2, \dots, d_1\varphi_n, \\ d_2\varphi_1, d_2\varphi_2, \dots, d_2\varphi_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ d_n\varphi_1, d_n\varphi_2, \dots, d_n\varphi_n \end{array} \right\} \quad (A)$$

есть произведение двух других определителей слѣдующихъ системъ:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \dots & \dots & \dots & \frac{d\varphi_1}{dx_n}, \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \dots & \dots & \dots & \frac{d\varphi_2}{dx_n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2}, & \dots & \dots & \dots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{array} \right\} \quad (B)$$

и

$$\left. \begin{array}{ccccccc} d_1x_1, & d_1x_2, & \dots & \dots & \dots & d_1x_n, \\ d_2x_1, & d_2x_2, & \dots & \dots & \dots & d_2x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_nx_1, & d_nx_2, & \dots & \dots & \dots & d_nx_n \end{array} \right\} \quad (C)$$

Отсюда заключаемъ, что определитель системы (B), т.-е. функциональный определитель данной системы функций, есть отношеніе определителя системы (A) къ определителю системы (C), иначе говоря, отношеніе определителя системы безконечно-малыхъ приращеній функций къ определителю соотвѣтственной системы приращеній переменныхъ. Итакъ, теорема доказана.

#### СЛУЧАЙ, КОГДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ РАВЕНЪ НУЛЮ

**§ 73.** Когда функція отъ переменной является постоянною величиной, ея производная равна нулю. Для системы функций существуетъ аналогичная теорема:

*Когда нѣсколько функций не вполне независимы одна отъ другой, т.-е. когда существуетъ между ними постоянное соотношеніе, ихъ определитель равенъ нулю.*

Покажемъ сначала, въ чемъ заключается аналогія этихъ столь различно выраженныхъ теоремъ.

Когда функція  $\varphi(x)$  отъ одной только переменной не есть постоянная, то каждому значенію функціи соотвѣтствуетъ определенное значеніе переменной, и уравненіе

$$\varphi(x) = y \quad (1)$$

можетъ быть рѣшено относительно  $x$ . Наоборотъ, если функція  $\varphi$  есть величина постоянная, то, задавая ея значеніе, мы не определяемъ  $x$ , отъ котораго это значеніе не зависитъ, и уравненіе (1) не можетъ быть рѣшено относительно  $x$ .

Разсмотримъ теперь двѣ функціи  $\varphi_1(x_1, x_2)$ ,  $\varphi_2(x_1, x_2)$ , при чемъ положимъ

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2) = y_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2) = y_2; \end{array} \right\} \quad (2)$$

оба эти уравненія могутъ быть рѣшены относительно  $x_1$  и  $x_2$ , лишь бы только функціи  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  были различны и независимы; но если между ними существуетъ постоянное соотношеніе, то одно изъ уравненій явится слѣдствіемъ другого, или же







Определитель системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , составленный по  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , равен отношению определителя системы (C) къ определителю системы (B).

Наконецъ, определитель системы  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , составленный по  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , равен отношению определителя системы (B) къ определителю системы (A). Отсюда очевидно, что первый изъ этихъ трехъ определителей равенъ произведенію двухъ другихъ. Такимъ образомъ теорема доказана.

#### ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ СИСТЕМЫ ОБРАТНЫХЪ ФУНКЦІЙ

**§ 76.** Производная отъ функціи  $\varphi(x)$ , взятая по  $x$ , есть обратная (§ 33) производной отъ  $x$ , взятой по  $\varphi$ .

Эта теорема обобщается слѣдующимъ образомъ.

Если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  суть функціи отъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , обратно, могутъ быть разсматриваемы какъ функціи отъ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Определитель функцій  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , составленный по  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , равенъ единицѣ, раздѣленной на определитель функцій  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , составленный по переменнымъ  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Пусть, въ самомъ дѣлѣ,

$$\left. \begin{array}{cccc} d_1 x_1, & d_1 x_2, & \dots, & d_1 x_n, \\ d_2 x_1, & d_2 x_2, & \dots, & d_2 x_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ d_n x_1, & d_n x_2, & \dots, & d_n x_n \end{array} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{array}{cccc} d_1 \varphi_1, & d_1 \varphi_2, & \dots, & d_1 \varphi_n, \\ d_2 \varphi_1, & d_2 \varphi_2, & \dots, & d_2 \varphi_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots, \\ d_n \varphi_1, & d_n \varphi_2, & \dots, & d_n \varphi_n \end{array} \right\} \quad (B)$$

будутъ  $n$  системъ приращеній переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $n$  системъ соответственныхъ приращеній  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ . Определитель системы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , составленный по переменнымъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , равенъ (§ 71) отношению определителя системы (B) къ определителю системы (A); определитель же системы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , составленный по  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  какъ переменнымъ, равенъ отношению определителя системы (A) къ определителю системы (B), что и доказываетъ нашу теорему.

**Примѣръ.** — Если изъ двухъ заданныхъ уравненій:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x, y) = u, \\ \varphi_2(x, y) = v \end{array} \right\} \quad (1)$$

выводятся два слѣдующихъ:

$$\left. \begin{array}{l} x = \psi_1(u, v), \\ y = \psi_2(u, v), \end{array} \right\} \quad (2)$$

то существуетъ соотношение:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du}}. \quad (3)$$

Эту формулу можно повѣрить непосредственно при помощи правилъ, данныхъ (§ 54) для дифференцированія неявныхъ функцій.

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы вычислить  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $\frac{dx}{dv}$ ,  $\frac{dy}{dv}$ , исходя изъ уравненій (1), беремъ производныя отъ этихъ уравненій сначала по  $u$ , принимая  $v$  за постоянную, а затѣмъ по  $v$ , принимая  $u$  за постоянную. Находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{dy}{du} &= 1, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{dy}{du} &= 0, \\ \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{dy}{dv} &= 0, \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{dy}{dv} &= 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{\frac{d\varphi_2}{dy}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, & \frac{dx}{dv} &= \frac{-\frac{d\varphi_1}{dy}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{-\frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}, & \frac{dy}{dv} &= \frac{\frac{d\varphi_1}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dy} - \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dx}}; \end{aligned}$$

подставляя, наконецъ, эти значенія въ формулу (3), получаемъ тождество.

#### ПРИВЕДЕНІЕ ОПРЕДѢЛИТЕЛЯ КЪ ОДНОЧЛЕНУ

§ 77. Теорема, посредствомъ которой было преобразовано (§ 71) опредѣленіе опредѣлителя, оставляетъ произвольными  $n$  системъ безконечно-малыхъ приращеній, приписываемыхъ переменнымъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; отсюда слѣдуетъ, что опредѣлителю можно придать нѣсколько различныхъ видовъ: мы ограничимся наиболѣе замѣчательнымъ случаемъ, когда опредѣлитель приводится къ одночлену.

Изъ  $2n$  количествъ,  $x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ , по своему произволу можно выбрать  $n$ , остальные опредѣляются. Если, поэтому, предположить, что  $n-1$  изъ нихъ остаются постоянными, то всѣ остальные должны будутъ измѣняться одновременно и отношенія ихъ безконечно-малыхъ приращеній будутъ опредѣленными. Пользуясь этимъ замѣчаніемъ, предположимъ, что  $n$  системъ одновременныхъ приращеній, приписываемыхъ переменнымъ, будутъ взяты въ слѣдующей таблицѣ:

$$\begin{array}{cccccccc} d_1 x_1, & d_1 x_2, & \dots, & d_1 x_n, & d_1 f_1, & 0, & 0, & \dots, & 0, \\ 0, & d_2 x_2, & \dots, & d_2 x_n, & d_2 f_1, & d_2 f_2, & 0, & \dots, & 0, \\ 0, & 0, & d_3 x_3, & \dots, & d_3 x_n, & d_3 f_1, & d_3 f_2, & d_3 f_3, & \dots, & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, d_n x_n, & d_n f_1, & d_n f_2, & d_n f_3, & \dots, & d_n f_n. \end{array} \quad (A)$$

Первая строка этой таблицы показываетъ, что первыя безконечно-малыя приращенія, приписываемыя  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , таковы, что  $f_2, f_3, \dots, f_n$  не измѣняются, а это, какъ обыкновенно говорятъ, опредѣляетъ вполне ихъ отношенія. Вторая строка показываетъ, что вторыя выбранныя приращенія, т.-е.  $d_2x_1, d_2x_2, \dots, d_2x_n$ , таковы, что  $f_3, f_4, \dots, f_n$  не измѣняются; при этомъ, сверхъ того, предполагается, что  $d_2x_1 = 0$ . Это также опредѣляетъ отношенія всѣхъ приращеній, потому что, какъ и въ предыдущемъ случаѣ,  $n - 1$  рассматриваемыхъ количествъ предполагаются постоянными. Наконецъ, послѣдняя строка показываетъ, что въ  $n$ -ой системѣ приращеній  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  остаются постоянными.

Воспользовавшись свободой выбора одновременных приращений именно такъ, какъ сейчасъ показано, мы получимъ (§ 71) выраженіе для опредѣлителя системы, для опредѣлитель количествъ, содержащихся въ квадратѣ справа, на опредѣлитель количествъ, содержащихся въ квадратѣ слѣва; вслѣдствіе же нулевыхъ членовъ каждый изъ этихъ опредѣлителей приводится, очевидно, къ произведенію членовъ, расположенныхъ по діагонали; отсюда, ихъ отношеніе равно

$$\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1} \frac{d_2 f_2}{d_2 x_2} \frac{d_3 f_3}{d_3 x_3} \cdots \frac{d_n f_n}{d_n x_n} = \left( \frac{d_1 f_1}{d_1 x_1} \right) \left( \frac{d_2 f_2}{d_2 x_2} \right) \cdots \left( \frac{d_n f_n}{d_n x_n} \right). \quad (1)$$

Итакъ, опредѣлитель приводится къ одночлену, что и требовалось показать.

Чтобы понять значеніе отношеній  $\left(\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}\right), \left(\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}\right), \dots, \left(\frac{d_n f_n}{d_n x_n}\right)$ , нужно вернуться къ таблицѣ (А). Изъ этой таблицы видно, что  $\frac{d_1 f_1}{d_1 x_1}$  есть отношеніе приращенія  $f_1$  къ приращенію  $x_1$ , когда  $f_2, f_3, \dots, f_n$  предполагаются постоянными,—поэтому необходимо, для вычисленія, выразить  $f_1$  въ функціи переменныхъ  $x_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  и отъ полученнаго результата взять производную по  $x_1$ ; точно такъ же,  $\frac{d_2 f_2}{d_2 x_2}$  есть отношеніе приращенія  $f_2$  къ приращенію  $x_2$ , когда  $x_1, f_3, f_4, \dots, f_n$  остаются постоянными,—поэтому необходимо, для вычисленія, выразить  $f_2$  въ функціи отъ переменныхъ  $x_1, x_2, f_3, \dots, f_n$  и отъ полученнаго результата взять производную по  $x_2$ . Продолжая такимъ образомъ, увидимъ, что для вычисленія множителей произведенія (1) нужно представить уравненія, связывающія 2n переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ , въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} f_1 &= F_1(x_1, f_2, f_3, \dots, f_n), \\ f_2 &= F_2(x_1, x_2, f_3, \dots, f_n), \\ f_3 &= F_3(x_1, x_2, x_3, f_4, \dots, f_n), \\ &\vdots \\ f_n &= F_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \end{aligned}$$

и произведение производных  $\frac{df_1}{dx_1}, \frac{df_2}{dx_2}, \dots, \frac{df_n}{dx_n}$  будет тогда искомым определитель.



Какъ приложеніе, разыщемъ опредѣлитель слѣдующей системы:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta \sin \psi, \\z &= \rho \sin \theta \cos \psi,\end{aligned}$$

гдѣ  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\psi$  — независимыя переменныя.

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}, \\x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta \sin \psi;\end{aligned}$$

въ этомъ видѣ они даютъ выраженіе для  $z$  только съ одною изъ переменныхъ  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , для  $x$  — съ двумя и, наконецъ, для  $y$  со всѣми тремя. Слѣдовательно, опредѣлитель, въ силу предыдущей теоремы, будетъ

$$\frac{dz}{d\rho} \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{dy}{d\psi} = \frac{\rho}{z} \cdot (-\rho \sin \theta) \rho \sin \theta \cos \psi = -\rho^2 \sin \theta.$$

#### УПРАЖНЕНІЯ

1. Чтобы двѣ функціи отъ какого-угодно числа переменныхъ зависѣли одна отъ другой, необходимо и достаточно, чтобы ихъ частныя производныя, взятые по тѣмъ же переменнымъ, были пропорціональны.

2. Чтобы  $n$  функцій отъ  $n + p$  переменныхъ имѣли между собою соотношеніе, не зависящее отъ этихъ переменныхъ, необходимо и достаточно, чтобы опредѣлители  $n$  функцій, составленные по  $n$  какому-угодно изъ этихъ переменныхъ, были равны нулю.

3. Если два угла  $u$  и  $v$  связаны съ двумя другими углами  $\theta$  и  $\psi$  и съ тремя постоянными  $m$ ,  $n$ ,  $p$  уравненіями:

$$\frac{\cos u}{m \cos \theta} = \frac{\sin u \cos v}{n \sin \theta \cos \psi} = \frac{\sin u \sin v}{p \sin \theta \sin \psi},$$

то опредѣлитель функцій  $u$  и  $v$ , составленный по  $\theta$  и  $\psi$ , равенъ

$$\frac{mnp \sin \theta}{\sin u (m^2 \cos^2 \theta + n^2 \sin^2 \theta \cos^2 \psi + p^2 \sin^2 \theta \sin^2 \psi)^{3/2}}.$$

4. Пусть  $u_1, u_2, \dots, u_n$  будутъ  $n$  различныхъ функцій отъ  $n$  переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если установить между этими функціями соотношеніе

$$F_1(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

то можно будетъ, въ силу этого соотношенія, выразить одну изъ переменныхъ, напр.  $x_n$ , въ функціи отъ  $n - 1$  остальныхъ и рассмотреть  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ , какъ функціи отъ  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , тогда получимъ:

$$\frac{D(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} = \frac{\frac{dF_1}{du_n}}{\frac{dF_1}{dx_n}} \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

при чемъ производную  $\frac{dF_1}{dx_n}$  нужно брать, имѣя въ виду, что  $u_1, u_2, \dots, u_n$  суть функціи отъ  $x_n$ .



## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### Аналитическая теорія касательныхъ линій и касательныхъ плоскостей

#### УРАВНЕНІЯ КАСАТЕЛЬНОЙ И НОРМАЛИ КЪ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

§ 78. Когда плоская кривая опредѣляется заданнымъ уравненіемъ въ прямолинейныхъ координатахъ  $x$  и  $y$  ея точекъ, то можно найти (§ 24) уравненіе касательной къ этой кривой. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли, что угловой коэффициентъ этой касательной въ точкѣ, координаты которой суть  $x$  и  $y$ , есть производная  $\frac{dy}{dx}$  отъ  $y$ , взятая по  $x$ , и въ предыдущихъ главахъ данъ способъ для ея вычисленія.

Называя черезъ  $t$  и  $u$  координаты какой-угодно точки касательной, точка касанія которой имѣетъ координаты  $x$  и  $y$ , составимъ для этой касательной уравненія:

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x). \quad (1)$$

Для нормали, которая перпендикулярна къ касательной и также проходитъ черезъ точку, координаты которой суть  $x$  и  $y$ , уравненіе будетъ:

$$u - y = -\frac{dx}{dy}(t - x), \quad (2)$$

или, что одно и то же,

$$(u - y) dy + (t - x) dx = 0. \quad (3)$$

§ 79. Уравненіе нормали можно получить болѣе непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $t$  и  $u$  будутъ координаты точки на нормали; принимая эту точку за центръ круга, проходящаго черезъ основаніе  $x$ ,  $y$  нормали, получимъ для него уравненіе вида:

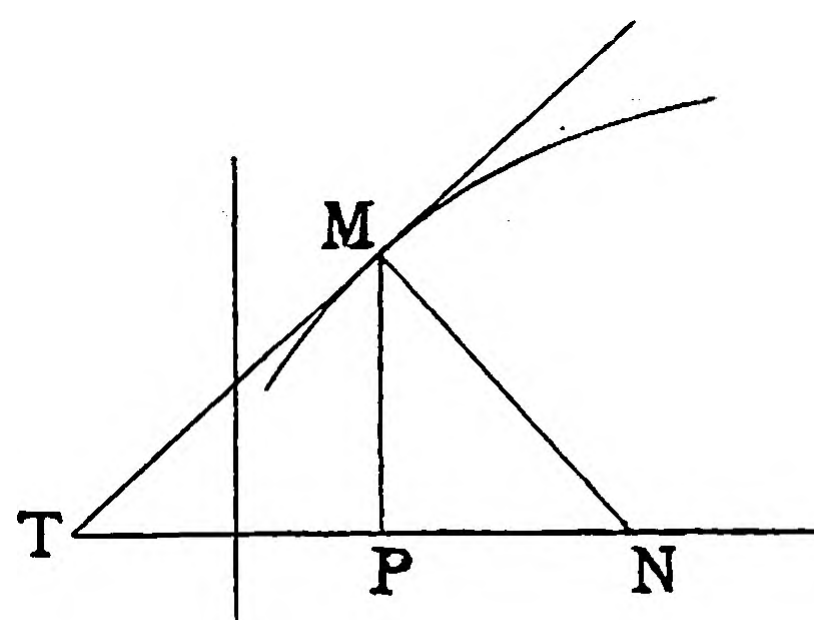
$$(y - u)^2 + (x - t)^2 = R^2, \quad (1)$$

гдѣ  $x$  и  $y$  обозначаютъ координаты какой-угодно изъ его точекъ. Дифференцируя это уравненіе, находимъ:

$$(y - u) dy + (x - t) dx = 0, \quad (2)$$

и такъ какъ этотъ кругъ, очевидно, касается данной кривой въ точкѣ, координаты которой суть  $x$  и  $y$ ; то отношеніе  $\frac{dy}{dx}$  въ этой точкѣ будетъ одинаково какъ для круга, такъ и для кривой; поэтому,  $dy$  и  $dx$  въ уравненіи (2) можно относить къ кривой, а въ такомъ случаѣ оно ничѣмъ не отличается отъ найденнаго выше (§ 78) уравненія между  $t$  и  $u$ .

§ 80. Опуская, при прямоугольныхъ осяхъ, изъ точки касанія  $M$  ординату  $MP$ , получаемъ линію  $PT$  (черт. 16), заключенную между точкою  $P$  и точкою пересѣченія касательной съ осью  $X$ -овъ; эта линія называется *подкасательною*. Ее сокращенно обо-



Черт. 16.

значають черезъ  $S_t$ . Также, если  $MN$ —нормаль, то  $PN$ —*поднормаль*; мы будемъ ее обозначать черезъ  $S_n$ . Наконецъ,  $MT$  и  $MN$  называются соотвѣтственно *касательною* и *нормальною*. Выраженія для этихъ четырехъ линій получаются непосредственно по уравненіямъ касательной и нормали и будутъ:

$$PT = S_t = y \frac{dx}{dy}, \quad MT = t = \sqrt{y^2 + y^2 \left( \frac{dx}{dy} \right)^2} = y \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2},$$

$$PN = S_n = y \frac{dy}{dx}, \quad MN = N = \sqrt{y^2 + y^2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = y \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Подкасательная и поднормаль имѣютъ точно тотъ знакъ, который даютъ предыдущія формулы, если согласиться считать подкасательную за положительную, когда линія  $TP$  направлена въ сторону положительныхъ  $X$ -овъ, и поднормаль за положительную, когда  $PN$  направлена въ ту же сторону. Мы не будемъ останавливаться на этомъ изслѣдованіи, не представляющемъ ни затрудненій, ни интереса.

§ 81. Часто бываетъ нужно вводить въ вычисленія углы, составленные касательною или нормальною къ кривой съ осями координатъ, при чемъ необходимо избѣгать всякой двусмысленности въ выборѣ направленія, въ которомъ отсчитываются эти углы.

Угловой коэффициентъ уравненія касательной есть  $\frac{dy}{dx}$ ; поэтому, если  $\alpha$  обозначаетъ уголъ, составленный положительнымъ направленіемъ оси  $X$ -овъ съ направленіемъ касательной выше этой оси, то

$$\text{tang } \alpha = \frac{dy}{dx}. \quad (1)$$



Направленіе нормали опредѣлится углами  $\lambda$  и  $\mu$ , которые составляютъ съ осями перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на касательную. Такъ какъ перпендикуляръ можетъ быть взятъ въ томъ или другомъ направленіи, то углы  $\lambda$  и  $\mu$  будутъ нѣсколько неопредѣленны, и ихъ можно будетъ замѣнить, *оба одновременно*, ихъ пополненіями <sup>1)</sup>. Отношеніе  $\frac{\cos \lambda}{\cos \mu}$ , тѣмъ не менѣе, вполне опредѣленно, и будетъ равно, какое бы мы ни выбрали изъ двухъ противоположныхъ направленій,

$$\frac{\cos \mu}{\cos \lambda} = - \frac{dx}{dy}, \quad (2)$$

что приводится къ равенству:

$$\cos \lambda dx + \cos \mu dy = 0. \quad (3)$$

По уравненію кривой

$$F(x, y) = 0$$

составляемъ для опредѣленія отношенія  $\frac{dy}{dx}$  уравненіе:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0; \quad (4)$$

отсюда также заключаемъ, что уравненіе (2) равносильно

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\cos \lambda} = \frac{\frac{dF}{dy}}{\cos \mu}, \quad (5)$$

т.-е. что косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью къ плоской кривой съ осями координатъ, пропорціональны частнымъ производнымъ отъ первой части уравненія кривой.

Такъ какъ сумма квадратовъ этихъ косинусовъ, для какой-угодно прямой, равна единицѣ, то

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \pm \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}, \\ \cos \mu &= \pm \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

при чемъ знаки въ силу уравненія (5) должны быть взяты или заразъ верхніе, или заразъ нижніе.

---

<sup>1)</sup> До 180°. *Прим. перев.*

§ 82. Иногда на нормали къ кривой различаютъ направленія вѣдшнее и внутреннее по отношенію къ этой кривой. Чтобы опредѣлить эти два направленія, нужно представить себѣ, что кривая, уравненіе которой есть

$$F(x, y) = 0,$$

дѣлитъ плоскость на двѣ части: вѣдшнюю по отношенію къ кривой, опредѣляемую условіемъ  $F(x, y) > 0$ , и внутреннюю по отношенію къ кривой, опредѣляемую условіемъ  $F(x, y) < 0$ . Называя теперь *внѣшней* ту нормаль, которая направлена къ части плоскости, вѣдшной относительно кривой, для угловъ  $\lambda$  и  $\mu$ , составляемыхъ этою нормалью съ положительными направленіями осей, всегда будемъ имѣть:

$$\cos \lambda = + \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}},$$

$$\cos \mu = + \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если мы отложимъ на вѣдшной нормали безконечно-малую длину  $\varepsilon$ , то координаты ея конца будутъ:

$$x + \varepsilon \cos \lambda, \quad y + \varepsilon \cos \mu.$$

А такъ какъ по § 53-му, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, мы можемъ написать:

$$F(x + \varepsilon \cos \lambda, y + \varepsilon \cos \mu) = F(x, y) + \frac{dF}{dx} \varepsilon \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \varepsilon \cos \mu,$$

и такъ какъ  $F(x, y) = 0$ , то вторая часть приведется къ

$$\varepsilon \left( \frac{dF}{dx} \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \cos \mu \right),$$

а это, послѣ замѣны  $\cos \lambda$  и  $\cos \mu$  ихъ значеніями (§ 81), дастъ:

$$F(x + \varepsilon \cos \lambda, y + \varepsilon \cos \mu) = \pm \varepsilon \left[ \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}} \right] =$$

$$= \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2}.$$

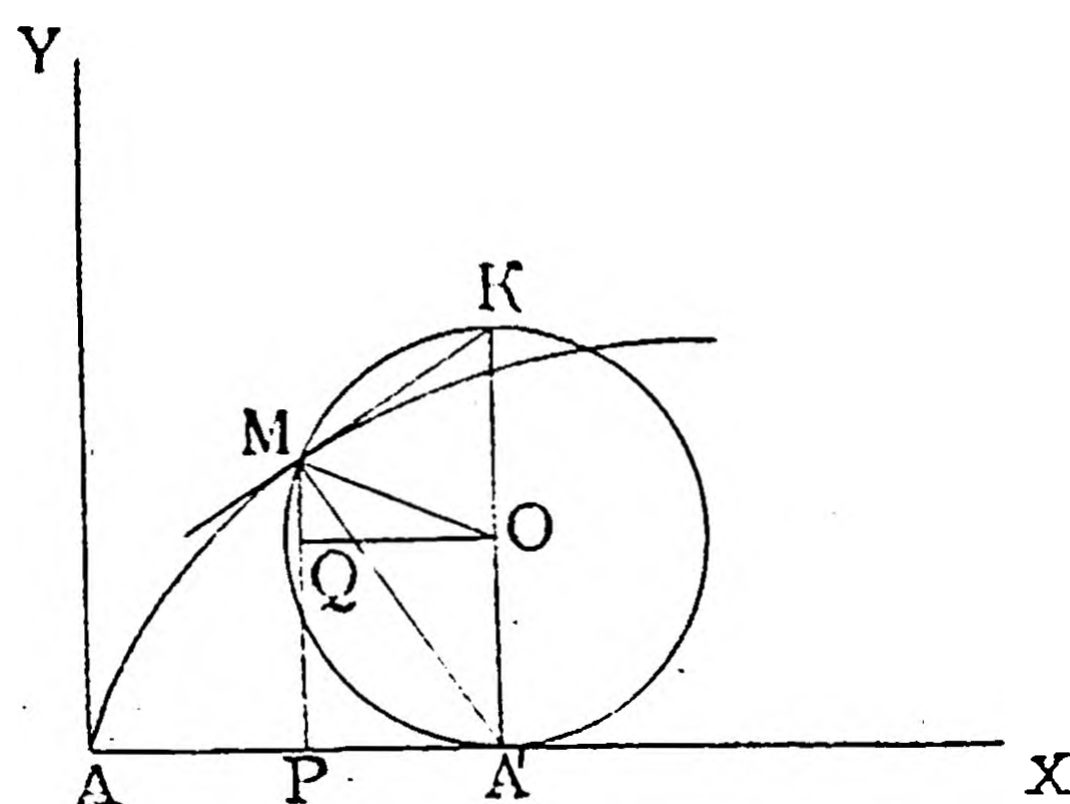
По предположенію конецъ длины  $\varepsilon$  занимаетъ вѣдшнее положеніе относительно кривой и, слѣдовательно, соотвѣтственное значеніе  $F$  положительно. Отсюда заключаемъ, что во второй части нужно выбрать верхній знакъ, а это, въ свою очередь, требуетъ, чтобы были выбраны верхніе знаки и въ значеніяхъ  $\cos \lambda$  и  $\cos \mu$ .

## ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ

§ 83. Приведемъ нѣсколько примѣровъ опредѣленія касательныхъ, выбирая, по преимуществу, задачи уже разсмотрѣнныя съ геометрической точки зрѣнія.

### Задача I. — Касательная къ циклоидѣ.

Пусть будутъ:  $AX$  (*черт.* 17) прямая, по которой катится производящій кругъ,  $A$ —точка касанія этого круга въ его первоначальномъ положеніи,  $A'$ —точка касанія



Черт. 17.

круга въ слѣдующемъ его положеніи,  $M$  — соотвѣтственное положеніе производящей точки. По самому опредѣленію движенія

$$A'M = A'A.$$

Если взять за ось  $X$ -овъ линію  $AX$ , а за ось  $Y$ -овъ перпендикуляръ, возставленный въ точкѣ  $A$ , то координаты точки  $M$  будутъ:

$$MP = y, \quad PA = x;$$

дальше, обозначая через  $a$  радиусъ круга и через  $u$  уголъ  $MOA'$ , находимъ:

$$\begin{aligned} y &= QP + MQ = a - a \cos u, \\ x &= AA' - OQ = au - a \sin u. \end{aligned}$$

Два уравненія:

$$y = a(1 - \cos u), \quad (1)$$

$$x = a(u - \sin u) \quad (2)$$

дадутъ, по исключеніи  $u$ , уравненіе циклоиды. Это исключеніе затрудненій не представитъ; дѣйствительно, изъ перваго уравненія находимъ значеніе для  $u$ :

$$u = \arccos \left( 1 - \frac{y}{a} \right),$$

и вносимъ его во второе уравненіе, замѣчая при этомъ, что

$$\sin u = \sqrt{\frac{2y}{a} - \frac{y^2}{a^2}}.$$

Но гораздо проще непосредственно дифференцировать уравнения (1) и (2). Выводимъ:

$$\begin{aligned} dy &= a \sin u \, du, \\ dx &= a(1 - \cos u) \, du, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \cot \frac{1}{2} u.$$

Касательная, имѣющая угловой коэффициентъ  $\cot \frac{1}{2} u$ , образуетъ съ осью  $X$ -овъ уголъ, равный  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} u$ , а нормаль съ тою же осью образуетъ уголъ  $\frac{1}{2} u$ . Отсюда заключаемъ, согласно сказанному въ § 14-омъ, что нормаль есть  $MA'$ , а касательная  $MK$ .

Изъ уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u$$

можно вывести выраженіе  $\frac{dy}{dx}$  въ функции отъ  $y$ , что намъ понадобится дальше. Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{a - y}{a}, \\ \sin u &= \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}, \\ 1 - \cos u &= \frac{y}{a}; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} u = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

Это уравненіе приметъ другой видъ, если, проведя новыя оси, параллельныя старымъ, и измѣнивъ направленіе оси  $Y$ -овъ на обратное, мы перенесемъ начало координатъ въ вершину кривой, ордината которой есть  $2a$ . Формулы перехода будутъ:

$$y = 2a - y_1, \quad x = x_1 + \pi a,$$

и мы можемъ написать, опуская указатель при  $y$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}}.$$

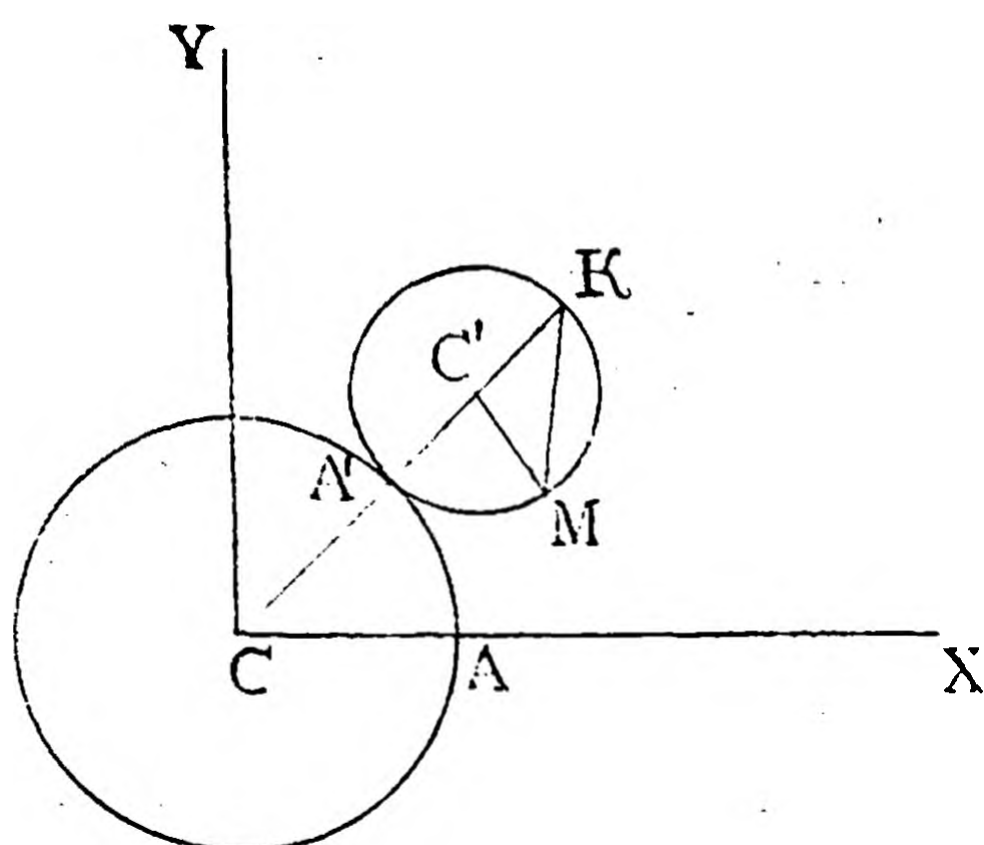
## Задача II. — Касательная къ эпициклоиду.

Эпициклоида есть кривая, описываемая точкою окружности подвижного круга, катящегося по неподвижному такимъ образомъ, что дуги двухъ окружностей, точки которыхъ послѣдовательно соприкасаются, постоянно равны по длинѣ.

Разсмотримъ кругъ радіуса  $r$ , катящійся по неподвижной окружности радіуса  $R$ . Пусть  $A$  (черт. 18) есть начальное положеніе одной изъ точекъ катящейся окружности; когда эта окружность при своемъ движеніи коснется неподвижной окружности въ



точкѣ  $A'$ , точка  $A$  совпадетъ съ точкою  $M$  въ концѣ дуги  $A'M$ , равной по длинѣ  $A'A$ . Если за оси координатъ принять два прямоугольныхъ діаметра  $CX$  и  $CY$  неподвижной



Черт. 18.

окружности, первый изъ которыхъ  $CX$  проходитъ черезъ точку  $A$ , и положить  $A'CA = \varphi$ , а, значитъ,  $A'C'M = \varphi \frac{R}{r}$ , то для координатъ  $x, y$  точки  $M$  получимъ выраженія:

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \cos \varphi - r \cos \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right), \\ y &= (R + r) \sin \varphi - r \sin \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} dy &= (R + r) \left[ \cos \varphi - \cos \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) \right] d\varphi, \\ dx &= (R + r) \left[ -\sin \varphi + \sin \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) \right] d\varphi \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \varphi - \cos \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right)}{\sin \left( \varphi + \frac{R\varphi}{r} \right) - \sin \varphi} = \operatorname{tang} \left( \varphi + \frac{R\varphi}{2r} \right).$$

Соединивъ теперь точки  $K$  и  $M$ , замѣчаемъ, что прямая  $KM$  составляетъ съ осью  $X$ -овъ точно уголъ  $\varphi + \frac{R\varphi}{2r}$ , иначе говоря, она есть касательная въ точкѣ  $M$ , нормаль же будетъ направлена въ точку  $A'$ .

**Задача III.** — Изъ некоторой точки  $O$  опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой; опредѣлить касательную къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ оснований этихъ перпендикуляровъ.

Чтобы рѣшить эту задачу, геометрическое рѣшеніе которой уже дано въ § 14-омъ, возьмемъ за начало координатъ точку  $O$ ; пусть  $x$  и  $y$  будутъ координаты точки  $M$  плоской кривой. Пишемъ уравненіе касательной  $MP$ :

$$u - y = \frac{dy}{dx} (t - x) \quad (1)$$

и уравненіе перпендикуляра  $OP$ :

$$u = -\frac{dx}{dy} t. \quad (2)$$

Если изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія данной кривой исключить  $y$  и  $x$ , то получится уравненіе кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $P$ , но для опредѣленія касательной это исключеніе не необходимо. Въ самомъ дѣлѣ, исключаемъ изъ уравненій (1) и (2) отношеніе  $\frac{dy}{dx}$  и находимъ между координатами  $u$  и  $t$  точки  $P$  слѣдующее соотношеніе:

$$u - y = -\frac{t}{u}(t - x),$$

или, что одно и то же,

$$u^2 + t^2 = uy + tx; \quad (3)$$

дифференцируемъ это уравненіе:

$$2udu + 2tdt = udy + tdx + ydu + xdt. \quad (4)$$

А такъ какъ по уравненію (2)

$$udy + tdx = 0,$$

то уравненіе (4) приметъ видъ:

$$2udu + 2tdt = ydu + xdt,$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{x}{2} - t}{u - \frac{y}{2}}.$$

Итакъ, искомая касательная, угловой коэффициентъ которой выраженъ черезъ  $\frac{du}{dt}$ , есть перпендикуляръ къ линіи, соединяющей точку  $P$  съ серединою  $OM$ , координаты которой суть  $\frac{x}{2}$  и  $\frac{y}{2}$ . Это равносильно найденному результату (§ 14).

**Задача IV.** — Изъ некоторой точки  $O$  опущены перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой, и каждый изъ нихъ  $OP$  продолженъ до такой точки  $Q$ , что

$$OP \cdot OQ = a^2,$$

гдѣ  $a$  есть данная длина. Найти касательную къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $Q$ .

Геометрическое рѣшеніе этой задачи дано въ § 14-мъ. Анализъ безъ труда приводитъ къ тому же результату. Называя черезъ  $x$  и  $y$  координаты точки касанія  $M$ , составляемъ уравненіе касательной  $MT$ :

$$u - y = \frac{dy}{dx}(t - x) \quad (1)$$

и уравненіе перпендикуляра  $OP$ :

$$u = -\frac{dx}{dy} t. \quad (2)$$

Кромѣ того, называя черезъ  $x_1, y_1$  координаты точки  $Q$ , пишемъ:

$$OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\left( y - x \frac{dy}{dx} \right)^2}$$

и, замѣняя  $\frac{dy}{dx}$  на  $-\frac{x_1}{y_1}$  въ силу уравненія (2), которому удовлетворяютъ  $u = y_1, t = x_1$ , получаемъ:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^4 \left( 1 + \frac{x_1^2}{y_1^2} \right)}{\left( y_1 + x \frac{x_1}{y_1} \right)^2},$$

или, послѣ упрощеній,

$$yy_1 + xx_1 = a^2. \quad (3)$$

Дифференцируемъ это уравненіе:

$$ydy_1 + y_1dy + xdx_1 + x_1dx = 0; \quad (4)$$

но такъ какъ точка  $Q$  лежитъ на прямой, выражаемой уравненіемъ (2), то

$$y_1dy + x_1dx = 0,$$

и уравненіе (4) приметъ видъ:

$$ydy_1 + xdx_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{x}{y},$$

т.-е. что искомая касательная перпендикулярна къ прямой  $OM$ ; точно такой же результатъ былъ найденъ въ § 14-мъ.

**§ 84.** При рѣшеніи двухъ предыдущихъ задачъ нѣкоторые члены исчезли сами изъ полученнаго уравненія черезъ дифференцированіе, что значительно упростило вычисленія. Такое упрощеніе тѣсно связано съ однимъ геометрическимъ обстоятельствомъ, общимъ обѣимъ задачамъ; равнымъ образомъ, оно можетъ представиться во множествѣ аналогичныхъ случаевъ. Вотъ общая задача, для которой оно имѣетъ мѣсто и для которой обѣ предыдущія задачи являются частными случаями.

**Задача V.** — *Определить касательную къ некоторой кривой, точки которой выводятся, по заданному закону, изъ касательныхъ къ другой данной кривой.*

Пусть будетъ

$$\varphi(x, y) = 0$$

уравненіе данной кривой; одна изъ ея касательныхъ имѣетъ уравненіе:

$$u - y = \frac{dy}{dx} (l - x).$$

Координаты  $x_1$ ,  $y_1$  соответственной точки искомой кривой суть данныя функціи отъ коэффициентовъ этого уравненія и представляютъ, слѣдовательно, выраженія вида:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1 \left( \frac{dy}{dx}, y - x \frac{dy}{dx} \right), \\ y_1 &= F_2 \left( \frac{dy}{dx}, y - x \frac{dy}{dx} \right). \end{aligned}$$

Чтобы вывести изъ этихъ уравненій угловой коэффициентъ  $\frac{dy_1}{dx_1}$  искомой касательной, полагаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= u, \quad y - x \frac{dy}{dx} = v, \\ x_1 &= F_1(u, v), \\ y_1 &= F_2(u, v) \end{aligned}$$

и находимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF_1}{du} du + \frac{dF_1}{dv} dv, \\ dy_1 &= \frac{dF_2}{du} du + \frac{dF_2}{dv} dv, \end{aligned}$$

кромѣ того,

$$dv = d(y - ux) = dy - udx - xdu.$$

Въ силу же уравненія  $\frac{dy}{dx} = u$  это значеніе  $dv$  приводится къ  $-xdu$ ; въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF_1}{du} du - x \frac{dF_1}{dv} du, \\ dy_1 &= \frac{dF_2}{du} du - x \frac{dF_2}{dv} du, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{dF_2}{du} - x \frac{dF_2}{dv}}{\frac{dF_1}{du} - x \frac{dF_1}{dv}},$$

что и служитъ рѣшеніемъ нашей задачи. Упрощеніе результата происходитъ отъ того, что  $du$  является общимъ множителемъ и опредѣленіе отношенія  $\frac{dy_1}{dx_1}$  перестаетъ быть необходимымъ для нахожденія производной  $\frac{dy}{dx}$ ; въ противномъ случаѣ его нужно было бы вычислять.

Мы видимъ, что въ выраженіяхъ  $dx_1$  и  $dy_1$  члены съ  $dy$  и съ  $dx$  уничтожаются и остаются только члены съ множителемъ  $du$ . Слѣдовательно, вычисленія точно такія же, какъ и въ томъ случаѣ, если бы мы при переходѣ отъ одной какой-нибудь касательной



тельной къ другой, безконечно-близкой, удовольствовались измѣненіемъ углового коэффиціента, не измѣняя координатъ  $x$  и  $y$  точки касанія; равнымъ образомъ, искома касательная точно такая же, какъ и въ томъ случаѣ, еслибы прямая, которая служить для опредѣленія различныхъ точекъ кривой, вращалась вокругъ неподвижной точки. Это мы уже видѣли въ § 14-мъ.

**§ 85. Задача VI.** — *Отъ различныхъ точекъ данной плоской кривой отложена по нормалямъ къ этой кривой постоянная длина; найти касательную къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.*

Пусть  $x$  и  $y$  будутъ координаты нѣкоторой точки на данной кривой, а  $t$  и  $u$  — координаты соотвѣтственной точки на новой кривой; кромѣ того, пусть  $\lambda$  и  $\mu$  будутъ углы, составляемые нормалью съ осями. Въ такомъ случаѣ, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} t &= x + l \cos \lambda, \\ u &= y + l \cos \mu, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда посредствомъ дифференцированія находимъ

$$\left. \begin{aligned} dt &= dx + l d \cos \lambda, \\ du &= dy + l d \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Умножаемъ первое изъ этихъ уравненій на  $\cos \lambda$ , второе на  $\cos \mu$ , и полученные результаты складываемъ:

$$\cos \lambda dt + \cos \mu du = dx \cos \lambda + dy \cos \mu + l (\cos \lambda d \cos \lambda + \cos \mu d \cos \mu). \quad (3)$$

Зная же, что

$$\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu = 1,$$

выводимъ посредствомъ дифференцированія:

$$\cos \lambda d \cos \lambda + \cos \mu d \cos \mu = 0, \quad (4)$$

и, кромѣ того, по § 81-му имѣемъ:

$$dx \cos \lambda + dy \cos \mu = 0; \quad (5)$$

поэтому уравненіе (3) приметъ видъ:

$$\cos \lambda dt + \cos \mu du = 0. \quad (6)$$

Изъ уравненій же (5) и (6) выводимъ:

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx},$$

т.-е. что касательныя къ обѣимъ кривымъ параллельны.

То же самое мы нашли выше (§ 14) геометрически.

§ 86. Задача VII. — Когда уголъ постоянной величины движется такимъ образомъ, что стороны его постоянно касаются данной плоской кривой, то вершина его  $P$  опишетъ такую кривую, нормалью къ которой будетъ прямая, соединяющая точку  $P$  съ центромъ круга, проходящаго черезъ эту точку и черезъ точки  $A$  и  $B$ , въ которыхъ стороны подвижнаго угла касаются данной кривой.

Пусть

$$y = \varphi(x)$$

будетъ уравненіе данной кривой; назовемъ черезъ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\alpha'$ ,  $\beta'$  координаты обѣихъ точекъ касанія и черезъ  $a$  тангенсъ даннаго угла. Имѣя, кромѣ того, равенства:  $\beta = \varphi(\alpha)$ ,  $\beta' = \varphi(\alpha')$ , мы можемъ опредѣлить координаты  $x$ ,  $y$  точки  $P$  изъ слѣдующихъ уравненій:

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha), \quad (1)$$

$$y - \beta' = \frac{d\beta'}{d\alpha'}(x - \alpha'), \quad (2)$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'} = a \left( 1 + \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\beta'}{d\alpha'} \right). \quad (3)$$

Исключая  $\frac{d\beta}{d\alpha}$  и  $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$  изъ этихъ уравненій, находимъ:

$$a[(y - \beta)(y - \beta') + (x - \alpha)(x - \alpha')] + (y - \beta')(x - \alpha) - (y - \beta)(x - \alpha') = 0 \quad (4)$$

Это равенство, если принять за переменныя только  $x$  и  $y$ , представить кругъ, проходящій черезъ точку  $P$  и черезъ точки  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha', \beta')$ .

Продифференцируемъ это уравненіе:

$$\begin{aligned} & [2ay - a(\beta + \beta') + (\alpha' - \alpha)]dy + [2ax - a(\alpha + \alpha') + (\beta - \beta')]dx + \\ & + \left\{ [(y - \beta) - a(x - \alpha)] - [(x - \alpha) + a(y - \beta)] \frac{d\beta'}{d\alpha'} \right\} d\alpha' - \\ & - \left\{ [(y - \beta') + a(x - \alpha')] - a[(y - \beta') + (x - \alpha')] \frac{d\beta}{d\alpha} \right\} d\alpha = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Если теперь въ уравненіе (5) подставить значенія  $y - \beta$  и  $y - \beta'$ , выведенныя изъ уравненій (1) и (2), то коэффициенты при  $d\alpha$  и  $d\alpha'$  исчезнутъ въ силу уравненій (1), (2) и (3).

Итакъ, выраженіе дифференціальнаго коэффициента  $\frac{dy}{dx}$  одно и то же, будемъ ли мы разсматривать, въ уравненіи (4),  $\alpha$  и  $\alpha'$  какъ переменныя, или какъ постоянныя. Отсюда слѣдуетъ, что касательная къ геометрическому мѣсту точекъ  $P$  совпадаетъ съ касательною къ кругу, представляемому уравненіемъ (4), когда въ этомъ послѣднемъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  принимаются за постоянныя

## ЗАМѢЧАНІЕ, ОТНОСЯЩЕЕСЯ КЪ ПРЕДЫДУЩИМЪ ЗАДАЧАМЪ

§ 87. Всѣмъ предыдущимъ задачамъ можно придать одну общую форму: точки одной кривой  $\Sigma$  выводятся посредствомъ нѣкотораго опредѣленнаго построенія изъ точекъ и касательныхъ другой кривой  $S$ ; зная касательную въ данной точкѣ кривой  $S$ , найти касательную въ соотвѣтственной точкѣ кривой  $\Sigma$ .

Задача рѣшена въ частныхъ случаяхъ, приведенныхъ въ качествѣ примѣровъ, но изъ этого не слѣдуетъ, что рѣшеніе всегда возможно. При случайномъ выборѣ построенія, съ помощью котораго точки кривой  $\Sigma$  выводятся изъ точекъ и касательныхъ кривой  $S$ , касательная къ кривой  $\Sigma$  не будетъ опредѣлена, когда будутъ даны только соотвѣтственная точка  $S$  и касательная въ этой точкѣ. Если это и было возможно въ разсмотрѣнныхъ частныхъ примѣрахъ, то только потому, что примѣры были выбраны надлежащимъ образомъ.

Въ § 84-мъ для двухъ задачъ было разъяснено, къ чему относится то упрощеніе, которое появилось въ рѣшеніи; покажемъ, почему искомый результатъ невозможенъ вообще.

Пусть  $x, y$  будутъ координаты нѣкоторой точки кривой  $S$  и  $p$ —угловой коэффиціентъ касательной въ этой точкѣ; называя черезъ  $x_1, y_1$  координаты соотвѣтственной точки кривой  $\Sigma$ , можемъ написать, по опредѣленію этой кривой, что

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= F(x, y, p), \\ y_1 &= \varphi(x, y, p), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $F$  и  $\varphi$  суть двѣ функціи, вытекающія изъ данныхъ условій. Изъ равенствъ (1) выводимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dp} dp, \\ dy_1 &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dp} dp; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx}}{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dp} \frac{dp}{dx}} = \frac{\frac{d\varphi}{dx} + p \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{dx}}{\frac{dF}{dx} + p \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dp} \frac{dp}{dx}}.$$

Отсюда видно, что  $\frac{dy_1}{dx_1}$ , угловой коэффиціентъ искомой касательной, содержитъ не только  $x, y$  и  $p$ , какъ въ разсмотрѣнныхъ частныхъ примѣрахъ, но еще и  $\frac{dp}{dx}$ , а это значитъ, что когда задается точка кривой  $S$  и касательная въ этой точкѣ, то касательная въ соотвѣтственной точкѣ кривой  $\Sigma$  все-таки останется, вообще, неопредѣленною.

КАСАТЕЛЬНЫЯ КЪ КРИВЫМЪ, ОТНЕСЕННЫМЪ КЪ ПОЛЯРНЫМЪ КООРДИНАТАМЪ

§ 88. Когда кривая задана уравненіемъ въ полярныхъ координатахъ:

$$F(\omega, \rho) = 0,$$

то можно легко опредѣлить въ каждой точкѣ направленіе ея касательной. Пусть  $M$  будетъ данная точка на кривой, имѣющая координаты  $\omega$  и  $\rho$ , а  $M'$ —ближайшая къ ней точка на той же кривой. Ведемъ радіусы-векторы  $OM$ ,  $OM'$  и изъ точки  $O$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $OM$  описываемъ дугу круга  $MP$ , оканчивающуюся на радіусъ-векторѣ  $OM'$ . Очевидно, можемъ написать:

$$OM = \rho, \quad \text{arc } MP = \rho d\omega.$$

Кромѣ того, такъ какъ  $M'P$  есть безконечно-малое приращеніе  $\rho$ , то оно можетъ быть принято (§ 46) за  $d\rho$ . Далѣе, изъ треугольника  $MM'P$  видно, что

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{\sin \angle MM'P}{\sin \angle M'MP};$$

въ предѣлѣ же, когда  $\frac{MP}{M'P}$  равно  $\rho \frac{d\omega}{d\rho}$  и треугольникъ  $MM'P$ —прямоугольный, отношеніе  $\frac{\sin \angle MM'P}{\sin \angle M'MP}$  обратится въ тангенсъ угла  $V$ , составляемаго радіусомъ-векторомъ съ направленіемъ касательной въ сторону увеличенія угла  $\omega$ . Итакъ,

$$\text{tang } V = \rho \frac{d\omega}{d\rho}.$$

Когда кривая отнесена къ полярнымъ координатамъ, то иногда подъ именемъ касательной, нормали, подкасательной, поднормали подразумеваютъ четыре слѣдующихъ линій.

Проведемъ черезъ полюсъ  $O$  перпендикуляръ къ радіусу-вектору  $OM$ ; пусть  $T$  есть пересѣченіе этого перпендикуляра съ касательною и  $N$ —пересѣченіе его съ нормалію, построенными въ точкѣ  $M$ ; тогда  $MT$  называется касательною,  $MN$ —нормалію,  $OT$ —подкасательною и  $ON$ —поднормалію.

Вычисленіе этихъ четырехъ линій не представляетъ никакихъ затрудненій. Пишемъ:

$$OT = S_t = \rho \text{ tang } V = \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}, \quad MT = t = \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{d\omega^2}{d\rho^2}},$$

$$ON = S_n = \frac{\rho^2}{OT} = \frac{d\rho}{d\omega}, \quad MN = N = \sqrt{\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2}}.$$

§ 89. Какъ приложеніе предыдущихъ формулъ, опредѣлимъ касательную къ логарифмической спирали, уравненіе которой есть

$$\rho = ae^{m\omega}.$$



Пишемъ:

$$\operatorname{tang} V = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = ae^{m\omega} \frac{1}{mae^{m\omega}} = \frac{1}{m};$$

слѣдовательно, уголъ  $V$  — постоянный, имѣющій тангенсъ  $\frac{1}{m}$ . Такимъ образомъ, логарифмическая спираль пересѣкаетъ подъ постояннымъ угломъ радіусы-векторы, исходящіе изъ неподвижной точки. При  $m = 0$  уголъ  $V$  — прямой и логарифмическая спираль обращается въ кругъ.

Воспользуемся полярными координатами для рѣшенія еще слѣдующей задачи.

**Задача VIII.** — Изъ неподвижной точки  $O$ , находящейся въ плоскости кривой  $S$ , проведены къ этой кривой радіусы-векторы и продолжены, каждый, на постоянную длину  $l$ ; найти касательную къ кривой  $\Sigma$ , представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.

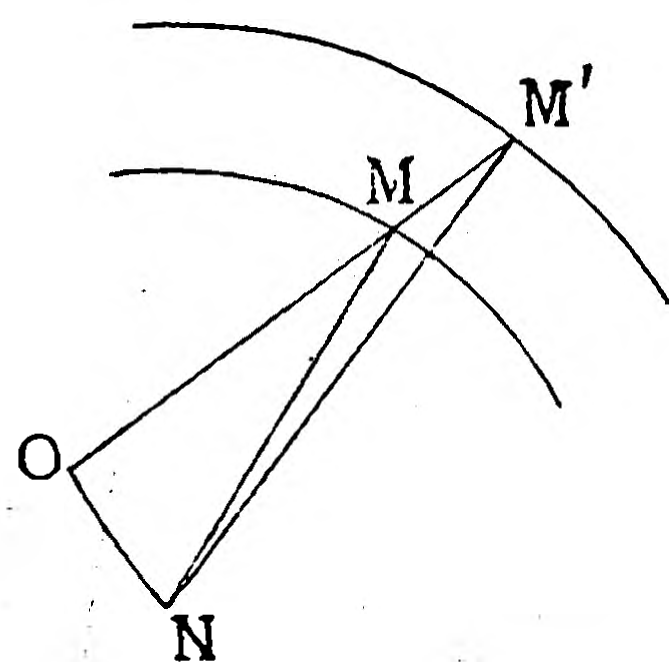
Отнесемъ къ полярнымъ координатамъ и примемъ за полюсъ неподвижную точку  $O$ . Если уравненіе данной кривой есть

$$\rho = \varphi(\omega),$$

то уравненіе кривой, получаемой изъ данной, будетъ:

$$\rho = \varphi(\omega) + l.$$

Очевидно, что поднормаль  $S_n$ , выражающаяся черезъ  $\frac{d\rho}{d\omega}$ , имѣетъ одно и то же значеніе для обѣихъ кривыхъ, такъ что нормали въ соотвѣтственныхъ точкахъ сходятся



Черт. 19.

на перпендикуляръ къ радіусу-вектору, проведенному черезъ точку  $O$ ; отсюда вытекаетъ весьма простое построеніе для нормали, а, слѣдовательно, и для касательной.

Въ самомъ дѣлѣ, для полученія нормали въ точкѣ  $M'$  кривой  $\Sigma$  достаточно провести нормаль въ точкѣ  $M$  къ кривой  $S$  и соединить  $M'$  съ точкою пересѣченія этой нормали съ перпендикуляромъ  $ON$  къ радіусу-вектору  $OMM'$ .

§ 90. Вилліамъ Робертсъ (William Roberts) замѣтилъ, что если положить

$$\rho' = \rho^n \quad \text{и} \quad \omega' = n\omega,$$

гдѣ  $\rho$  и  $\omega$  представляютъ полярныя координаты точекъ кривой, то

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = \rho' \frac{d\omega'}{d\rho'}$$

и, слѣдовательно, кривая, точки которой имѣютъ координаты  $\rho'$  и  $\omega'$ , и предположенная кривая пересекаются соотвѣтственные радіусы-векторы подѣ однимъ и тѣмъ же угломъ. Отсюда вытекаетъ способъ получать изъ двухъ данныхъ кривыхъ двѣ другія кривыя, пересекающіяся подѣ тѣмъ же угломъ, какъ и первыя.

Напр., прямыя, уравненія которыхъ суть

$$\rho \cos \omega = \alpha, \quad \rho \cos(\omega - \varphi) = \beta,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$ —произвольны, а  $\varphi$  обозначаетъ постоянный уголъ, очевидно, пересекаются подѣ угломъ  $\varphi$ . Отсюда заключаемъ, что кривыя, представляемыя уравненіями:

$$\rho^n \cos n\omega = \alpha^n, \quad \rho^n \cos(n\omega - \varphi) = \beta^n,$$

всегда пересекаются подѣ угломъ  $\varphi$ , каковы бы ни были значенія, приписываемыя  $\alpha$  и  $\beta$ . Полагая  $n=2$ , получаемъ слѣдующую теорему:

*Система равнобоковыхъ, концентрическихъ и сходственно расположенныхъ гиперболъ пересѣкается другою системою такихъ же гиперболъ подѣ постояннымъ угломъ, вдвое болѣе большимъ угла, образуемаго осями обѣихъ системъ.*

При  $n=\frac{1}{2}$  кривыя обращаются въ параболы съ однимъ и тѣмъ же фокусомъ и мы получаемъ слѣдующую теорему:

*Всѣ параболы съ однимъ и тѣмъ же фокусомъ и общою осью пересѣкаются параболою съ тѣмъ же фокусомъ, но съ другою осью, подѣ угломъ, равнымъ половинѣ угла, составляемаго осями обѣихъ системъ кривыхъ.*

Робертсъ вывелъ изъ своего замѣчанія большое число теоремъ; нѣкоторыя изъ нихъ приведены въ качествѣ упражненій въ концѣ этой главы.

## КАСАТЕЛЬНЫЯ КЪ КРИВЫМЪ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

§ 91. Пусть  $\varphi(x, y, z)=0$ ,  $\psi(x, y, z)=0$  будутъ уравненія кривой двоякой кривизны; отыщемъ касательную къ ней въ данной точкѣ.

Касательная есть предѣлъ прямой, соединяющей двѣ бесконечно-близкія точки, и мы знаемъ (§ 13), что можно безъ измѣненія этого предѣла замѣнить одну изъ разсматриваемыхъ точекъ другою, находящеюся отъ первой на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка. Итакъ, если  $x, y, z$ —координаты первой точки, то можно координаты второй принять равными  $x+dx, y+dy, z+dz$ ; въ самомъ дѣлѣ, извѣстно (§ 46), что  $dy$  и  $dz$  отличаются отъ истинныхъ приращеній  $y$  и  $z$  только на бесконечно-малыя второго порядка.

Если  $t, u, v$  обозначают координаты какой-нибудь точки прямой, соединяющей двѣ точки, координаты которыхъ суть  $x, y, z, x+dx, y+dy, z+dz$ , то уравненія этой прямой будутъ:

$$\frac{t-x}{dx} = \frac{u-y}{dy} = \frac{v-z}{dz}.$$

Итакъ, чтобы получить въ конечномъ видѣ уравненія касательной, достаточно найти три конечныхъ количества, пропорціональныхъ  $dx, dy, dz$ , и написать, что эти количества также пропорціональны  $t-x, u-y, v-z$ . Но мы уже выше (§ 62) нашли, что

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}};$$

слѣдовательно, уравненія касательной будутъ:

$$\frac{t-x}{\frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz}} = \frac{u-y}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \frac{d\psi}{dx}} = \frac{v-z}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}}.$$

Иногда этимъ уравненіямъ придаютъ другой видъ, съ которымъ не мѣшаетъ ознакомиться. Они выражаютъ пропорціональность между разностями  $t-x, u-y, v-z$  и дифференціалами  $dx, dy, dz$ ; съ другой же стороны, извѣстно, что эти дифференціалы удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz &= 0; \end{aligned}$$

поэтому, уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} (t-x) + \frac{d\varphi}{dy} (u-y) + \frac{d\varphi}{dz} (v-z) &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} (t-x) + \frac{d\psi}{dy} (u-y) + \frac{d\psi}{dz} (v-z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

выражаютъ, что разности  $t-x, u-y, v-z$  имѣютъ тѣ же отношенія, какъ и дифференціалы  $dx, dy, dz$ ; иначе говоря, что эти разности и дифференціалы соотвѣтственно пропорціональны. Отсюда заключаемъ, что уравненія (1), представляющія двѣ плоскости, будутъ въ то же время и уравненіями касательной.

**§ 92.** Уравненія касательной къ кривой приводятъ безъ затрудненій къ уравненію нормальной плоскости. Чтобы получить эту плоскость, достаточно, въ самомъ дѣлѣ, замѣтить, что она проходитъ черезъ точку, координаты которой суть  $x, y, z$ , и что

она перпендикулярна къ касательной. Слѣдовательно, уравненіе этой плоскости мы напишемъ, по формуламъ аналитической геометріи, въ такомъ видѣ:

$$(t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = 0,$$

гдѣ  $dx, dy, dz$  должны быть замѣнены функціями имъ пропорціональными. Это уравненіе можно доказать и непосредственно. Пусть  $t, u, v$  будутъ координаты какой-нибудь точки пространства; разности  $t - x, u - y, v - z$  пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями прямою, соединяющею эту точку съ данною точкою на кривой, координаты которой суть  $x, y, z$ . Но  $dx, dy, dz$  пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ касательною къ кривой съ тѣми же осями; слѣдовательно, условіе, чтобы эти два направленія были взаимно-перпендикулярны, т.-е. чтобы точка  $t, u, v$  принадлежала нормальной плоскости, выражается какъ разъ уравненіемъ:

$$(t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = 0.$$

#### Кривыя на шарѣ

§ 93. Изученіе кривыхъ, нанесенныхъ на шарѣ, привело математиковъ къ интереснымъ результатамъ, аналогія которыхъ со свойствами плоскихъ кривыхъ достойна замѣчанія. Мы ограничимся здѣсь указаніемъ на систему обычно употребляемыхъ координатъ для опредѣленія точекъ шаровой поверхности и на способъ полученія касательной къ кривой, заданной уравненіемъ въ двухъ координатахъ произвольной ея точки.

Выбираемъ на шарѣ точку  $P$  и называемъ ее *полюсомъ*; тогда большой кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ радіусу, проведенному въ точку  $P$ , получаетъ названіе *экватора*; большіе круги, проходящіе черезъ точку  $P$ , получаютъ названіе *меридіановъ*, а малые круги, плоскости которыхъ параллельны экватору, названіе *параллелей*. Точки шаровой поверхности будутъ опредѣляться меридіаномъ и параллелью, на которыхъ онѣ находятся; меридіанъ задается угломъ  $\varphi$ , который онъ составляетъ съ неподвижнымъ меридіаномъ, а параллель—ея разстояніемъ до полюса, считая по дугѣ большого круга. При измѣненіи  $\varphi$  отъ 0 до  $2\pi$  и  $\theta$  отъ 0 до  $\pi$  будутъ опредѣлены всѣ точки шаровой поверхности. Эта система, очевидно, равносильна употребленію географическихъ широты и долготы на земной поверхности, при чемъ  $\varphi$  будетъ обозначать долготу и  $\theta$ —дополненіе до широты.

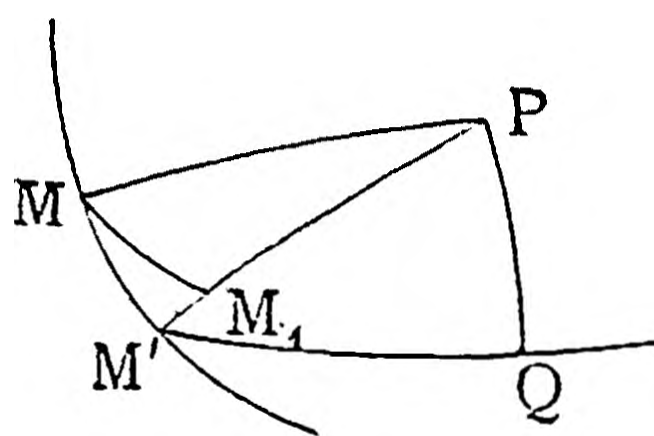
Пусть нѣкоторая кривая задана соотношеніемъ  $F(\theta, \varphi) = 0$  между координатами ея точекъ. Назовемъ двѣ смежныя (черт. 20) точки черезъ  $M$  и  $M'$ ; изъ точки  $P$ , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ  $PM$  (т.-е.  $R\theta$ ) опишемъ малый кругъ  $MM_1$ . Треугольникъ  $MM'M_1$  можетъ быть принятъ за плоскій и, слѣдовательно,

$$\text{tang } M' = \frac{MM_1}{M_1M'},$$



гдѣ  $M'$  есть уголъ, составляемый кривою съ дугою большого круга  $PM'$ . Далѣе,

$$\begin{aligned} M_1M' &= R d\theta, \\ MM_1 &= R \sin \theta d\varphi; \end{aligned}$$



Черт. 20.

первое изъ этихъ уравненій—очевидно, второе же вытекаетъ изъ того, что  $MM_1$  есть дуга, соотвѣтствующая углу  $d\varphi$  въ кругѣ радіуса  $R \sin \theta$ . Значить,

$$\text{tang } M' = \frac{R d\theta}{R \sin \theta d\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Если черезъ  $M'$  проведемъ большой кругъ  $M'Q$ , нормальный къ рассматриваемой кривой, и опустимъ на него изъ точки  $P$  перпендикулярную дугу большого круга  $PQ$ , то сферическій треугольникъ  $PQM'$  дастъ:

$$\sin \frac{PQ}{R} = \sin \theta \cos M'.$$

#### УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, КАСАТЕЛЬНОЙ КЪ ПОВЕРХНОСТИ

§ 94. Дано уравненіе поверхности въ прямолинейныхъ координатахъ:

$$z = \varphi(x, y).$$

Исходя изъ точки этой поверхности, имѣющей координаты  $x, y, z$ , припишемъ  $x$  и  $y$  безконечно-малыя приращенія  $dx$  и  $dy$ ; тогда соотвѣтственное приращеніе  $z$ , какъ мы видѣли (§ 54), можетъ быть принято, если отбросить безконечно-малыя второго порядка, равнымъ

$$\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

гдѣ  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  — частныя производныя отъ  $z$ , когда  $x$  и  $y$  принимаются въ послѣдовательномъ порядкѣ за постоянныя.

Поэтому, вокругъ точки, координаты которой суть  $x, y, z$ , и на безконечно-маломъ разстояніи отъ этой точки приращеніе для  $z$  можетъ быть рассматриваемо, какъ линейная функція отъ приращеній  $x$  и  $y$ ; итакъ, называя черезъ  $t, u, v$  координаты

точки, находящейся на поверхности въ бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки  $x, y, z$  и отбрасывая бесконечно-малыя второго порядка, пишемъ:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y). \quad (1)$$

Это уравненіе, будучи первой степени относительно  $t, u, v$ , представитъ плоскость, которая, очевидно, проходитъ черезъ точку  $x, y, z$  и для бесконечно-близкихъ точекъ находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ рассматриваемой поверхности.

Докажемъ, что эта плоскость содержитъ касательную ко всякой кривой, нанесенной на поверхности и проходящей черезъ данную точку. Черезъ эту точку  $M$ , координаты которой суть  $x, y, z$ , ведемъ по поверхности кривую  $P$ , и пусть на этой кривой точка  $M'$  будетъ смежная точкѣ  $M$ , координаты которой суть  $t, u, v$ . Касательная къ линіи  $P$  есть предѣлъ прямой  $MM'$ , но мы видѣли (§ 13), при опредѣленіи этого предѣла, что точку  $M'$  можно замѣнить всякою другою точкою, находящеюся отъ нея на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка, и, слѣдовательно, замѣнить точку  $M'$  поверхности точкою плоскости (1), координаты которой, параллельныя  $x$  и  $y$ , суть  $t$  и  $u$ ; третья координата  $v$ , на основаніи предыдущаго, измѣнится лишь на бесконечно-малую второго порядка. Но послѣ такого перенесенія точки  $M'$  прямая  $MM'$  будетъ строго расположена въ плоскости (1), то же относится и къ ея предѣлу; значитъ, касательная въ  $M$  къ кривой  $P$ , т.-е. къ какой-угодно кривой, проведенной по поверхности черезъ эту точку, расположена въ плоскости (1).

Если уравненіе поверхности задано въ видѣ:

$$F(x, y, z) = 0,$$

то нужно, чтобы воспользоваться уравненіемъ (1), вычислить сначала  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  при помощи формулъ:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0; \end{aligned}$$

тогда уравненіе касательной плоскости приметъ видъ:

$$\frac{dF}{dx}(t - x) + \frac{dF}{dy}(u - y) + \frac{dF}{dz}(v - z) = 0. \quad (2)$$

Тотъ же самый результатъ можно получить съ помощью формулъ, данныхъ въ § 91-мъ при опредѣленіи касательной къ кривой двоякой кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ на данной поверхности, уравненіе которой есть  $F(x, y, z) = 0$ , кривую, получающуюся отъ пересѣченія этой поверхности съ другою, которая проходитъ черезъ рассматриваемую точку  $(x, y, z)$  и уравненіе которой есть  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Мы

видѣли (§ 91), что касательная къ этой кривой можетъ быть выражена системою уравненій:

$$(t-x) \frac{dF}{dx} + (u-y) \frac{dF}{dy} + (v-z) \frac{dF}{dz} = 0, \quad (1)$$

$$(t-x) \frac{d\varphi}{dx} + (u-y) \frac{d\varphi}{dy} + (v-z) \frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (2)$$

Если вторую поверхность замѣнить другою, подчиненною лишь тому условію, что она проходитъ черезъ данную точку, то кривая пересѣченія можетъ принять всѣ положенія на первой поверхности и касательная станетъ перемѣщаться; уравненіе же (1), оставаясь безъ измѣненія, представитъ плоскость, изъ которой эта касательная не выходитъ, а такая плоскость есть именно касательная плоскость, найденная выше другимъ путемъ.

#### УРАВНЕНІЕ НОРМАЛИ

§ 95. Когда извѣстно уравненіе касательной плоскости, то не трудно составить уравненія нормали. При прямоугольныхъ осяхъ нормаль образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны коэффиціентамъ уравненія касательной плоскости; эта прямая проходитъ черезъ точку  $(x, y, z)$  и уравненія ея, поэтому, будутъ:

$$\frac{t-x}{\frac{dF}{dx}} = \frac{u-y}{\frac{dF}{dy}} = \frac{v-z}{\frac{dF}{dz}}. \quad (1)$$

Если уравненіе поверхности задается подъ видомъ:

$$z = \varphi(x, y),$$

то уравненія нормали выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{t-x}{\left(\frac{dz}{dx}\right)} = \frac{u-y}{\left(\frac{dz}{dy}\right)} = -\frac{v-z}{1}, \quad (2)$$

т.-е.

$$\left. \begin{aligned} t-x + (v-z) \frac{dz}{dx} &= 0, \\ u-y + (v-z) \frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

§ 96. Въ каждой точкѣ поверхности, уравненіе которой есть  $F(x, y, z) = 0$ , можно различать для нормали два противоположныхъ другъ другу направленія: внѣшнее и внутреннее. *Внѣшнее направленіе* есть направленіе къ точкамъ пространства, для которыхъ

$$F(x, y, z) > 0,$$

а *внутреннее направленіе* есть направленіе къ тѣмъ точкамъ, для которыхъ, наоборотъ,

$$F(x, y, z) < 0.$$

Для угловъ  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  внѣшней нормали съ осями координатъ всегда

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{+\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}, \\ \cos \mu &= \frac{+\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{+\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.\end{aligned}$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненій (1) § 95-го ясно, что всѣ три косинуса пропорціональны  $\frac{dF}{dx}$ ,  $\frac{dF}{dy}$ ,  $\frac{dF}{dz}$ , а такъ какъ сумма ихъ квадратовъ равна единицѣ, то ихъ значенія или равны, или равны, но противоположны по знаку, значеніямъ, которыя мы только-что выписали. Назовемъ теперь черезъ  $\epsilon$  безконечно-малую длину, отложенную на внѣшней нормали. Координаты конца этой длины будутъ:

$$x + \epsilon \cos \lambda, \quad y + \epsilon \cos \mu, \quad z + \epsilon \cos \nu,$$

и мы можемъ написать, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка,

$$\begin{aligned}F(x + \epsilon \cos \lambda, \quad y + \epsilon \cos \mu, \quad z + \epsilon \cos \nu) - F(x, y, z) &= \\ &= \frac{dF}{dx} \epsilon \cos \lambda + \frac{dF}{dy} \epsilon \cos \mu + \frac{dF}{dz} \epsilon \cos \nu.\end{aligned}$$

Но по предположенію

$$F(x, y, z) = 0$$

и кромѣ того

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= \frac{+\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}, \\ \cos \mu &= \frac{+\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{+\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}};\end{aligned}$$



слѣдовательно,

$$F(x \pm \varepsilon \cos \lambda, y \pm \varepsilon \cos \mu, z \pm \varepsilon \cos \nu) = \pm \varepsilon \left[ \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}} \right] = \\ = \pm \varepsilon \sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

Если нормаль имѣетъ внѣшнее направленіе, то первая часть послѣдняго равенства положительна и, значитъ, во второй части надо взять верхній знакъ, а это требуетъ того же знака и въ предыдущихъ уравненіяхъ.

§ 97. Такъ какъ формулы, дающія направленіе нормали къ поверхности, имѣютъ весьма важное значеніе, то не будетъ бесполезнымъ доказать ихъ прямо, независимо отъ уравненія касательной плоскости.

Пусть

$$F(x, y, z) = 0$$

будетъ уравненіе поверхности. Такъ какъ при переходѣ отъ точки этой поверхности, координаты которой суть  $x, y, z$ , къ смежной точкѣ, координаты которой суть  $x + dx, y + dy, z + dz$ , функція  $F$  должна оставаться равною нулю, то бесконечно-малое приращеніе  $F$  будетъ равно нулю, и мы можемъ написать:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0. \quad (1)$$

Въ этомъ уравненіи отброшены бесконечно-малыя второго порядка, и оно справедливо, если  $dx, dy, dz$  строго равны, какъ мы предположили, бесконечно-малымъ приращеніямъ  $x, y$  и  $z$ ; но оно строго точно, если при  $dx$  и  $dy$ , представляющихъ приращенія  $x$  и  $y$ ,  $dz$  равенъ дифференціалу отъ  $z$ , который отличается, какъ мы знаемъ (§ 53), отъ приращенія  $z$  лишь на бесконечно-малую второго порядка.

Итакъ, уравненіе (1), которое исполнѣе точно, доказываетъ, что прямая, образующая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$ , перпендикулярна къ прямой, образующей углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx, dy, dz$ ; такъ какъ это послѣднее направленіе представляетъ прямую, соединяющую двѣ бесконечно-близкія точки поверхности, то оно тѣмъ самымъ будетъ направленіемъ какой-угодно изъ ея касательныхъ; слѣдовательно, первое направленіе есть направленіе прямой, перпендикулярной ко всѣмъ касательнымъ, т.-е. направленіе нормали.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ КАСАТЕЛЬНЫХЪ ПЛОСКОСТЕЙ

§ 98. Приложимъ предыдущія формулы къ нѣкоторымъ примѣрамъ.

Примѣръ I. — Ищемъ касательную плоскость къ поверхности, выражаемой уравненіемъ:

$$x - az - \varphi(y - bz) = 0. \quad (1)$$

Уравнение касательной плоскости, по предыдущимъ формуламъ, будетъ:

$$t - x - (u - y)\varphi'(y - bz) - [a - b\varphi'(y - bz)](v - z) = 0.$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью съ осями координатъ, пропорціональны

$$1, \quad -\varphi', \quad -a + b\varphi'$$

и такъ какъ

$$a + (-\varphi')b + (b\varphi' - a) = 0,$$

то нормаль къ поверхности перпендикулярна къ прямой, уравненія которой суть

$$x = az, \quad y = bz,$$

и, слѣдовательно, касательная плоскость параллельна этой прямой.

Уравнение (1) представляетъ, дѣйствительно, цилиндрическую поверхность, производящія которой параллельны прямой  $x = az$ ,  $y = bz$ , и касательная плоскость, содержащая всегда производящую, должна быть, какъ мы и нашли, параллельна этой прямой.

**Примѣръ II.**—Разсмотримъ, во-вторыхъ, поверхность, уравнение которой есть

$$ax + by + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1)$$

Касательная плоскость выразится уравненіемъ:

$$(t - x)(a - 2x\varphi') + (u - y)(b - 2y\varphi') + (v - z)(1 - 2z\varphi') = 0.$$

Уравненія нормали будутъ:

$$\frac{t - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{u - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'}. \quad (2)$$

Поверхность, представляемая уравненіемъ (1), есть поверхность вращенія вокругъ прямой, уравненія которой суть

$$t = av, \\ u = bv.$$

Геометрія показываетъ, что эта прямая пересѣкается со всѣми нормальми къ поверхности. Это, впрочемъ, не трудно повѣрить по ихъ общему уравненію, найденному выше.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ уравненіяхъ (2) замѣнить  $t$  черезъ  $av$  и  $u$  черезъ  $bv$ , то они примутъ видъ:

$$\frac{av - x}{a - 2x\varphi'} = \frac{bv - y}{b - 2y\varphi'} = \frac{v - z}{1 - 2z\varphi'}$$

и будутъ удовлетворяться при

$$v = \frac{1}{2\varphi'}.$$

§ 99. Рѣшимъ, наконецъ, нѣсколько задачъ, въ которыхъ требуется найти касательную плоскость къ достаточно опредѣленной поверхности, уравненіе которой, однако, не задано.

**Задача I.**—Опущенъ изъ точки  $O$  перпендикуляръ  $OP$  на касательную плоскость къ поверхности  $S$ , заданной ея уравненіемъ; найти касательную плоскость къ поверхности  $\Sigma$ , описанной основаніемъ  $P$  этого перпендикуляра.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки поверхности  $S$ ; уравненіе плоскости, касательной въ этой точкѣ, будетъ:

$$v - z = \frac{dz}{dx}(t - x) + \frac{dz}{dy}(u - y); \quad (1)$$

перпендикуляръ, опущенный изъ начала координатъ на эту плоскость, выразится уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} t + v \frac{dz}{dx} &= 0, \\ u + v \frac{dz}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если изъ уравненій (1) и (2) исключить  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , то получится соотношеніе

$$(v - z)v + (t - x)t + (u - y)u = 0 \quad (3)$$

между координатами  $x, y, z$  точки  $M$  поверхности  $S$  и координатами  $t, u, v$  соотвѣтственной точки  $P$  поверхности  $\Sigma$ .

Дифференцируя это уравненіе, находимъ:

$$(2v - z)dv + (2t - x)dt + (2u - y)du - vdz - tdx - udy = 0. \quad (4)$$

Кромѣ того,

$$tdx + udy + vdz = 0.$$

Дѣйствительно,  $t, u, v$  пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ начала координатъ на плоскость, касательную къ поверхности  $S$  въ точкѣ  $M$ , а  $dx, dy, dz$  пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями линіей, соединяющей, на этой поверхности, точку  $x, y, z$  съ бесконечно-близкою точкою, и ясно, что эти два направленія взаимно-перпендикулярны. Уравненіе (4) приводится, слѣдовательно, къ

$$(2t - x)dt + (2u - y)du + (2v - z)dv = 0. \quad (5)$$

Полученное уравненіе доказываетъ, что прямая, составляющая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dt, du, dv$ , т.-е. всякая касательная къ поверхности  $\Sigma$  въ точкѣ  $P$ , перпендикулярна къ прямой, составляющей углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $(2t - x), (2u - y), (2v - z)$ , т.-е. къ прямой, соединяющей точку, координаты которой суть  $t, u, v$ , съ точкою, координаты которой суть  $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ . Отсюда

вытекаетъ, что нормаль къ поверхности  $\Sigma$  проходитъ, какъ было доказано въ § 14-мъ, черезъ середину прямой  $OM$ , координаты которой суть  $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$ .

**Задача II.**—Опустивъ изъ точки  $O$  перпендикуляръ на плоскость, касательную къ поверхности  $S$ , заданной ея уравненіемъ и этотъ перпендикуляръ  $OP$  продолжимъ до точки  $Q$  такой, что

$$OP \cdot OQ = a^2,$$

гдѣ  $a$  есть данная линія. Найти плоскость, касательную къ поверхности  $\Sigma$ , геометрическому мѣсту точекъ  $Q$ .

Пусть  $M$  есть точка касанія плоскости, касательной къ поверхности  $S$ , и  $x, y, z$  — ея координаты. Уравненіе касательной плоскости будетъ:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy}; \quad (1)$$

перпендикуляръ  $OP$ , какъ и въ предыдущей задачѣ, выразится уравненіями:

$$t + v \frac{dz}{dx} = 0, \quad u + v \frac{dz}{dy} = 0. \quad (2)$$

Слѣдовательно, называя черезъ  $x_1, y_1, z_1$  координаты точки  $Q$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x_1 + z_1 \frac{dz}{dx} &= 0, & y_1 + z_1 \frac{dz}{dy} &= 0, \\ OQ^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= \frac{a^4}{OP^2} = \frac{a^4 \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dy} \right)^2 \right]}{\left( x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} - z \right)^2}. \end{aligned}$$

Исключая изъ полученныхъ уравненій  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , находимъ:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = a^2. \quad (3)$$

Какъ сейчасъ увидимъ, достаточно одного этого уравненія для опредѣленія искомой касательной плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированіе даетъ:

$$0 = xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 + x_1dx + y_1dy + z_1dz, \quad (4)$$

но

$$x_1dx + y_1dy + z_1dz = 0,$$

потому что линія  $OP$  составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $x_1, y_1, z_1$  и, кромѣ того, будучи перпендикулярной къ плоскости, касательной къ данной поверхности, она образуетъ прямой уголъ съ линіей, касательной къ поверхности  $S$ , а эта послѣдняя линія составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx, dy, dz$ .



Слѣдовательно, уравненіе (4) приметъ видъ:

$$0 = xdx_1 + ydy_1 + zdz_1 \quad (5)$$

и выразить, что прямая, составляющая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx_1, dy_1, dz_1$ , перпендикулярна къ прямой, косинусы угловъ которой съ осями пропорціональны  $x, y, z$ , т.-е. что всякая касательная къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $Q$ , перпендикулярна къ прямой  $OM$ , соединяющей начало  $O$  съ соотвѣтственною точкою  $M$  поверхности  $S$ . Значитъ, искомая касательная плоскость перпендикулярна къ линіи  $OM$ , что вполнѣ согласуется съ найденнымъ раньше (§ 14) результатомъ.

§ 100. Рѣшеніе двухъ предыдущихъ задачъ представляютъ замѣчательное упрощеніе, тѣсно связанное съ однимъ общимъ для нихъ геометрическимъ обстоятельствомъ; это упрощеніе также имѣетъ мѣсто во всѣхъ задачахъ, заключающихся въ слѣдующей общей задачѣ:

**Задача III.** — Точки поверхности  $\Sigma$  выводятся по нѣкоторому произвольному, но вполнѣ определенному, закону изъ касательныхъ плоскостей къ данной поверхности  $S$ ; найти касательную плоскость въ точкѣ поверхности  $\Sigma$ .

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки поверхности  $S$ ; уравненіе плоскости, касательной въ этой точкѣ, будетъ:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy}.$$

Координаты  $x_1, y_1, z_1$  соотвѣтственной точки поверхности  $\Sigma$  являются, по предположенію, заданными функціями отъ коэффициентовъ этого уравненія; слѣдовательно, полагая

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p, & \frac{dz}{dy} &= q, \\ z - px - qy &= u, \end{aligned}$$

будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(p, q, u), \\ y_1 &= \varphi_2(p, q, u), \\ z_1 &= \varphi_3(p, q, u), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{d\varphi_1}{dp} dp + \frac{d\varphi_1}{dq} dq + \frac{d\varphi_1}{du} du, \\ dy_1 &= \frac{d\varphi_2}{dp} dp + \frac{d\varphi_2}{dq} dq + \frac{d\varphi_2}{du} du, \\ dz_1 &= \frac{d\varphi_3}{dp} dp + \frac{d\varphi_3}{dq} dq + \frac{d\varphi_3}{du} du. \end{aligned}$$

Но изъ уравненія:

$$u = z - px - qy$$

выводимъ:

$$du = dz - p dx - q dy - x dp - y dq,$$

т.-е. (§ 54)

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, \\ du &= -x dp - y dq; \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left( \frac{d\varphi_1}{dp} - \frac{x d\varphi_1}{du} \right) dp + \left( \frac{d\varphi_1}{dq} - \frac{y d\varphi_1}{du} \right) dq, \\ dy_1 &= \left( \frac{d\varphi_2}{dp} - \frac{x d\varphi_2}{du} \right) dp + \left( \frac{d\varphi_2}{dq} - \frac{y d\varphi_2}{du} \right) dq, \\ dz_1 &= \left( \frac{d\varphi_3}{dp} - \frac{x d\varphi_3}{du} \right) dp + \left( \frac{d\varphi_3}{dq} - \frac{y d\varphi_3}{du} \right) dq. \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ уравненій  $dp$  и  $dq$ , находимъ соотношеніе вида:

$$A dx_1 + B dy_1 + C dz_1 = 0,$$

изъ котораго заключаемъ такъ же, какъ мы это сдѣлали для уравненій (5) въ задачахъ I и II, что нормаль къ поверхности  $\Sigma$  въ точкѣ  $x_1, y_1, z_1$  составляетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $A, B, C$ .

Успѣхъ метода, какъ видимъ, зависитъ отъ того, что можно безъ новыхъ дифференцированій составить соотношеніе первой степени между  $dx_1, dy_1, dz_1$ , потому что  $du$  выражается въ функціи отъ  $dp$  и  $dq$ . Можно замѣтить, что такъ какъ значенія  $dx_1, dy_1, dz_1$  содержатъ только  $dp$  и  $dq$ , то плоскость, касательная къ поверхности  $\Sigma$ , будетъ та же, какъ и въ томъ случаѣ, еслибы плоскость, изъ которой выводятся точки этой поверхности, измѣняла бы свое направленіе, постоянно проходя черезъ одну и ту же точку  $M$ ; дѣйствительно,  $p$  и  $q$  суть угловые коэффициенты уравненія плоскости, а измѣненія  $dx, dy, dz$  координатъ точки касанія совершенно исчезли въ окончательномъ результатѣ.

Этотъ результатъ согласуется съ тѣмъ, что уже было сказано въ § 14-мъ.

**§ 101.** Когда точки поверхности выводятся изъ точекъ и касательныхъ плоскостей въ этихъ точкахъ другой поверхности, то касательная плоскость въ какой-нибудь точкѣ составленной такимъ образомъ поверхности не всегда можетъ быть выведена изъ заданныхъ точки и касательной въ ней плоскости къ первообразной поверхности. Впрочемъ, мы приведемъ два примѣра, гдѣ это возможно.

**Задача IV.**—*На нормаляхъ къ данной поверхности  $S$  отъ различныхъ точекъ этой поверхности отложена постоянная длина  $l$ ; найти нормаль къ поверхности  $\Sigma$ , представляющей геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ.*

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки поверхности  $S$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$ —углы, которые нормаль въ этой точкѣ образуетъ съ осями, и  $x_1, y_1, z_1$ —координаты конца длины  $l$ , отложенной на этой нормали; очевидно, что

$$\begin{aligned} x_1 &= x + l \cos \alpha, \\ y_1 &= y + l \cos \beta, \\ z_1 &= z + l \cos \gamma. \end{aligned}$$

дифференцируя, находимъ:

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + l \cos \alpha, \\ dy_1 &= dy + l \cos \beta, \\ dz_1 &= dz + l \cos \gamma. \end{aligned}$$

Умножая первое изъ этихъ уравненій на  $\cos \alpha$ , второе на  $\cos \beta$ , третье на  $\cos \gamma$  и складывая, получаемъ:

$$\cos \alpha dx_1 + \cos \beta dy_1 + \cos \gamma dz_1 = \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz + l(\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma). \quad (1)$$

А такъ какъ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

что послѣ дифференцированія даетъ:

$$\cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma = 0,$$

и, кромѣ того,

$$\cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz = 0,$$

что вытекаетъ изъ взаимной перпендикулярности направленій нормали и касательной во всякой точкѣ поверхности  $S$ , то уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\cos \alpha dx_1 + \cos \beta dy_1 + \cos \gamma dz_1 = 0,$$

откуда заключаемъ, что нормаль къ поверхности  $\Sigma$  въ точкѣ  $x_1, y_1, z_1$  образуетъ съ осями углы, равные  $\alpha, \beta, \gamma$ , и, слѣдовательно, совпадаетъ съ нормалью въ соответственной точкѣ поверхности  $S$ . Это уже было доказано въ § 14-мъ.

**Задача V.**—Дана точка  $O$  и поверхность  $S$ ; соединяемъ точку  $O$  съ произвольною точкою  $M$  поверхности  $S$ ; черезъ радіусъ  $OM$  и нормаль  $MN$  къ поверхности въ точкѣ  $M$  ведемъ плоскость; въ плоскости  $OMN$  возставаемъ въ точкѣ  $O$  перпендикуляръ  $OP$  къ радіусу  $OM$ , равный по длинѣ этому радіусу. Найти плоскость, касательную къ поверхности, представляющей геометрическое мѣсто точекъ  $P$ .

Пересѣкаемъ поверхность  $S$  шаровою поверхностью радіуса  $OM$  изъ центра  $O$ ; не трудно замѣтить, что заданный въ условіи задачи радіусъ  $OP$ , на которомъ требуется отложить длину  $OP = OM$ , перпендикуляренъ къ плоскости, касающейся по производящей  $OM$  конуса, вершина котораго находится въ  $O$  и основаніемъ котораго служитъ кривая пересѣченія.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки  $M$ , а  $x_1, y_1, z_1$ —координаты точки  $P$ ; въ силу взаимной перпендикулярности радіусовъ-векторовъ  $OM$  и  $OP$  можемъ написать:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0. \quad (1)$$

Кромѣ того, такъ какъ линія  $OP$  перпендикулярна къ производящей конуса, бесконечно-близкой къ  $OM$ , то

$$x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz = 0, \quad (2)$$

гдѣ  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  обозначаютъ дифференціалы отъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , если оставаться на кривой пересѣченія шара съ поверхностью  $S$ . Если уравненіе поверхности  $S$  есть

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

то  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  будутъ опредѣляться уравненіями:

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0, \quad (3)$$

$$x dx + y dy + z dz = 0; \quad (4)$$

наконецъ,

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (5)$$

Дифференцируя уравненія (1) и (5) и просоединяя къ нимъ уравненіе (3), пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} -(x dx_1 + y dy_1 + z dz_1) &= x_1 dx + y_1 dy + z_1 dz, \\ 0 &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz, \\ x_1 dx_1 + y_1 dy_1 + z_1 dz_1 &= x dx + y dy + z dz. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравненія же (2), (3) и (4), будучи совмѣстны, показываютъ, что *опредѣлитель* изъ коэффиціентовъ при  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  во вторыхъ частяхъ уравненій (6) равенъ нулю; иначе говоря, существуютъ такихъ три множителя,  $1$ ,  $n$ ,  $m$ , что вторыя части, умноженные на этихъ множителей, даютъ сумму, тождественно равную нулю; значитъ, тоже относится и къ первымъ частямъ уравненій, т.-е.

$$(mx_1 - x) dx_1 + (my_1 - y) dy_1 + (mz_1 - z) dz = 0, \quad (7)$$

при чемъ  $m$  опредѣляется изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + mx + n \frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ y_1 + my + n \frac{d\varphi}{dy} &= 0, \\ z_1 + mz + n \frac{d\varphi}{dz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

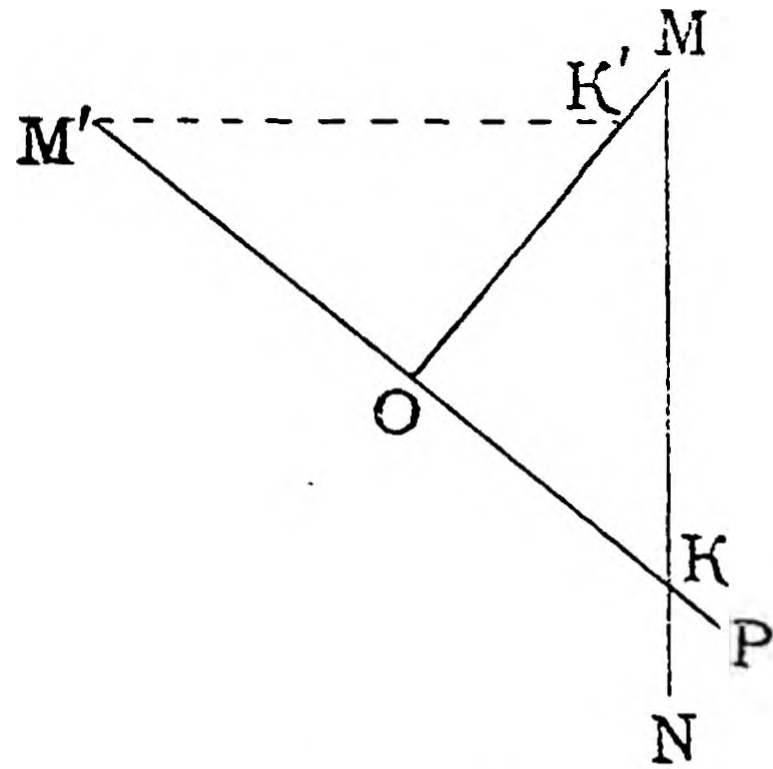
каждое изъ которыхъ есть слѣдствіе двухъ другихъ.

Какъ и въ предыдущихъ задачахъ, мы увидимъ, что, по уравненію (7), нормаль къ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , образуетъ съ



осями углы, косинусы которых пропорциональны  $mx_1 = x$ ,  $my_1 = y$ ,  $mz_1 = z$ . Таким образом, предложенная задача решена. Покажем, на сколько изящно может быть истолкованъ этотъ результатъ.

Разсмотримъ треугольникъ  $OMK$  (черт. 21), составленный прямою  $OM$ , нор-



Черт. 21.

малю  $MN$  и линією  $OP$ . Такъ какъ сумма проецій боковъ треугольника на оси координатъ равна нулю, то

$$\begin{aligned} \frac{OKx_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{xOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= 0, \\ \frac{OKy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{yOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= 0, \\ \frac{OKz_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \frac{KM \frac{d\varphi}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} - \frac{zOM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= 0; \end{aligned}$$

отсюда видно, что мы, принимая во вниманіе равенство  $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , удовлетворимъ уравненіямъ (8), выбравъ

$$m = -\frac{OM}{OK}, \quad n = +\frac{KM}{OK} \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

Косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью въ точкѣ  $P$  съ осями, пропорціональны

$$x_1 OM + x OK, \quad y_1 OM + y OK, \quad z_1 OM + z OK.$$

Отлагая же на  $OM$  длину  $OK' = OK$  и на продолженіи  $OP$  длину  $OM' = OM$ , видимъ, что эти три выраженія пропорціональны проеціямъ на оси линіи  $K'M'$ , соединяющей полученныя такимъ образомъ точки. Слѣдовательно эта линія  $K'M'$  параллельна иско- мой нормали, а изъ элементарной геометріи ясно, что она же въ плоскости  $MOP$  перпендикулярна къ  $MK$ . Точно такой же результатъ мы нашли въ § 14-мъ.

§ 102. Приложимъ, наконецъ, теорію касательныхъ плоскостей къ опредѣленію закона, по которому перемѣщается касательная плоскость къ линейчатой поверхности въ различныхъ точкахъ одной и той же прямолинейной производящей.

Пусть

$$\begin{cases} x = z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y = zf(\alpha) + F(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

будутъ уравненія производящей; при измѣненіи параметра  $\alpha$  эта производящая займетъ въ пространствѣ рядъ положеній, совокупность которыхъ даетъ рассматриваемую поверхность. Не измѣняя ни въ чемъ закона, который мы разыскиваемъ, предположимъ, для упрощенія, что при какомъ-нибудь значеніи  $\alpha$ , напр.  $\alpha = 0$ , производящая совпадаетъ съ осью  $z$ -овъ; для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \quad \psi(0) = 0, \\ f(0) &= 0, \quad F(0) = 0. \end{aligned}$$

Поищемъ, какъ измѣняются плоскости, касающіяся поверхности въ различныхъ точкахъ оси  $z$ -овъ. Въ уравненія этихъ плоскостей, какъ содержащихъ ось  $z$ -овъ, не войдетъ координата, параллельная этой оси, и нельзя будетъ воспользоваться формулою:

$$v - z = (t - x) \frac{dz}{dx} + (u - y) \frac{dz}{dy},$$

потому что коэффициенты  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  необходимо являются бесконечно-огромными. Поэтому слѣдуетъ однѣ координаты замѣнить другими, что возможно, такъ какъ отъ этого ничего существенно не измѣнится; итакъ, возьмемъ формулу:

$$u - y = (t - x) \frac{dy}{dx} + (v - z) \frac{dy}{dz}.$$

Уравненіе не должно содержать буквы  $v$ , координаты, параллельной оси  $z$ -овъ; значитъ,  $\frac{dy}{dz} = 0$ . Посредствомъ вычисленія приходимъ къ тому же заключенію.

Чтобы вычислить  $\frac{dy}{dx}$ , дифференцируемъ уравненія (1), рассматривая  $z$ , какъ постоянную; находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] d\alpha, \\ dy &= [zf'(\alpha) + F'(\alpha)] d\alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{zf'(\alpha) + F'(\alpha)}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}, \end{aligned}$$

при чемъ нужно считать  $\alpha = 0$ .

Чтобы вычислить  $\frac{dy}{dz}$  и доказать, что она равна нулю, дифференцируем оба уравнения (1), рассматривая  $x$ , какъ постоянную; находимъ:

$$\begin{aligned} 0 &= [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] d\alpha + \varphi(\alpha) dz, \\ dy &= [zf'(\alpha) + F'(\alpha)] d\alpha + f(\alpha) dz, \end{aligned}$$

а отсюда, по исключеніи  $d\alpha$ ,

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{\varphi(\alpha) [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]}{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)} + f(\alpha),$$

что при  $\alpha = 0$  обращается въ нуль вслѣдствіе сдѣланныхъ предположеній:  $\varphi(0) = 0$ ,  $f(0) = 0$ .

Въ такомъ случаѣ уравненіе искомой касательной плоскости будетъ:

$$u - y = (t - x) \frac{zf'(0) + F'(0)}{z\varphi'(0) + \psi'(0)},$$

полагая

$$\begin{aligned} f'(0) &= a, & F'(0) &= b, \\ \varphi'(0) &= m, & \psi'(0) &= n, \end{aligned}$$

видимъ, что уголъ  $\theta$ , образуемый этою плоскостью съ плоскостью  $ZX$ , выразится формулою:

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{az + b}{mz + n}.$$

Если подставить вмѣсто плоскости  $ZX$  новую плоскость, образующую съ  $ZX$  уголъ  $\varphi$ , то наклоненіе  $\theta'$  къ этой новой плоскости выразится формулою:

$$\operatorname{tang} \theta' = \operatorname{tang} (\theta - \varphi) = \frac{(az + b) - \operatorname{tang} \varphi (mz + n)}{(mz + n) + (az + b) \operatorname{tang} \varphi},$$

и если уголъ  $\varphi$  выбранъ такъ, что

$$m + a \operatorname{tang} \varphi = 0,$$

то

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{(a - m \operatorname{tang} \varphi)z}{(n + b \operatorname{tang} \varphi)} + \frac{(b - n \operatorname{tang} \varphi)}{(n + b \operatorname{tang} \varphi)}.$$

Такимъ образомъ тангенсъ угла, образуемаго касательною плоскостью съ неподвижною плоскостью, проведенною черезъ произвольную, выражается функциею вида

$$Gz + H,$$

а если перенести начало координатъ въ точку оси  $z$ -овъ, ордината которой по этой оси есть

$$z' = -\frac{H}{G},$$

то  $z$  нужно будетъ замѣнить суммою  $z + z'$  и выраженіе  $\text{tang} \theta'$  превратится просто въ

$$Gz.$$

Итакъ, мы видимъ, что тангенсъ угла, составляемаго касательною плоскостью съ неподвижною пропорціоналенъ разстоянію точки касанія до точки, надлежащимъ образомъ выбранной на производящей.

§ 103. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ постоянная  $G$  равна нулю и самая плоскость есть касательная во всѣхъ точкахъ производящей.

Поищемъ для этого необходимое условіе и, притомъ, не только для отдѣльной производящей, но для всѣхъ производящихъ поверхности.

Вернемся снова къ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + F(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

представляющимъ собою какую-угодно производящую. Чтобы касательная плоскость была касательною вдоль всей этой производящей, необходимо, чтобы оба дифференціальныя коэффициента,  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , были функциями отъ одной, только перемѣнной  $\alpha$  и сохраняли бы одно и то же значеніе, пока не измѣняется  $\alpha$ .

Вычислимъ, напр.,  $\frac{dz}{dx}$ ; для этого дифференцируемъ оба уравненія (1), рассматривая  $y$ , какъ постоянную. Находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= dz\varphi(\alpha) + [z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)]d\alpha, \\ 0 &= dzf(\alpha) + [zf'(\alpha) + F'(\alpha)]d\alpha, \end{aligned}$$

откуда, по исключеніи  $d\alpha$ ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\varphi(\alpha) + \frac{z\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)}{zf'(\alpha) + F'(\alpha)}f(\alpha)}.$$

Чтобы эта функція зависѣла только отъ  $\alpha$  и не зависѣла отъ  $z$ , должно существовать равенство:

$$\frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\psi'(\alpha)}{F'(\alpha)},$$

выражая, что  $\frac{dz}{dy}$  не зависитъ отъ  $z$ , мы нашли бы то же самое условіе, которое, слѣдовательно, и представляетъ собою рассматриваемое свойство.

Это условіе получаетъ замѣчательное геометрическое истолкованіе: оно показываетъ, что производящая, уравненія которой

$$\left. \begin{aligned} x &= z\varphi(\alpha) + \psi(\alpha), \\ y &= zf(\alpha) + F(\alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



пересѣкаетъ безконечно-близкую производящую, представляемую уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x &= z \varphi(\alpha) + z \varphi'(\alpha) d\alpha + \psi(\alpha) + \psi'(\alpha) d\alpha, \\ y &= z f(\alpha) + z f'(\alpha) d\alpha + F(\alpha) + F'(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Мы не будемъ здѣсь останавливаться на слѣдствіяхъ изъ полученнаго результата и на томъ, какъ его нужно понимать; наша цѣль въ настоящій моментъ—дать приложеніе теоріи касательныхъ плоскостей къ одному весьма важному классу поверхностей.

### Огибающія кривыя и поверхности

§ 104. Когда въ уравненіе кривой входитъ произвольный параметръ, то получается безчисленное множество формъ и различныхъ положеній этой кривой. *Огибающею кривою* для такой подвижной кривой называется неподвижная линія, къ которой подвижная кривая остается касательною во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Подвижная кривая, къ которой огибающая постоянно касательна, получаетъ въ такомъ случаѣ названіе *огибаемой кривой*.

Не трудно усмотрѣть изъ чертежа, что огибающая представляетъ геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія каждой подвижной кривой съ безконечно ей близкою кривою.

Въ самомъ дѣлѣ, придавая переменному параметру послѣдовательно весьма малыя приращенія, мы получаемъ рядъ огибаемыхъ кривыхъ, точки пересѣченія которыхъ съ соотвѣтственно смежною каждой изъ нихъ кривою образуютъ вершины криволинейнаго многоугольника, каждая сторона котораго представитъ собою небольшую дугу одной изъ кривыхъ. Предѣлъ этого многоугольника коснется, очевидно, всѣхъ разсматриваемыхъ нами кривыхъ и пройдетъ чрезъ точки пересѣченія каждой изъ нихъ съ безконечно ей близкою кривою.

Поэтому, чтобы найти уравненіе огибающей кривой, предположимъ, что

$$\varphi(x, y, a) = 0 \quad (1)$$

есть уравненіе огибаемой подвижной кривой въ одномъ изъ ея положеній; уравненіе той же кривой въ безконечно-близкомъ положеніи будетъ

$$\varphi(x, y, a + da) = 0. \quad (2)$$

Чтобы получить координаты точки огибающей, нужно рѣшить совмѣстно уравненія (1) и (2). Вычитая ихъ другъ изъ друга и дѣля результатъ на  $da$ , мы получаемъ такое уравненіе

$$\frac{d\varphi(x, y, a)}{da} = 0, \quad (3)$$

которымъ можемъ замѣнить одно изъ двухъ предыдущихъ. Уравненіе же геометриче-

скаго мѣста полученныхъ такимъ образомъ точекъ касанія, т.-е. уравненіе искомой огибающей, мы найдемъ, исключая  $a$  изъ уравненій (1) и (3).

Итакъ, уравненіе огибающей кривыхъ, выражаемыхъ уравненіемъ  $\varphi(x, y, a) = 0$ , находится посредствомъ исключенія постоянной  $a$  изъ ихъ уравненія и его производной, взятой по этой постоянной.

§ 105. Можно доказать аналитически, что результатъ исключенія  $a$  изъ уравненій:

$$\varphi(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi(x, y, a)}{da} = 0 \quad (2)$$

выразить собою кривую, касательную къ каждой изъ предположенныхъ огибаемыхъ кривыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что въ уравненіи (1)  $a$  замѣнено его значеніемъ изъ уравненія (2); исключеніе, такимъ образомъ, будетъ сдѣлано и получится уравненіе вида

$$\varphi(x, y, A) = 0, \quad (3)$$

гдѣ  $A$  обозначаетъ функцію отъ  $x$  и  $y$ . Можно утверждать, что касательная къ кривой, выражаемой уравненіемъ (3), въ каждой ея точкѣ есть въ то же время касательная къ огибаемой кривой, проходящей черезъ эту точку. Дѣйствительно, угловой коэффициентъ  $\frac{dy}{dx}$ , для кривой (3), опредѣляется изъ уравненія:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dA} \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} \right) = 0;$$

для кривой же, выражаемой уравненіемъ (1), въ которомъ количеству  $a$  придается численное значеніе, принимаемое величиною  $A$  въ рассматриваемой точкѣ, угловой коэффициентъ получится изъ уравненія:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0,$$

которое вполне совпадаетъ съ предыдущимъ вслѣдствіе условія  $\frac{d\varphi}{dA} = 0$ , справедливаго во всѣхъ точкахъ огибающей кривой.

§ 106. Когда въ уравненіе поверхности входитъ произвольный параметръ, то эта поверхность можетъ принять, вслѣдствіе измѣненій такого параметра, безчисленное множество формъ и различныхъ положеній. Геометрическое мѣсто пересѣченій каждой поверхности съ бесконечно ей близкою поверхностью касается, по нѣкоторой кривой, каждой изъ рассматриваемыхъ поверхностей и называется *огибающею поверхностью* относительно этихъ послѣднихъ, которыя въ такомъ случаѣ получаютъ названіе *огибаемыхъ поверхностей*.

Въ самомъ дѣлѣ, приписывая произвольному параметру рядъ послѣдовательныхъ весьма малыхъ приращеній, мы получимъ рядъ поверхностей, изъ которыхъ каждая

пересѣчеть предыдущую, и на каждой изъ нихъ будемъ имѣть по двѣ смежныхъ кривыхъ, происшедшихъ отъ пересѣченій этой поверхности съ предыдущею и съ послѣдующею; между каждыми двумя такими кривыми содержится зона, — совокупность же этихъ зонъ дастъ въ предѣлѣ поверхность, представляющую геометрическое мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій разсматриваемыхъ нами поверхностей, которыхъ она будетъ касаться, всѣхъ безъ исключенія, по нѣкоторымъ кривымъ, такъ какъ такая поверхность служить предѣломъ совокупности зонъ, взятыхъ соотвѣтственно съ каждой изъ нихъ.

§ 107. Кривая пересѣченія двухъ бесконечно-близкихъ поверхностей, соотвѣтствующихъ значеніямъ  $a$  и  $a + da$  параметра  $a$ , выразится двумя уравненіями:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, a) &= 0, \\ \varphi(x, y, z, a + da) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

которыя можно замѣнить точно такъ же, какъ и въ § 104-мъ, системою:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, a) &= 0, \\ \frac{d\varphi(x, y, z, a)}{da} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Можно доказать аналитически, что поверхность, уравненіе которой получается посредствомъ исключенія  $a$  изъ уравненій (1) и (2), касательна ко всѣмъ разсматриваемымъ поверхностямъ. Дѣйствительно, допустимъ, что въ уравненіи (1)  $a$  замѣнено его значеніемъ изъ (2); исключеніе, такимъ образомъ, будетъ сдѣлано и получится уравненіе вида

$$\varphi(x, y, z, A) = 0,\tag{3}$$

гдѣ  $A$  обозначаетъ функцію отъ  $x, y, z$ . Можно утверждать, что въ каждой точкѣ эта поверхность имѣетъ съ огибаемою поверхностью, проходящею черезъ эту точку, общую касательную плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, оба коэффициента  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  уравненія касательной плоскости опредѣляются, для кривой (3), изъ уравненій:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{d\varphi}{dA} \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{d\varphi}{dA} \left( \frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dy} \right) &= 0;\end{aligned}$$

для той же изъ огибаемыхъ поверхностей, для которой постоянная равна численному значенію  $A$  въ разсматриваемой точкѣ, оба коэффициента касательной плоскости получатся изъ уравненій:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0,\end{aligned}$$

которые вполне согласуются съ предыдущими вслѣдствіе условія  $\frac{d\phi}{dA} = 0$ , справедливаго во всѣхъ точкахъ огибающей поверхности. Значитъ, обѣ касательныя плоскости совпадаютъ.

§ 108. Можно также искать огибающую поверхностей, выражаемыхъ уравненіемъ:

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

гдѣ  $a$  и  $b$ —двѣ произвольныя постоянныя. Чтобы получить уравненіе такой огибающей, нужно исключить  $a$  и  $b$  изъ трехъ уравненій:

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0. \quad (2)$$

Результатъ исключенія представитъ собою поверхность, касающуюся каждой изъ разсматриваемыхъ поверхностей въ одной точкѣ, чѣмъ этотъ случай и будетъ отличаться отъ предыдущаго, гдѣ каждая огибаемая соприкасалась съ огибающею по кривой. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что при данныхъ значеніяхъ  $a$  и  $b$  уравненія (1) и (2) имѣютъ определенное число рѣшеній, представляющихъ собою тѣ точки, въ которыхъ поверхность, соотвѣтствующая выбраннымъ значеніямъ  $a$  и  $b$ , соприкасается съ огибающею. Не трудно замѣтить, что въ каждой изъ такихъ точекъ обѣ поверхности имѣютъ общую касательную плоскость.

Дѣйствительно, уравненіе первой изъ нихъ есть

$$F(x, y, z, a, b) = 0; \quad (1)$$

уравненіе же второй отличается тѣмъ, что  $a$  и  $b$  замѣнены двумя функціями  $A$  и  $B$  отъ  $x, y, z$ , представляющими собою значенія  $a$  и  $b$  изъ уравненій (2). Чтобы вычислить коэффициенты уравненія плоскости, касательной къ поверхности (1), нужно воспользоваться уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

такіе же коэффициенты для плоскости, касательной къ поверхности

$$F(x, y, z, A, B) = 0,$$

мы получимъ изъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{dA} \left( \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dF}{dB} \left( \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dx} \right) &= 0, \\ \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{dA} \left( \frac{dA}{dy} + \frac{dA}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dF}{dB} \left( \frac{dB}{dy} + \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dy} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



А такъ какъ въ каждой точкѣ огибающей поверхности  $\frac{\partial F}{\partial A} = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial B} = 0$ , то  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , выведенныя изъ уравненій (3), ничѣмъ не отличаются отъ значеній, выведенныхъ изъ уравненій (4).

#### ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ НѢКОТОРЫМЪ ПРИМѢРАМЪ

##### § 109. Огибающая эллипсовъ, выражаемыхъ уравненіемъ:

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1,$$

въ которомъ  $k$  — постоянная и  $a$  — произвольный параметръ. — Уравненіе  $\frac{du}{da} = 0$  здѣсь будетъ:

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{(k-a)^3} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

$$k - a = \frac{ky^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}};$$

подставляя эти значенія въ данное уравненіе, получаемъ для огибающей уравненіе:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

§ 110. Огибающая прямой постоянной длины, скользящей по прямоугольнымъ осямъ. — Принимая данныя оси за оси координатъ, пишемъ уравненіе подвижной прямой:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (1)$$

гдѣ  $a$  и  $b$  связаны равенствомъ:

$$a^2 + b^2 = l^2. \quad (2)$$

Уравненіе подвижной прямой заключаетъ здѣсь два переменныхъ параметра  $a$  и  $b$ , между которыми, однако, существуетъ известное соотношеніе; поэтому, можно рассмотреть  $b$ , какъ данную функцію отъ  $a$ , и примѣнить общій методъ. Дифференцируя уравненія (1) и (2) по  $a$ , находимъ:

$$\frac{xda}{a^2} + \frac{ydb}{b^2} = 0, \quad (3)$$

$$ada + bdb = 0. \quad (4)$$

Нужно исключить  $db$  изъ этихъ уравненій и затѣмъ приравнять нулю коэффициентъ при  $da$ . Очевидно, мы придемъ къ тому же результату, если умножимъ первое изъ нихъ на неопредѣленный множитель —  $\lambda$ , сложимъ его затѣмъ со вторымъ и приравняемъ нулю коэффициенты при  $da$  и  $db$ . Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{\lambda x}{a^2} = a, \quad \frac{\lambda y}{b^2} = b. \quad (5)$$

Умножая эти уравненія соответственно на  $a$  и  $b$  и складывая, получаемъ:

$$\lambda \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) = a^2 + b^2,$$

откуда, на основаніи уравненій (1) и (2),

$$\lambda = l^2. \quad (6)$$

Слѣдовательно, уравненія (5) даютъ:

$$a^3 = l^2 x, \quad b^3 = l^2 y; \quad (7)$$

наконецъ, исключаемъ  $a$  и  $b$  изъ уравненій (2) и (7):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

Полученное геометрическое мѣсто того же характера, что и въ предыдущемъ примѣрѣ. Это можно было предвидѣть, замѣтивъ, что если прямая постоянной длины вписана въ прямой уголъ, то ея различныя точки описываютъ эллипсы, общее уравненіе которыхъ разсмотрѣно въ предыдущей задачѣ. Дѣйствительно, совокупность эллипсовъ и совокупность прямыхъ покрываютъ въ такомъ случаѣ одну и ту же часть плоскости и, значитъ, предѣльныя точки для обѣихъ группъ намѣчаются одною и тою же огибающею.

§ 111. Поверхность свѣтовыхъ волнъ. — Данъ эллипсоидъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Черезъ центръ этой поверхности проведена произвольная плоскость  $P$ , пересѣкающая ее по эллипсу  $E$ ; параллельно плоскости  $P$  проведена вторая плоскость  $P'$  на разстояніи обратно-пропорціональномъ одной изъ осей эллипса  $E$ . Огибающая совокупность плоскостей  $P'$  играетъ весьма важную роль въ теоріи свѣта. Отыщемъ ея уравненіе.

Обѣ оси эллипса, по которому эллипсоидъ пересѣченъ плоскостью будутъ корнями уравненія:

$$\frac{\frac{l^2}{a^2} - \frac{1}{u^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{u^2}} + \frac{\frac{m^2}{b^2} - \frac{1}{u^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{u^2}} + \frac{\frac{n^2}{c^2} - \frac{1}{u^2}}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{u^2}} = 0,$$

гдѣ  $l, m, n$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями нормалю къ этой плоскости \*); такимъ образомъ, если положить  $\frac{1}{u} = v, \frac{1}{a} = a', \frac{1}{b} = b', \frac{1}{c} = c'$ , то уравненіе отгибаемой плоскости, разстояніе которой отъ начала равно  $\frac{1}{u}$ , будетъ

$$lx + my + nz = v,$$

при чемъ

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ \frac{l^2}{v^2 - a'^2} + \frac{m^2}{v^2 - b'^2} + \frac{n^2}{v^2 - c'^2} = 0.$$

Уравненіе подвижной плоскости содержитъ здѣсь четыре параметра  $l, m, n, v$ , связанныхъ между собою двумя равенствами, а такой случай былъ уже рассмотрѣнъ выше (§ 108). Итакъ, намъ нужно было бы исключить два изъ этихъ параметровъ и приравнять нулю производныя отъ уравненія подвижной плоскости, взятыя по остальнымъ параметрамъ, а это, очевидно, то же самое, что продифференцировать по четыремъ параметрамъ какъ переменнымъ и исключить два изъ четырехъ дифференціаловъ, чтобы затѣмъ въ окончательномъ уравненіи приравнять нулю коэффициенты при двухъ остальныхъ.

Дифференцируя уравненіе подвижной плоскости и оба равенства, связывающія параметры, находимъ:

$$xdl + ydm + zdn = dv, \quad (1)$$

$$ldl + mdm + ndn = 0, \quad (2)$$

$$\frac{ldl}{v^2 - a'^2} + \frac{mdm}{v^2 - b'^2} + \frac{ndn}{v^2 - c'^2} = vdv \left[ \frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2} \right]. \quad (3)$$

Умноживъ первое изъ этихъ равенствъ на  $\lambda$ , второе на  $\mu$  и третье на  $-1$ , складываемъ ихъ и приравниваемъ нулю коэффициенты при  $dl, dm, dn$  и  $dv$ :

$$\lambda x + \mu l = \frac{l}{v^2 - a'^2}, \quad (4)$$

$$\lambda y + \mu m = \frac{m}{v^2 - b'^2}, \quad (5)$$

$$\lambda z - \mu n = \frac{n}{v^2 - c'^2}, \quad (6)$$

$$\lambda = v \left[ \frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2} \right] \quad (7)$$

\*) Мы выводимъ это уравненіе въ теоріи maxima и minima. Можно составить его непосредственно, замѣчая, что въ эллипсоидѣ произведеніе двухъ осей діаметрального сѣченія на перпендикуляръ, опущенный на параллельную касательную плоскость, равно произведенію трехъ осей и что сумма квадратовъ величинъ, обратныхъ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ діаметрамъ, постоянна и равна суммѣ квадратовъ величинъ, обратныхъ осямъ.

Умноживъ равенства (4), (5) и (6) на  $l$ ,  $m$  и  $n$  и сложивъ, получаемъ:

$$\lambda v + \mu = 0; \quad (8)$$

съ другой стороны, умноживъ тѣ же равенства на  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и положивъ  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , найдемъ:

$$\lambda r^2 + \mu v = \frac{lx}{v^2 - a'^2} = \frac{my}{v^2 - b'^2} + \frac{nz}{v^2 - c'^2}, \quad (9)$$

или, въ силу равенства (8),

$$\lambda(r^2 - v^2) = \frac{lx}{v^2 - a'^2} + \frac{my}{v^2 - b'^2} + \frac{nz}{v^2 - c'^2}. \quad (10)$$

Перенеся въ равенствахъ (4), (5) и (6) вторые члены во вторую часть, возвышаемъ ихъ въ квадратъ и складываемъ:

$$\lambda^2 r^2 = \mu^2 + \frac{l^2}{(v^2 - a'^2)^2} + \frac{m^2}{(v^2 - b'^2)^2} + \frac{n^2}{(v^2 - c'^2)^2};$$

отсюда, на основаніи равенствъ (7) и (8),

$$\lambda^2 (r^2 - v^2) = \frac{\lambda}{v}, \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{1}{v(r^2 - v^2)} \quad (12)$$

и, слѣдовательно,

$$\mu = \frac{1}{v^2 - r^2}. \quad (13)$$

Подставляя значенія  $\lambda$  и  $\mu$  въ уравненіе (4), находимъ:

$$\frac{x}{v(r^2 - v^2)} = l \left[ \frac{1}{r^2 - v^2} + \frac{1}{v^2 - a'^2} \right],$$

откуда

$$\frac{x}{r^2 - a'^2} = \frac{vl}{v^2 - a'^2};$$

такъ же

$$\frac{y}{r^2 - b'^2} = \frac{vm}{v^2 - b'^2},$$

$$\frac{z}{r^2 - c'^2} = \frac{vn}{v^2 - c'^2}.$$

Полученныя уравненія умножаемъ на  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и складываемъ; тогда, на основаніи равенствъ (10) и (12),

$$\frac{x^2}{r^2 - a'^2} + \frac{y^2}{r^2 - b'^2} + \frac{z^2}{r^2 - c'^2} = 1.$$



Это и есть уравнение поверхности волны. Не слѣдуетъ забывать, что  $r^2$  представляетъ здѣсь  $x^2 + y^2 + z^2$ .

§ 112. Развертывающіяся поверхности. — Если плоскость движется по опредѣленному закону и уравнение ея содержитъ только одинъ произвольный параметръ, огибающая различныхъ положеній этой плоскости называется *развертывающеюся поверхностью*.

Такъ какъ огибающая поверхность служитъ геометрическимъ мѣстомъ послѣдовательныхъ пересѣченій каждаго положенія огибаемой плоскости съ бесконечно-близкимъ ему положеніемъ, то развертывающаяся поверхность представить геометрическое мѣсто ряда прямыхъ линій и, кромѣ того, каждая касательная плоскость касается по одной изъ этихъ прямолинейныхъ производящихъ.

Если уравнение подвижной плоскости есть

$$z = x\varphi(\alpha) + yf(\alpha) + F(\alpha),$$

то уравнение развертывающейся поверхности получится по исключеніи  $\alpha$  изъ этого уравненія и уравненія:

$$0 = x\varphi'(\alpha) + yf'(\alpha) + F'(\alpha).$$

§ 113. Каналообразныя поверхности. — *Каналообразною поверхностью* называется огибающая различныхъ положеній сферы постояннаго радіуса, центръ которой движется по данной кривой. Такая поверхность представляетъ геометрическое мѣсто пересѣченій двухъ бесконечно-близкихъ сферъ.

Такъ какъ очевидно, что двѣ бесконечно-близкія сферы пересѣкаются по большому кругу, лежащему въ плоскости перпендикулярной къ линіи центровъ, то каналообразная поверхность можетъ быть рассматриваема, какъ геометрическое мѣсто различныхъ положеній круга постояннаго радіуса, плоскость котораго остается перпендикулярною къ кривой, описываемой его центромъ. Кромѣ того, въ каждой точкѣ этого круга поверхность касательна къ одной и той же сферѣ и, слѣдовательно, всѣ нормали проходятъ черезъ одну и ту же точку — центръ круга.

Уравнение подвижной сферы постояннаго радіуса, содержащее произвольный параметръ, будетъ вида:

$$[x - \varphi(\alpha)]^2 + [y - \psi(\alpha)]^2 + [z - F(\alpha)]^2 = R^2,$$

и уравнение огибающей получится по исключеніи  $\alpha$  изъ этого уравненія и его производной, взятой по  $\alpha$ :

$$[x - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [y - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) + [z - F(\alpha)]F'(\alpha) = 0.$$

## УПРАЖНЕНІЯ

1. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что сумма квадратовъ длинъ нормалей, проведенныхъ изъ нихъ къ одной или нѣсколькимъ даннымъ кривымъ, есть величина постоянная, имѣетъ нормалью, въ каждой точкѣ, линію, направленную къ центру среднихъ разстояній основаній всѣхъ нормалей, опущенныхъ изъ этой точки на данныя кривыя.

2. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что сумма длинъ двухъ нормалей, проведенныхъ изъ нихъ къ одной и той же кривой или къ двумъ даннымъ кривымъ, есть величина постоянная, имѣетъ касательную биссектрису угла между двумя нормальями.

3. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что соотношеніе между длинами нормалей, опущенныхъ изъ нихъ на одну или нѣсколько данныхъ кривыхъ, представляетъ данную величину, имѣетъ ту же самую касательную, какъ и геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ существуетъ такое же соотношеніе между разстояніями до неподвижныхъ точекъ, служащихъ основапіями нормалей, соответствующихъ разсматриваемой точкѣ.

4. Въ треугольникѣ, образуемомъ тремя дугами равнобочныхъ гиперболъ съ общимъ центромъ или тремя дугами параболъ съ общимъ фокусомъ, сумма угловъ равна двумъ прямымъ.

5. Если уравненіе  $\varphi(x, y) = C$  при измѣненіи постоянной  $C$  даетъ рядъ параллельныхъ кривыхъ, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = F(\varphi),$$

гдѣ  $F(\varphi)$  есть функція отъ  $\varphi(x, y)$ .

6. Если уравненіе  $\varphi(x, y, z) = C$  при измѣненіи постоянной  $C$  даетъ рядъ параллельныхъ поверхностей, то

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = F(\varphi),$$

гдѣ  $F(\varphi)$  есть функція отъ  $\varphi(x, y, z)$ .

7. Если поверхность, уравненіе которой есть

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1,$$

пересѣчь сферами и эллипсоидами, выражаемыхъ уравненіями:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 &= P, \end{aligned}$$

то, каковы бы ни были постоянныя  $P$  и  $R$ , кривыя пересѣченія пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

8. Найти огибающую плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку и пересѣкающихъ двѣ данныхъ плоскости по взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ.

9. Когда кругъ катится по прямой, огибающая одного изъ его діаметровъ есть циклоида.

10. Когда какой-нибудь кругъ катится по другому кругу, огибающая одного изъ его діаметровъ есть энциклоида.

11. Когда плоскость перемѣщается такимъ образомъ, что сумма квадратовъ ея разстояній до неподвижныхъ точекъ есть величина постоянная, то она огибаетъ эллипсоидъ, центръ котораго совпадаетъ съ центромъ среднихъ разстояній данныхъ точекъ.

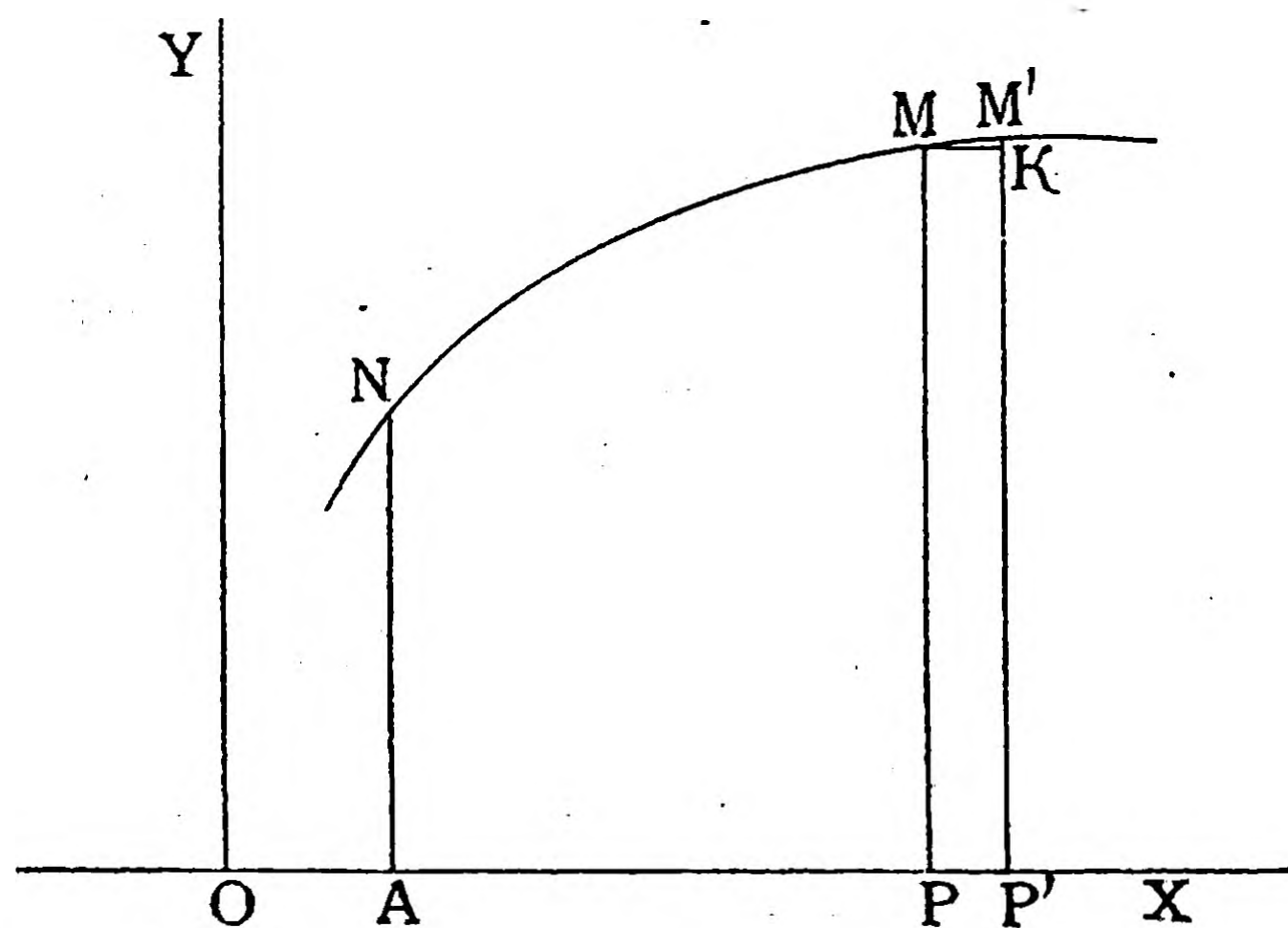
## ГЛАВА ПЯТАЯ

### Дифференциалы нѣкоторыхъ функцій, заданныхъ геометрически

#### Дифференціалъ площади, взятой на плоскости

§ 114. Невозможно разсмотрѣть всѣ неявныя функціи. Мы видѣли (§ 60), какъ дифференцируются функціи, получающіяся изъ рѣшенія данныхъ уравненій; въ этой главѣ мы остановимся только на площади данной кривой и на длинѣ дуги кривой.

Разсмотримъ сначала площадь, заключенную между плоскою кривою, осью  $X$ -овъ и двумя ординатами, изъ которыхъ одна—неподвижная, а другая—перемѣнная.



Черт. 22.

Такая площадь  $NAMP$  (черт. 22) есть неявная функція отъ  $x$ , дифференціалъ отъ которой мы и будемъ искать, предполагая, конечно, что кривая  $NM$  задана уравненіемъ.

Если приписать  $x$  бесконечно-малое приращеніе  $dx$ , представленное на чертежѣ отрезкомъ  $PP'$ , то рассматриваемая площадь возрастетъ на криволеиную трапецію  $MPM'R'$ , которую можно замѣнить прямоугольникомъ  $MKPP'$ , такъ какъ при

этомъ отбрасывается безконечно-малый треугольникъ второго порядка  $MKM'$ . Называя ординату  $MP$  черезъ  $y$ , можемъ написать:

$$MKPP' = ydx.$$

Значить, искомый дифференціалъ есть  $ydx$ , а производная отъ площади, взятая по  $x$ , есть  $y$ .

§ 115. Предыдущій результатъ даетъ непосредственное доказательство слѣдующей важной теоремы:

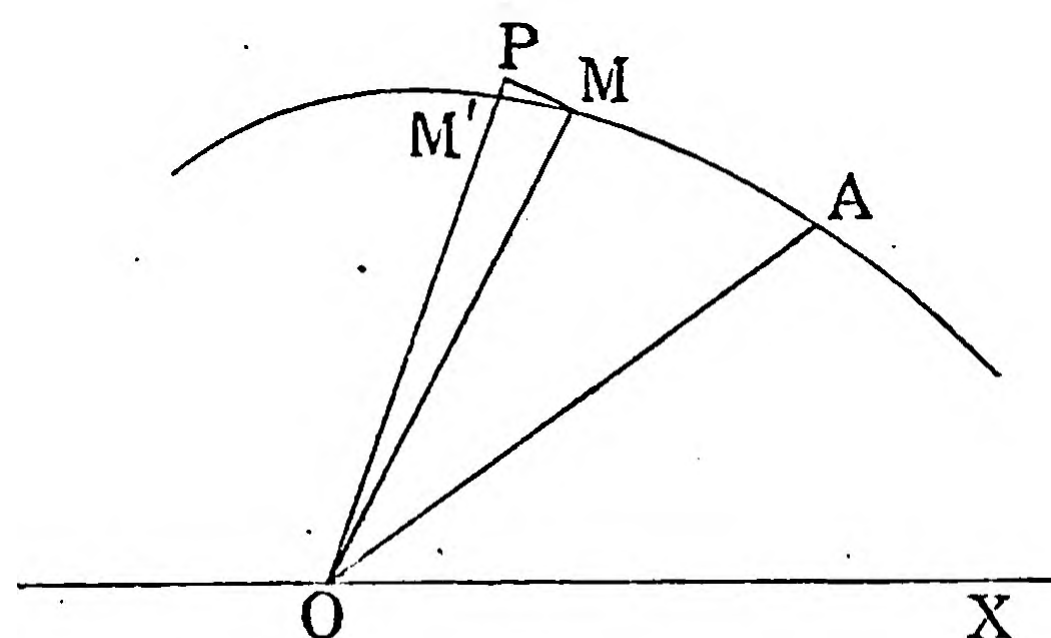
*Всегда найдется такая функція, производная отъ которой равна данной функціи  $\varphi(x)$ .*

Въ самомъ дѣлѣ, чтобы отыскать такую функцію, достаточно рассмотреть кривую, уравненіе которой въ прямоугольныхъ координатахъ есть

$$y = \varphi(x);$$

площадь, заключенная между неподвижною ординатою и ординатою, соответствующею абсциссѣ  $x$ , есть опредѣленная функція, производная отъ которой, по предыдущей теоремѣ, равна  $\varphi(x)$ .

§ 116. Рассмотримъ, во-вторыхъ, плоскую кривую, отнесенную къ полярнымъ координатамъ, и отыщемъ дифференціалъ площади, заключенной между этою кривою (черт. 23), неподвижнымъ радіусомъ-векторомъ  $OA$  и радіусомъ  $OM$ , соответствующимъ углу  $\omega$ .



Черт. 23.

Если приписать углу  $\omega$  безконечно-малое приращеніе  $MOM'$ , обозначаемое посредствомъ  $d\omega$ , то площадь возрастетъ на секторъ  $MOM'$ ; изъ точки  $O$ , какъ центра, описываемъ радіусомъ  $OM$  дугу круга  $MP$  и замѣняемъ  $OMM'$  секторомъ  $OMP$ , пренебрегая безконечно-малымъ треугольникомъ второго порядка  $MM'P$ . Секторъ  $OMP$  равенъ  $\rho^2 \frac{d\omega}{2}$ , что и будетъ дифференціаломъ рассматриваемой площади; производная же отъ этой площади, взятая по  $\omega$  есть  $\frac{\rho^2}{2}$ .

§ 117. Иногда требуется выразить предыдущій дифференціалъ въ прямолинейныхъ координатахъ, что не трудно вывести изъ только-что полученнаго результата.



Въ самомъ дѣлѣ, принимая за начало новыхъ координатъ полюсъ  $O$  и за ось  $X$ -овъ полярную ось, на основаніи извѣстныхъ формулъ перехода можемъ написать:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{y}{x}, \quad \omega = \operatorname{arctang} \frac{y}{x};$$

отсюда

$$d\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

и, на основаніи равенства  $x^2 + y^2 = \rho^2$ ,

$$\rho^2 d\omega = xdy - ydx;$$

такимъ образомъ, дифференціалъ площади  $AOM$  есть

$$dA = \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Эта формула можетъ дать для  $dA$  отрицательную величину; для этого достаточно, чтобы

$$xdy - ydx < 0,$$

т.-е. чтобы, при положительныхъ  $x$  и  $dx$ ,

$$\frac{dy}{dx} < \frac{y}{x},$$

а это значитъ, что параллель черезъ точку  $O$  для касательной въ точкѣ  $M$ , направленной въ сторону увеличенія  $x$ , проходитъ подъ радіусомъ-векторомъ  $OM$  и, слѣдовательно, уголъ  $\omega$  уменьшается, въ то время какъ радіусъ  $OM$  вращается вокругъ точки  $O$  при своемъ переходѣ въ положеніе  $OM'$ .

Итакъ, выраженіе  $xdy - ydx$ , какъ и слѣдовало ожидать, отрицательно въ томъ же смыслѣ, какъ и равносильное ему выраженіе  $\rho^2 d\omega$ .

#### Дифференціалъ дуги кривой

**§ 118.** Непосредственное сравненіе дуги кривой съ прямою линіей, принятой за единицу, невозможно,—необходимо опредѣленіе. Вводимъ слѣдующее опредѣленіе: длина дуги кривой есть предѣлъ, къ которому приближается периметръ вписаннаго многоугольника, когда его стороны безпредѣльно уменьшаются. Было доказано (§ 18), что

такое опредѣленіе вполне законно и что бесконечно-малая дуга отличается (§ 19) отъ своей хорды на бесконечно-малую третьяго порядка.

Пусть  $AM$  есть дуга плоской кривой, отнесенной къ прямоугольнымъ координатамъ  $OX$  и  $OY$ . Если при неподвижномъ концѣ  $A$  абсцисса конца  $M$  получить бесконечно-малое приращеніе, обозначаемое  $\Delta x$ , то дуга приметъ бесконечно-малое приращеніе  $MM'$ . Это послѣднее можетъ быть замѣнено (§ 19) его хордою, отличающеюся на бесконечно-малую третьяго порядка и равною

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

Отсюда заключаемъ, что отношеніе этой хорды къ  $\Delta x$  равно

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2},$$

а предѣлъ этого отношенія, т.-е. производная отъ дуги, есть

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Дифференціалъ дуги  $s$  выразится произведеніемъ этой производной на  $dx$ , т.-е.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Если заданная кривая есть плоская, то относя ее къ двумъ координатнымъ осямъ въ ея плоскости, очевидно, найдемъ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

§ 119. Приложимъ предыдущую формулу къ дугѣ циклоиды. Принимая за начало координатъ вершину, а за ось  $X$ -овъ касательную къ кривой, мы нашли (§ 83):

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}},$$

откуда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 \left[ 1 + \frac{2a-y}{y} \right] = \frac{2ady^2}{y}.$$

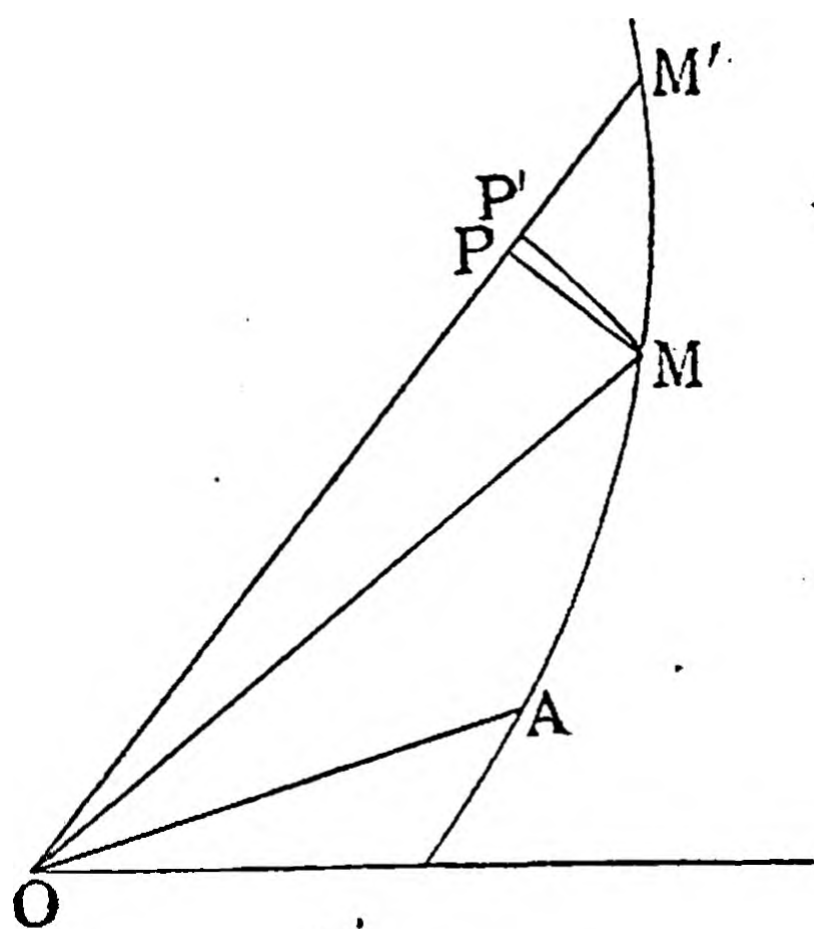
Замѣчая, что  $dy\sqrt{\frac{2a}{y}}$  есть дифференціалъ отъ  $2\sqrt{2ay}$ , выводимъ, что разность  $s - 2\sqrt{2ay}$  представить собою постоянную, такъ какъ ея дифференціалъ равенъ нулю. Отсчитывая дугу  $s$  отъ вершины циклоиды, видимъ, что оба члена равенности обра-

щаются одновременно въ нуль при  $y = 0$ ; слѣдовательно, эта постоянная равна нулю и

$$s = 2\sqrt{2ay}.$$

Не трудно признать тождественность этого результата съ найденнымъ въ § 20-мъ.

§ 120. Разсмотримъ теперь плоскую кривую  $AM$  (черт. 24), отнесенную къ полярнымъ координатамъ. Если конецъ  $A$  остается неподвижнымъ, а  $\rho$  и  $\omega$  обозначаютъ



Черт. 24.

координаты конца  $M$ , то дуга  $s$  есть функция отъ  $\omega$ , дифференціалъ которой мы и будемъ отыскивать.

Придаемъ  $\omega$  приращеніе  $\Delta\omega$ , представленное на чертежѣ угломъ  $MOM'$ ; тогда соотвѣтственное приращеніе дуги будетъ  $MM'$ . Предполагая  $\Delta\omega$  бесконечно-малымъ, мы можемъ дугу  $MM'$  замѣнить ея хордою, отличающеюся отъ нея на бесконечно-малую третьяго порядка. Опуская изъ точки  $M$  перпендикуляръ  $MP$  на радіусъ-векторъ  $OM'$ , находимъ:

$$\overline{MM'}^2 = \overline{M'P}^2 + \overline{MP}^2.$$

Описываемъ изъ начала  $O$ , какъ центра, радіусомъ  $OM$  дугу круга  $MP'$ , заключающуюся между радіусами-векторами  $OM$  и  $OM'$ ; тогда, пренебрегая вездѣ бесконечно-малыми порядка выше перваго, мы можемъ замѣнить  $M'P$  отрезкомъ  $M'P'$  и  $MP$  дугою  $MP'$ . Дѣйствительно, ошибка въ первой подстановкѣ равна  $PP'$ , т.-е. разности между длиною  $OM$  и ея проекціей на направленіе, образующее съ нею бесконечно-малый уголъ; подстановка же дуги  $MP'$  на мѣсто прямой  $MP$  равносильна замѣнѣ бесконечно-малаго синуса соотвѣтственною дугою.

Очевидно, имѣемъ:

$$M'P' = \Delta\rho,$$

$$MP' = \rho\Delta\omega.$$

Слѣдовательно, пренебрегая безконечно-малыми порядка выше второго, можемъ написать:

$$\overline{MM'}^2 = \Delta\rho^2 + \rho^2\Delta\omega^2.$$

Отсюда заключаемъ, что предѣлъ отношенія  $\frac{MM'}{\Delta\omega}$ , или, что одно и то же, производная отъ дуги  $s$  равна

$$\frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 + \rho^2},$$

откуда

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2},$$

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

Было найдено, что въ прямолинейныхъ координатахъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

въ полярныхъ же координатахъ

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega.$$

Эти выраженія равносильны и не трудно перейти отъ одного къ другому. Въ самомъ дѣлѣ,

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

откуда

$$dx = \cos \omega d\rho - \rho \sin \omega d\omega,$$

$$dy = \sin \omega d\rho + \rho \cos \omega d\omega;$$

возвышая въ квадратъ обѣ части двухъ послѣднихъ уравненій и складывая ихъ, находимъ:

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2.$$

**§ 121.** Точки въ пространствѣ иногда опредѣляютъ при помощи координатъ, аналогичныхъ полярнымъ: если  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  три прямоугольныхъ оси, то точка  $M$  задается ея разстояніемъ  $\rho$  до начала, угломъ  $\theta$ , который составляетъ этотъ радіусъ-векторъ съ осью  $Z$ -овъ, и угломъ  $\phi$  между плоскостью  $ZX$  и плоскостью, проходящею черезъ ось  $Z$ -овъ и радіусъ  $\rho$ .



Чтобы выразить дифференціалъ дуги кривой, отнесенной къ такой системѣ координатъ, рассмотримъ, во-первыхъ, кривую на поверхности сферы радіуса  $\rho$ . Точки этой кривой опредѣлятся координатами  $\theta$  и  $\psi$ . Точки на сферѣ, соотвѣтствующія одному и тому же значенію  $\psi$ , расположатся по большому кругу, лежащему въ плоскости, проходящей черезъ ось  $Z$ -овъ и составляющей съ плоскостью  $ZX$  уголъ  $\psi$ ; точки, соотвѣтствующія одному и тому же значенію  $\theta$ , расположатся по малому кругу, представляющему пересѣченіе сферы съ конусомъ вращенія около оси  $Z$ -овъ подъ угломъ  $\theta$ : радіусъ этого малаго круга, очевидно, равенъ  $\rho \sin \theta$ . Точка, опредѣляемая на сферѣ координатами  $\theta$  и  $\psi$ , будетъ пересѣченіемъ двухъ рассмотрѣнныхъ круговъ, первый изъ которыхъ можно принять за *меридіанъ* сферической поверхности, а второй за *параллель*.

Четыре круга, соотвѣтствующіе двумъ бесконечно-близкимъ точкамъ, имѣющимъ координаты  $\theta$  и  $\psi$  для одной изъ нихъ и  $\theta + d\theta$  и  $\psi + d\psi$  для другой, образуютъ бесконечно-малый прямоугольникъ, въ которомъ діагональ выразитъ разстояніе между этими двумя точками и можетъ быть рассмотрѣна, какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника. Такъ какъ двѣ остальные стороны послѣдняго представляютъ бесконечно-малыя круговыя дуги, то его можно принять за прямолинейный. Одинъ изъ катетовъ этого треугольника есть дуга круга радіуса  $\rho$  и соотвѣтствуетъ углу  $d\theta$ , — значитъ, онъ равенъ  $\rho d\theta$ ; другой есть дуга круга радіуса  $\rho \sin \theta$  и соотвѣтствуетъ углу  $d\psi$ , — значитъ, онъ равенъ  $\rho \sin \theta d\psi$ . Отсюда заключаемъ, что разстояніе  $ds$  между двумя разсматриваемыми точками выразится формулою:

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Разсмотримъ теперь какую-нибудь кривую въ пространствѣ. Каждая точка этой кривой опредѣляется тремя координатами  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\psi$ . Величина первой изъ нихъ  $\rho$  даетъ сферу, на которой находится точка; величина второй  $\theta$  даетъ конусъ, на которомъ также находится разсматриваемая точка; наконецъ, величина третьей изъ нихъ  $\psi$  даетъ плоскость, пересѣченіе которой со сферой и конусомъ и опредѣляетъ окончательно точку. Эти три поверхности, сфера, конусъ и плоскость, пересѣкаются попарно подъ прямыми углами; поэтому, шесть поверхностей, опредѣляющихъ двѣ бесконечно-близкія точки, составятъ прямоугольный бесконечно-малый параллелепипедъ, діагональ котораго выразитъ разстояніе между такими точками. Слѣдовательно, квадратъ послѣдняго,  $ds^2$ , есть сумма квадратовъ трехъ реберъ параллелепипеда, т.-е.

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

§ 122. Предыдущая формула можетъ быть выведена изъ уравненія:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi,$$

то

$$\begin{aligned} dz &= -\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho, \\ dx &= \rho \cos \theta d\theta \cos \psi - \rho \sin \theta \sin \psi d\psi + \sin \theta \cos \psi d\rho, \\ dy &= \rho \cos \theta d\theta \sin \psi + \rho \sin \theta \cos \psi d\psi + \sin \theta \sin \psi d\rho; \end{aligned}$$

возводя эти равенства въ квадратъ и складывая, находимъ:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЪ ДУГИ КРИВОЙ ВЪ КРИВОЛИНЕЙНЫХЪ КООРДИНАТАХЪ

§ 123. Самая общая система координатъ для опредѣленія точекъ въ пространствѣ получается отъ пересѣченія трехъ данныхъ поверхностей какого-угодно вида; каждая изъ нихъ находится черезъ приписываніе параметру, входящему въ ея уравненіе, нѣкотораго значенія. Предположимъ, что уравненія этихъ трехъ поверхностей рѣшены относительно переменныхъ параметровъ и приняли слѣдующій видъ:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi(x, y, z), \\ \beta &= \psi(x, y, z), \\ \gamma &= F(x, y, z). \end{aligned}$$

Придать  $\alpha$  нѣкоторое значеніе значитъ указать поверхность, на которой находится разсматриваемая точка; если придать заразъ  $\alpha$  и  $\beta$  нѣкоторыя значенія, то точка расположится уже на двухъ данныхъ поверхностяхъ, т.-е. расположится на кривой ихъ пересѣченія; окончательное положеніе точки опредѣлится пересѣченіемъ этой кривой съ поверхностью, соотвѣтствующею значенію, выбранному для  $\gamma$ .

Не трудно вычислить разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, координаты которыхъ суть  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$ . Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ  $ds$  это разстояніе, можемъ написать:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

А такъ какъ  $x, y, z$  могутъ быть приняты за три функціи отъ  $\alpha, \beta, \gamma$  и, слѣдовательно, можно написать равенства:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\alpha} d\alpha + \frac{dx}{d\beta} d\beta + \frac{dx}{d\gamma} d\gamma, \\ dy &= \frac{dy}{d\alpha} d\alpha + \frac{dy}{d\beta} d\beta + \frac{dy}{d\gamma} d\gamma, \\ dz &= \frac{dz}{d\alpha} d\alpha + \frac{dz}{d\beta} d\beta + \frac{dz}{d\gamma} d\gamma, \end{aligned}$$

то выражение для  $ds^2$  будетъ вида:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2 + D d\alpha d\beta + E d\alpha d\gamma + F d\beta d\gamma.$$

§ 124. Если поверхности, заданныя уравненіями, пересѣкаются подъ прямыми углами при всевозможныхъ значеніяхъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , то коэффициенты  $D$ ,  $E$ ,  $F$  въ предыдущей формулѣ исчезаютъ и выражение для  $ds^2$  приводится къ виду:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2.$$

Дѣйствительно, при такомъ допущеніи шесть поверхностей, соотвѣтствующихъ значеніямъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta + d\beta$ ,  $\gamma + d\gamma$  координатъ, составятъ прямоугольный параллелепипедъ, квадратъ діагонали котораго  $ds^2$  будетъ равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его реберъ; замѣчая же, что ребра обратятся въ соотвѣтственныя значенія  $ds$  при  $d\beta = 0$ ,  $d\gamma = 0$ , затѣмъ при  $d\alpha = 0$ ,  $d\gamma = 0$  и, наконецъ, при  $d\alpha = 0$ ,  $d\beta = 0$ , мы найдемъ ихъ длины изъ общаго выраженія для  $ds^2$  въ слѣдующемъ видѣ:

$$d\alpha \sqrt{A}, \quad d\beta \sqrt{B}, \quad d\gamma \sqrt{C}.$$

Отсюда выводимъ, что

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2 + C d\gamma^2,$$

и, значитъ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  равны нулю.

§ 125. Равнымъ образомъ, рассматривая прямоугольный бесконечно-малый параллелепипедъ, мы можемъ получить простое выраженіе для коэффициентовъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; такъ, напр.,  $A d\alpha^2$  есть квадратъ разстоянія между бесконечно-близкими точками, соотвѣтствующими координатамъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Назовемъ это разстояніе черезъ  $\epsilon$ ; его проэкціи на оси координатъ соотвѣтственно равны произведеніямъ  $\epsilon$  на косинусы угловъ, образуемыхъ его направлениемъ съ осями; такъ какъ послѣднее совпадаетъ съ направлениемъ нормали къ поверхности, уравненіе которой есть

$$\alpha = \varphi(x, y, z),$$

то всѣ три проэкціи выразятся слѣдующимъ образомъ:

$$dx = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}}, \quad dy = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}},$$

$$dz = \frac{\epsilon \frac{d\alpha}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}},$$

и, слѣдовательно, уравненіе:

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{dx} dx + \frac{d\alpha}{dy} dy + \frac{d\alpha}{dz} dz$$

перейдетъ въ

$$dx = \epsilon \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2},$$

откуда

$$\epsilon^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2}.$$

Черезъ  $\epsilon^2$  было обозначено произведеніе  $A d\alpha^2$ ,—значить,

$$A = \frac{1}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2};$$

точно такъ же

$$B = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2}, \quad C = \frac{1}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2},$$

и выраженіе для  $ds^2$  будетъ:

$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2} + \frac{d\beta^2}{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dz}\right)^2} + \frac{d\gamma^2}{\left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2}.$$

**§ 126.** Для изученія точекъ поверхности можно ее принять за одну изъ координатныхъ поверхностей, какъ соотвѣтствующую данному значенію одного изъ трехъ параметровъ, напр.,  $\gamma$ . Въ предыдущемъ выраженіи нужно тогда положить  $d\gamma = 0$ , и квадратъ разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками приметъ видъ:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  суть параметры двухъ системъ кривыхъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ на данной поверхности.



§ 127. Предыдущія формулы даютъ, какъ частный случай, формулу § 121-го для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками въ полярныхъ координатахъ, задаваемыхъ уравненіями:

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi,$$

или, что одно и то же, уравненіями:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctang \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \psi = \arctang \frac{y}{x}.$$

Здѣсь  $\rho$ ,  $\theta$  и  $\psi$  суть три параметра, обозначенные въ общей формулѣ буквами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; подставляя въ послѣднюю эти параметры, находимъ полученный въ § 122-мъ результатъ:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками на одной и той же сферѣ радіуса  $\rho$  слѣдуетъ въ предыдущей формулѣ положить  $d\rho = 0$ ; тогда

$$ds^2 = \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2),$$

что вполне совпадаетъ съ найденнымъ уже результатомъ.

§ 128. Послѣ полярной системы координатъ наиболѣе употребительная изъ криволинейныхъ та, въ которой каждая точка опредѣляется пересѣченіемъ трехъ однофокусныхъ поверхностей второй степени.

Пусть точка опредѣляется значеніями въ этой же точкѣ трехъ корней слѣдующаго уравненія относительно  $\mu$ :

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} - 1 = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $b$  и  $c$  данныя величины.

Для каждой точки пространства три корня этого уравненія—вещественны. Чтобы убѣдиться въ этомъ, напр. при  $b^2 < c^2$ , достаточно сдѣлать послѣдовательно  $\mu^2 = +\epsilon$ ,  $\mu^2 = b^2 - \epsilon$ ,  $\mu^2 = b^2 + \epsilon$ ,  $\mu^2 = c^2 - \epsilon$ ,  $\mu^2 = c^2 + \epsilon$ , гдѣ  $\epsilon$ —бесконечно-мало и положительно. Первая часть уравненія приметъ слѣдующіе знаки:

$$\begin{cases} \mu^2 = \epsilon & \dots & + \\ \mu^2 = b^2 - \epsilon & \dots & - \\ \mu^2 = b^2 + \epsilon & \dots & + \\ \mu^2 = c^2 - \epsilon & \dots & - \\ \mu^2 = c^2 + \epsilon & \dots & + \\ \mu^2 = +\infty & \dots & -1 \end{cases}$$

и такъ какъ она не обращается въ бесконечность для значеній  $\mu$ , лежащихъ между значеніями каждой изъ выписанныхъ паръ, то она необходимо обратится въ нуль въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ, и, слѣдовательно, уравненіе будетъ имѣть три корня: одинъ между 0 и  $b^2$ , другой между  $b^2$  и  $c^2$ , третій между  $c^2$  и  $+\infty$ . При первомъ корнѣ поверхность, выражаемая уравненіемъ (1), представитъ двуполый гиперболоидъ, при второмъ корнѣ—однополый гиперболоидъ и при третьемъ—эллипсоидъ. Называя корни черезъ  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\rho$  и предполагая  $\mu^2 > \nu^2 > \rho^2$ , получаемъ для всѣхъ трехъ поверхностей уравненія:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} &= 1.\end{aligned}\tag{2}$$

Не трудно замѣтить, что онѣ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

§ 129. Разсматривая, какъ координаты точки, соотвѣтственныя для нея значенія  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ , мы получимъ для разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками замѣчательное выраженіе. Начнемъ съ рѣшенія трехъ уравненій (2). Для этого разлагаемъ на простѣйшія дроби выраженіе:

$$\frac{(\lambda - \rho^2)(\lambda - \mu^2)(\lambda - \nu^2)}{\lambda(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}.$$

По извѣстному методу изъ элементарной алгебры эта дробь будетъ равна

$$1 - \frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} - \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

гдѣ

$$x^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{b^2 c^2}, \quad y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2(b^2 - c^2)}, \quad z^2 = \frac{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{c^2(c^2 - b^2)}.\tag{1}$$

Поэтому, если

$$1 - \frac{x^2}{\lambda} - \frac{y^2}{\lambda - b^2} - \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 0,$$

то для  $\lambda$  будутъ три значенія,  $\lambda = \rho^2$ ,  $\lambda = \mu^2$ ,  $\lambda = \nu^2$ , и формулы (1) дадутъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  въ функціи отъ трехъ соотвѣтственныхъ имъ параметровъ. Беря логарифмы отъ обѣихъ частей формулъ (1) и дифференцируя ихъ, находимъ:

$$\begin{aligned}dx &= \frac{x d\rho}{\rho} + \frac{x d\mu}{\mu} + \frac{x d\nu}{\nu}, \\ dy &= \frac{y \rho d\rho}{\rho^2 - b^2} + \frac{y \mu d\mu}{\mu^2 - b^2} + \frac{y \nu d\nu}{\nu^2 - b^2}, \\ dz &= \frac{z \rho d\rho}{\rho^2 - c^2} + \frac{z \mu d\mu}{\mu^2 - c^2} + \frac{z \nu d\nu}{\nu^2 - c^2};\end{aligned}$$

отсюда, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} + d\mu^2 \frac{(\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - \rho^2)}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} + \\ + d\nu^2 \frac{(\nu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \mu^2)}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)}.$$

При  $d\rho = 0$ , т.-е. когда обѣ бесконечно-близкія точки лежатъ на эллипсоидѣ, уравненіе котораго  $\rho = \text{const.}$ , послѣдняя формула перейдетъ въ слѣдующую:

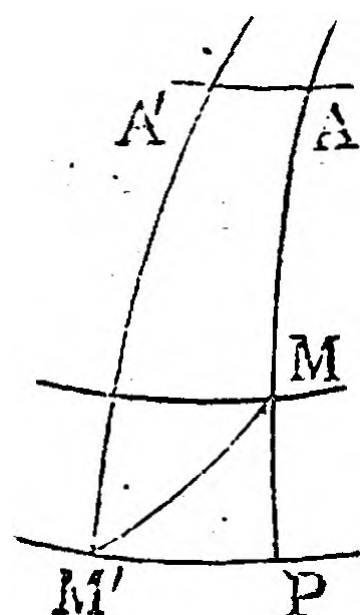
$$ds^2 = (\mu^2 - \nu^2) \left[ \frac{(\mu^2 - \rho^2) d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(\mu^2 - c^2)} + \frac{(\rho^2 - \nu^2) d\nu^2}{(\nu^2 - b^2)(\nu^2 - c^2)} \right].$$

§ 130. На каждой поверхности и для каждой системы переменныхъ соотвѣтствуетъ своя особая форма выраженія  $ds^2$ . Изученіе этихъ формъ, какъ увидимъ ниже, очень важно для теоріи поверхностей; здѣсь мы ограничимся поверхностями вращенія.

*Поверхности вращенія.*—Беря за координаты точекъ поверхности вращенія длину  $\sigma$ , отсчитанную по меридіану отъ неподвижной параллели до рассматриваемой точки, и уголъ  $\omega$  между неподвижнымъ меридіаномъ и меридіаномъ точки, замѣчаемъ непосредственно, что выраженіе для  $ds^2$  будетъ вида:

$$ds^2 = d^2\sigma + \varphi(\sigma) d\omega^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $M$  и  $M'$  (черт. 25) двѣ бесконечно-близкія точки;  $AM$ ,



Черт. 25.

$A'M'$  — соотвѣтственные имъ меридіаны;  $AM = \sigma$ ,  $A'M' = \sigma + d\sigma$ . Изъ треугольника  $MM'P$  можемъ написать:

$$\overline{MM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{M'P}^2;$$

такъ какъ  $\overline{MP}^2$  равно  $d\sigma^2$ ; а дуга  $M'P$  соотвѣтствуетъ углу  $d\omega$  между меридіанами и описана радіусомъ параллели, зависящей отъ  $\sigma$  по закону, измѣняющемуся вмѣстѣ

съ природою поверхности, то выраженіе для квадрата дуги будетъ имѣть какъ разъ вышеприведенный видъ:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma) d\omega^2.$$

§ 131. Только-что выведенныя общія формулы встрѣчаются особенно въ общей теоріи географическихъ картъ. Если предположить, что земная поверхность (какова бы ни была при этомъ ея форма) пересѣчена двумя рядами взаимно-перпендикулярныхъ кривыхъ, которымъ мы дадимъ названіе меридіановъ и параллелей, и притомъ такихъ, что чрезъ каждую точку поверхности проходитъ кривая каждаго вида, опредѣляемая параметромъ  $\alpha$  для меридіановъ (долготою) и параметромъ  $\beta$  для параллелей (широтою), то чтобы нанести на плоскости рядъ точекъ, расположенныхъ на земной поверхности, нужно установить зависимость между координатами  $x, y$  точекъ на плоскости и значеніями  $\alpha, \beta$  параметровъ, относящихся къ соотвѣтственнымъ точкамъ поверхности. Если разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками на земной поверхности задано формулою:

$$ds^2 = A d\alpha^2 + B d\beta^2,$$

то разстояніе между соотвѣтственными точками на картѣ выразится слѣдующимъ образомъ:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2,$$

и карта была бы совершенною, еслибы отношеніе  $\frac{ds}{ds'}$  было постоянно. Къ несчастію, такое условіе было бы возможно только въ томъ случаѣ, еслибы земная поверхность принадлежала къ классу такъ называемыхъ развертывающихся поверхностей, чего въ дѣйствительности нѣтъ.

Если отношеніе  $\frac{ds}{ds'}$ , не будучи постояннымъ, сохраняетъ свою величину во всѣхъ направленіяхъ вокругъ одной и той же точки, то малыя части поверхности не будутъ искажены, и карта для страны небольшого протяженія должна считаться удовлетворительною. Мы еще вернемся къ этой важной теоріи и докажемъ, что всегда существуетъ бесконечное множество системъ, выполняющихъ это условіе.

#### УПРАЖНЕНІЯ

1. Даны на плоскости двѣ какія-нибудь кривыя и точки этихъ кривыхъ, въ которыхъ касательныя параллельны, соединены прямыми линіями; для полученныхъ такимъ образомъ длинъ проведены равныя и параллельныя прямыя черезъ нѣкоторую неподвижную точку. Доказать, что дуга кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ концовъ послѣднихъ прямыхъ, есть сумма или разность соотвѣтственныхъ дугъ данныхъ кривыхъ.



2. На лемнискатѣ, уравненіе которой  $\rho^2 = a^2 \cos 2\omega$ , даны двѣ точки  $P$  и  $Q$ , соотвѣтствующія такимъ значеніямъ,  $\omega'$  и  $\omega''$ , угла  $\omega$ , что

$$\cos \omega' \cos \omega'' = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

доказать, что дуга, заключенная между точкою  $P$  и полюсомъ, равна дугѣ, отдѣляющей точку  $Q$  отъ вершины, соотвѣтствующей  $\omega = 0$ .

3. На параболѣ, уравненіе которой  $2y = x^2$ , взяты три дуги, отсчитанныя всѣ отъ вершины; абсциссами ихъ концовъ служатъ три корня уравненія:

$$X^3 - aX^2 + \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)X - a = 0;$$

доказать, что алгебраическая сумма дугъ равна суммѣ абсциссъ ихъ концовъ, т.-е.  $a$ .

4. Если считать *соотвѣтственными* такія точки на кривой, выражаемой уравненіемъ  $y^3 = 27a^2x$ , произведеніе абсциссъ которыхъ равно  $a^2$ , то разность между какою-угодно дугою и дугою, ей соотвѣтствующею, равна избытку разности касательныхъ въ концахъ первой дуги надъ разностью касательныхъ въ концахъ второй, при чемъ касательныя берутся между точкою касанія и точкою ихъ пересѣченія съ осью  $X$ -овъ.

5. Прямая движется, оставаясь параллельной основанію цилиндра вращенія, къ которому она постоянно касательна, при чемъ точка касанія описываетъ данную винтовую линію. Найти уравненіе поверхности, которую описываетъ эта прямая, и доказать, что существуетъ такой гиперболоидъ вращенія, что всякая взятая на немъ кривая будетъ равна по длинѣ соотвѣтственной кривой на некоей поверхности, при чемъ слѣдуетъ руководиться подлежащимъ закономъ соотвѣтствія между производящими и точками обѣихъ поверхностей.

6. Если представить всѣ точки линейчатой поверхности посредствомъ двухъ переменныхъ  $u$  и  $v$ , изъ которыхъ одна была бы постоянною на производящей, а другая равнялась бы разстоянію, отсчитанному на производящей между разсматриваемою точкою и неподвижною кривою, перпендикулярною ко всѣмъ производящимъ, то разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками поверхности выразится уравненіемъ вида:

$$ds^2 = dv^2 + \varphi(v, u) du^2,$$

гдѣ  $\varphi(v, u)$  есть многочленъ второй степени относительно переменной  $v$ .

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### Производныя и дифференціалы порядка выше перваго

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПРОИЗВОДНЫХЪ ВЫСШАГО ПОРЯДКА

§ 132. Методы, изложенные въ предыдущихъ главахъ, даютъ возможность составить производную какой-угодно данной функціи отъ переменнѣй  $x$ . Эта производная есть функція отъ той же переменнѣй, и по тѣмъ же правиламъ отъ нея можно взять также производную, которая называется второю производною отъ первоначальной функціи. Производная отъ второй производной есть третья производная, и т. д. Подобно первой производной, обозначаемой однимъ значкомъ надъ функціей, вторая производная обозначается двумя значками, третья—тремя, и т. д. Такимъ образомъ послѣдовательныя производныя функціи  $\varphi(x)$  будутъ:

$$\varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x), \varphi^{IV}(x), \dots, \varphi^n(x).$$

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ ВЫСШАГО ПОРЯДКА

§ 133. Обозначая черезъ  $\varphi(x)$  функцію  $y$  отъ переменнѣй  $x$ , имѣемъ (§ 46), по опредѣленію,

$$dy = \varphi'(x) dx. \quad (1)$$

Разсматривая  $dx$ , какъ постоянную, мы видимъ, что дифференціалъ  $dy$  есть функція отъ одной только переменнѣй  $x$ , и его можно, поэтому, продифференцировать. Дифференціалъ отъ  $dy$  называется вторымъ дифференціаломъ отъ  $y$  и обозначается черезъ  $d^2y$ ; очевидно,

$$d^2y = \varphi''(x) dx^2. \quad (2)$$

Разсматривая всегда  $dx$ , какъ постоянную, замѣчаемъ, что и  $d^2y$  есть также функція отъ одной только переменнѣй  $x$ . Дифференціалъ отъ  $d^2y$  называется третьимъ дифференціаломъ отъ  $y$  и обозначается черезъ  $d^3y$ ; очевидно,

$$d^3y = \varphi'''(x) dx^3. \quad (3)$$

Продолжая писать по аналогіи, замѣтимъ, что  $n$ -ый дифференціалъ отъ  $y$ ,  $d^n y$ , есть

$$d^n y = \varphi^n(x) dx^n. \quad (n)$$

Уравненія (1), (2), (3), ..., (n) даютъ послѣдовательныя производныя въ функціи отъ соотвѣтственныхъ дифференціаловъ:

$$\varphi'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad \varphi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \varphi'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \varphi^n(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

**§ 134.** Если приписывать переменнѣй  $x$  бесконечно-малыя равныя между собою приращенія, обозначаемыя посредствомъ  $\Delta x$ , то функція  $\varphi(x)$  будетъ принимать послѣдовательныя значенія:  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(x + \Delta x)$ ,  $\varphi(x + 2\Delta x)$ , ...,  $\varphi(x + n\Delta x)$ , которыя мы назовемъ черезъ  $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , ...,  $y_n$ . Полагаемъ, пользуясь извѣстнымъ обозначеніемъ,

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \Delta y, & y_2 - y_1 &= \Delta y_1, & \dots, & y_n - y_{n-1} &= \Delta y_{n-1}, \\ \Delta y_1 - \Delta y &= \Delta^2 y, & \Delta y_2 - \Delta y_1 &= \Delta^2 y_1, & \dots, & \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} &= \Delta^2 y_{n-2}, \\ \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y &= \Delta^3 y, & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 &= \Delta^3 y_1, & \dots, & \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} &= \Delta^3 y_{n-3}, \\ & \dots & & & & & \\ \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y &= \Delta^n y, \end{aligned}$$

гдѣ  $\Delta^2 y$ ,  $\Delta^3 y$ , ... суть вторыя, третьи, и т. д. разности отъ  $y$ .

При  $\Delta x$  бесконечно-маломъ  $\Delta y$  можетъ быть замѣнено черезъ  $dy$ . Покажемъ, что также можно замѣнить  $\Delta^2 y$  черезъ  $d^2 y$ ,  $\Delta^3 y$  черезъ  $d^3 y$ , и т. д., отбрасывая при каждой изъ такихъ подстановокъ бесконечно-малую часть вычисляемаго количества. Но прежде мы должны доказать слѣдующую теорему.

**§ 135.** Если функція  $\psi(x, a)$  содержитъ кромѣ переменнѣй  $x$  букву  $a$ , не зависящую отъ  $x$ , и если эта функція обращается въ нуль при  $a = 0$ , каково бы ни было  $x$ , то при тѣхъ же условіяхъ обращается въ 0 и производная  $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$ .

Это предложеніе — очевидно, если замѣтить, что такъ какъ буква  $a$  при дифференцированіи принимается за постоянную и значеніе этой постоянной остается неопредѣленнымъ, то безразлично, придать ли этой буквѣ опредѣленное значеніе раньше или послѣ дифференцированія. При  $a = 0$  до дифференцированія функція и, слѣдовательно, ея производная обращаются въ нуль; поэтому, произойдетъ то же самое, если положимъ  $a = 0$  послѣ дифференцированія.

Отсюда очевидно, что если функція  $\psi(x, a)$  бесконечно-мала при бесконечно-маломъ  $a$ , каково бы ни было  $x$ , то то же будетъ справедливо и для ея производной  $\frac{d\psi(x, a)}{dx}$ .

§ 136. Разсмотримъ теперь функцію:

$$y = \varphi(x); \quad (1)$$

пользуясь обозначеніемъ предыдущаго параграфа, пишемъ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x) + \varepsilon, \quad (2)$$

при чемъ  $\varepsilon$  есть функція отъ  $x$  и  $\Delta x$ , обращающаяся въ нуль одновременно съ  $\Delta x$ . Если въ обѣихъ частяхъ уравненія (2) измѣнить  $x$  на  $x + \Delta x$ , то ихъ приращенія, раздѣленные на  $\Delta x$ , будутъ равны, и мы можемъ написать:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}.$$

Но при  $\Delta x$ , стремящемся къ нулю,  $\frac{\Delta \varphi'(x)}{\Delta x}$ , очевидно, обратится въ предѣлъ въ  $\varphi''(x)$ , а  $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$  — въ нуль; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $\varepsilon$  при всякомъ  $x$  бесконечно-мало по сравненію съ  $\Delta x$ , то то же относится (§ 135) и къ его производной, а слѣдовательно, и къ отношенію  $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta x}$ , которое бесконечно мало отличается отъ этой производной. Отсюда вытекаетъ, что при  $\Delta x$  бесконечно-маломъ мы будемъ имѣть, пренебрегая бесконечно-малыми третьяго порядка,

$$\Delta^2 y = \varphi''(x) \Delta x^2,$$

т.-е. что при  $\Delta x$  бесконечно-маломъ  $\Delta^2 y$  равно  $d^2 y$ , если пренебечь бесконечно-малыми третьяго порядка.

§ 137. Изъ предыдущаго доказательства вытекаетъ, что при  $\Delta x$ , стремящемся къ нулю,  $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$  имѣетъ предѣломъ вторую производную,  $\varphi''(x)$ , отъ  $y$ ; поэтому полагаемъ:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \varphi''(x) + \varepsilon_1, \quad (1)$$

гдѣ  $\varepsilon_1$  есть функція отъ  $x$  и  $\Delta x$ , обращающаяся въ нуль одновременно съ  $\Delta x$ . Если въ обѣихъ частяхъ уравненія (1) измѣнить  $x$  на  $x + \Delta x$ , то ихъ приращенія, раздѣленные на  $\Delta x$ , будутъ равны, и мы можемъ написать:

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}.$$

Но при  $\Delta x$ , стремящемся къ нулю,  $\frac{\Delta \varphi''(x)}{\Delta x}$ , очевидно, обратится въ предѣлъ въ  $\varphi'''(x)$ , а  $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$  — въ нуль на томъ же основаніи, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; отсюда



отсюда вытекаетъ, что при  $\Delta x$  бесконечно-маломъ мы будемъ имѣть, пренебрегая бесконечно-малыми четвертаго порядка,

$$\Delta^3 y = \varphi'''(x) \Delta x^3.$$

Точно такъ же найдемъ, что  $\Delta^4 y$  можетъ быть замѣнено черезъ  $\varphi^{iv}(x) \Delta x^4$  и что, вообще,  $\Delta^n y$  равно  $\varphi^n(x) \Delta x^n$ , если пренебечь бесконечно-малыми  $(n+1)$ -го порядка; такимъ образомъ  $\Delta^n y$  и  $d^n y$  суть двѣ бесконечно-малыя  $n$ -го порядка, отношеніе которыхъ въ предѣлѣ равно 1.

**§ 138** Есть существенное различіе между дифференціалами высшаго порядка и дифференціалами перваго порядка. Когда нѣсколько переменныхъ связаны между собою такимъ образомъ, что всѣ зависятъ отъ одной изъ нихъ, то отношенія ихъ дифференціаловъ перваго порядка являются вполне опредѣленными (§ 57). Нельзя того же сказать про дифференціалы высшаго порядка, пока не сдѣланъ выборъ независимой переменной; это происходитъ отъ того, что при составленіи разностей  $\Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots$ , которыя можно замѣнить, когда онѣ бесконечно-малы, черезъ  $d^2 y, d^3 y, \dots$ , нужно придавать главной переменной  $x$  послѣдовательныя приращенія, равныя между собою, что отличаетъ эту переменную отъ всѣхъ другихъ, соотвѣтственные приращенія которыхъ, вообще, не равны. Когда же, напротивъ, рассматриваются разности и дифференціалы только перваго порядка, то переменная  $x$  получаетъ только одинъ разъ приращеніе  $\Delta x$ , которое, поэтому, ничѣмъ не будетъ отличаться отъ соотвѣтственныхъ приращеній другихъ переменныхъ.

Замѣтимъ, наконецъ, что дифференціалы порядка выше перваго равны нулю для главной или, что одно и то же, независимой переменной, т.-е. что

$$d^2 x = 0, \quad d^3 x = 0, \quad \dots,$$

если  $x$  есть эта переменная.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПОСЛѢДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПРОИЗВОДНЫХЪ ОТЪ ФУНКЦИИ

**§ 139.** Чтобы составить послѣдовательныя производныя отъ какой-нибудь функціи, достаточно примѣнить надлежащее число разъ извѣстные методы, по которымъ вычисляются производныя перваго порядка. Къ несчастію, вычисленія часто чѣмъ далѣе, тѣмъ все болѣе усложняются, и почти невозможно обойтись безъ особыхъ приѣмовъ, чтобы получить *на самомъ дѣлѣ* производныя болѣе или менѣе высокаго порядка.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ такихъ приѣмовъ.

**Производныя отъ произведенія.**—Называя черезъ  $P$  и  $Q$  двѣ функціи отъ одной и той же переменной  $x$ , по извѣстнымъ правиламъ находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d(PQ)}{dx} &= P \frac{dQ}{dx} + Q \frac{dP}{dx}, \\ \frac{d^2(PQ)}{dx^2} &= P \frac{d^2Q}{dx^2} + 2 \frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dx} + Q \frac{d^2P}{dx^2}, \\ \frac{d^3(PQ)}{dx^3} &= P \frac{d^3Q}{dx^3} + 3 \frac{dP}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} + 3 \frac{d^2P}{dx^2} \frac{dQ}{dx} + Q \frac{d^3P}{dx^3}, \end{aligned} \tag{1}$$

и, заключая по индукции, пишемъ слѣдующую формулу:

$$\begin{aligned} \frac{d^n(PQ)}{dx^n} = & P \frac{d^n Q}{dx^n} + n \frac{dP}{dx} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-2} Q}{dx^{n-2}} + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n-k} Q}{dx^{n-k}} + \dots + \frac{d^n P}{dx^n} Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы доказать эту формулу, допустимъ, что она справедлива для числа  $n$ , и покажемъ, что въ такомъ случаѣ она справедлива для числа  $n+1$  непосредственно высшаго. Дифференцируя обѣ части уравненія (2), находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}(PQ)}{dx^{n+1}} = & \left( \frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} + P \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} \right) + n \left( \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} \right) + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \left( \frac{d^{k+1} P}{dx^{k+1}} \frac{d^{n-k} Q}{dx^{n-k}} + \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n-k+1} Q}{dx^{n-k+1}} \right) + \dots \\ & + \left( \frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}} Q + \frac{d^n P}{dx^n} \frac{dQ}{dx} \right). \end{aligned}$$

Соединяя второй членъ каждой скобки съ первымъ членомъ предыдущихъ скобокъ и замѣчая, что сумма двухъ коэффиціентовъ  $n$ -ой степени бинома есть коэффиціентъ  $(n+1)$ -ой степени, переписываемъ это уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}(PQ)}{dx^{n+1}} = & P \frac{d^{n+1} Q}{dx^{n+1}} + (n+1) \frac{dP}{dx} \frac{d^n Q}{dx^n} + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{n-1} Q}{dx^{n-1}} + \dots \\ & + \frac{(n+1)n \dots (n+1-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k P}{dx^k} \frac{d^{n+1-k} Q}{dx^{n+1-k}} + \dots + Q \frac{d^{n+1} P}{dx^{n+1}}, \end{aligned}$$

а это есть не что иное, какъ формула (2), въ которой  $n$  измѣнено на  $(n+1)$ , в общность которой такимъ образомъ доказана.

**§ 140. Производныя функціи отъ функціи.**—Пусть  $u$  есть функція отъ  $x$ , а  $\varphi(u)$ —функція отъ функціи, которую мы обозначимъ черезъ  $y$ . Дифференцируя послѣдовательно и выражая послѣдовательныя производныя функціи  $\varphi(u)$  черезъ  $\varphi'(u)$ ,  $\varphi''(u)$ ,  $\varphi'''(u)$ , ..., находимъ:

$$y = \varphi(u), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \varphi'(u), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \varphi'(u) + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \varphi''(u), \quad (3)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 u}{dx^3} \varphi'(u) + 3 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \varphi''(u) + \left( \frac{du}{dx} \right)^3 \varphi'''(u); \quad (4)$$

отсюда заключаемъ, что выраженіе  $\frac{d^n y}{dx^n}$  будетъ вида:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1 \varphi'(u) + A_2 \varphi''(u) + \dots + A_n \varphi^n(u),$$

гдѣ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  зависятъ отъ  $u$  и его производныхъ, но не измѣняются съ измѣненіемъ вида функціи  $\varphi$ .

Чтобы получить эти коэффициенты, полагаемъ:

$$A_k = \frac{B_k}{1.2 \dots k},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = B_1 \varphi'(u) + \frac{B_2}{1.2} \varphi''(u) + \dots + \frac{B_k}{1.2 \dots k} \varphi^k(u) + \dots + \frac{B_n}{1.2 \dots n} \varphi^n(u). \quad (5)$$

Коэффициенты  $B_1, B_2, B_n, \dots$ , не зависятъ отъ вида  $\varphi$ , — поэтому ихъ можно опредѣлять, дѣлая частныя предположенія относительно этой функціи. Положимъ послѣдовательно

$$\varphi(u) = u, \quad \varphi(u) = u^2, \quad \dots, \quad \varphi(u) = u^n;$$

примѣняя каждый разъ уравненіе (5), получаемъ между неизвѣстными  $B_1, B_2, \dots, B_n$  слѣдующихъ  $n$  зависимостей:

$$\begin{aligned} \frac{d^n u}{dx^n} &= B_1, \\ \frac{d^n (u^2)}{dx^n} &= 2B_1 u + B_2, \\ \frac{d^n (u^3)}{dx^n} &= 3B_1 u^2 + 3B_2 u + B_3, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^n (u^n)}{dx^n} &= nB_1 u^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} B_2 u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} B_3 u^{n-3} + \dots + B_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы рѣшить эти уравненія и вычислить какой-нибудь изъ коэффициентовъ, напр.  $B_k$ , сложимъ первыхъ  $k$  уравненій, предварительно умноживъ первое изъ нихъ на  $k \cdot \frac{1}{u}$ , второе на  $-\frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{u^2}$ , третье на  $\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \frac{1}{u^3}$ , четвертое на  $-\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4} \frac{1}{u^4}$ , и т. д.; неизвѣстныя  $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}$  исчезнутъ, оста-

нется только  $B_k$ . Действительно, если  $k'$  какое-нибудь число меньшее  $k$ , то коэффициент при  $B_{k'}$  послѣ сложения будетъ

$$(-1)^{k'-1} \frac{1}{u^{k'}} \left[ \frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} - \frac{k(k-1) \dots (k-k')}{1.2.3 \dots (k'+1)} (k'+1) + \right. \\ \left. + \frac{k(k-1) \dots (k-k'-1)}{1.2.3 \dots (k'+2)} \frac{(k'+1)(k'+2)}{1.2} - \dots \right. \\ \left. + \frac{k(k-1) \dots 1}{1.2 \dots k} \frac{(k'+1)(k'+2) \dots k}{1.2 \dots (k-k')} \right],$$

т.-е.

$$(-1)^{k'+1} \frac{1}{u^{k'}} \cdot \frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} \left[ 1 - (k-k') + \frac{(k-k')(k-k'-1)}{1.2} - \dots + \right. \\ \left. + \frac{(k-k')(k-k'-1) \dots 1}{1.2 \dots (k-k')} \right],$$

или, наконецъ,

$$+ \frac{1}{u^{k'}} \left[ \frac{k(k-1) \dots (k-k'+1)}{1.2.3 \dots k'} (1-1)^{k-k'} \right] = 0.$$

При  $k = k'$  сумма будетъ  $(-1)^{k+1} \frac{1}{u^k}$ . Такимъ образомъ, уравненіе, полученное отъ сложения уравненій (6), умноженныхъ предварительно на указанные множители, приметъ видъ:

$$\frac{1}{u^k} B_k = (-1)^{k+1} \left[ \frac{k}{u} \frac{d^n u}{dx^n} - \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{u^2} \frac{d^n u^2}{dx^n} + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} \frac{1}{u^3} \frac{d^n u^3}{dx^n} - \dots + \frac{1}{u^k} \frac{d^n u^k}{dx^n} \right].$$

Отсюда слѣдуетъ, что формула (5) даетъ  $n$ -ую производную отъ  $\varphi(u)$  въ функціи отъ  $n$ -ыхъ производныхъ всѣхъ степеней  $u$ , показатель которыхъ не превышаетъ  $n$ .

§ 141. Найденное выраженіе для  $\frac{B_k}{u^k}$  можетъ быть преобразовано слѣдующимъ образомъ. Пишемъ:

$$\left( \frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k = (-1)^k \left( 1 - \frac{u}{\alpha} \right)^k = (-1)^k \left[ 1 - \frac{k u}{\alpha} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{u^2}{\alpha^2} - \dots + \frac{u^k}{\alpha^k} \right].$$

Дифференцируемъ обѣ части этого равенства  $n$  разъ по  $x$ , рассматривая  $\alpha$ , какъ постоянную:

$$\frac{d^n \left( \frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n} = (-1)^k \left[ -\frac{k}{\alpha} \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^n u^2}{dx^n} + \dots + \frac{1}{\alpha^k} \frac{d^n u^k}{dx^n} \right].$$



Положивъ во второй части полученнаго равенства  $\alpha = u$ , увидимъ, что она совпадаетъ съ выраженіемъ для  $\frac{B_k}{u^k}$ ; значитъ

$$B_k = u^k \frac{d^n \left( \frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n}$$

при условіи, что буква  $\alpha$ , рассматриваемая при всѣхъ дифференцированіяхъ, какъ постоянная, должна быть замѣнена въ окончательномъ результатѣ буквою  $u$ .

Такимъ образомъ выраженіе для  $\frac{d^n \varphi(u)}{dx^n}$  приметъ видъ:

$$\frac{d^n \varphi(u)}{dx^n} = \sum \frac{u^k}{1.2.3\dots k} \varphi^k(u) \cdot \frac{d^n \left( \frac{u}{\alpha} - 1 \right)^k}{dx^n},$$

гдѣ суммирование распространено на всѣ цѣлыя значенія  $k$  отъ 1 до  $n$ , а буква  $\alpha$ , входящая во вторую часть, должна быть замѣнена послѣ дифференцированія буквою  $u$ .

§ 142. Положимъ въ общей формулѣ  $u = x^2$ ; тогда

$$\frac{d^n \varphi(x^2)}{dx^n} = B_1 \varphi'(x^2) + \frac{B_2}{1.2} \varphi''(x^2) + \dots + \frac{B_k}{1.2\dots k} \varphi^k(x^2) + \dots + \frac{B_n}{1.2\dots n} \varphi^n(x^2),$$

при чемъ выраженіе для  $B_k$  будетъ:

$$\frac{1}{x^{2k}} B_k = (-1)^{k+1} \left[ \frac{k}{x^2} \frac{d^n x^2}{dx^n} - \frac{k(k-1)}{1.2} \frac{1}{x^4} \frac{d^n x^4}{dx^n} - \dots + \frac{1}{x^{2k}} \frac{d^n x^{2k}}{dx^n} \right].$$

Вмѣсто упрощенія этой формулы будетъ выгоднѣе вычислить непосредственно нѣсколько послѣдовательныхъ производныхъ отъ  $\varphi(x^2)$ , чтобы, заключая по индукціи, замѣтить законъ ихъ составленія. Полагая

$$y = \varphi(x^2), \quad (1)$$

находимъ посредствомъ послѣдовательныхъ дифференцированій:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \varphi'(x^2), \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (2x)^2 \varphi''(x^2) + 2\varphi'(x^2), \quad (3)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = (2x)^3 \varphi'''(x^2) + 6(2x) \varphi''(x^2), \quad (4)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = (2x)^4 \varphi^{iv}(x^2) + 12(2x)^2 \varphi'''(x^2) + 12\varphi''(x^2), \quad (5)$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = (2x)^5 \varphi^v(x^2) + 20(2x)^3 \varphi^{iv}(x^2) + 60(2x) \varphi'''(x^2), \quad (6)$$

что приводитъ къ общей формулѣ:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} = & (2x)^n \varphi^n(x^2) + n(n-1)(2x)^{n-2} \varphi^{n-1}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} \varphi^{n-2}(x^2) + \dots \\ & + \frac{n(n-1) \dots (n-2p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} (2x)^{n-2p} \varphi^{n-p}(x^2) + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

гдѣ вторая часть оканчивается сама собою, когда по очевидному закону составленія членовъ коэффициенты при нихъ начинаютъ обращаться въ нуль.

Для доказательства замѣченной такимъ образомъ формулы достаточно убѣдиться въ томъ, что если она справедлива для значенія  $n$ , то въ такомъ случаѣ она справедлива и для значенія непосредственно высшаго. Но, вѣдь, если формула (7) имѣетъ мѣсто, то коэффициентъ при  $\varphi^{n+1-p}(x^2)$  въ  $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ , очевидно, будетъ

$$\frac{n(n-1) \dots (n-2p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} (2x)^{n-2p+1} + \frac{n(n-1) \dots (n-2p+3)}{2 \cdot 2 \dots (p-1)} (n-2p+2) 2 (2x)^{n-2p+1},$$

т.-е.

$$\begin{aligned} (2x)^{n-2p+1} \frac{n(n-1) \dots (n-2p+3)(n-2p+2)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[ \frac{n-2p+1}{p} + 2 \right] = \\ = (2x)^{n-2p+1} \frac{(n+1)n \dots (n+1-2p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}, \end{aligned}$$

а это доказываетъ вполне нашу формулу.

§ 143. Приложимъ предыдущую формулу къ разысканію

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}},$$

выраженіе для которой, замѣчательное по своей простотѣ, было дано и использовано въ своихъ приложеніяхъ Якоби. Предыдущая формула, примѣненная къ этому случаю, даетъ непосредственно:

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = & (-1)^{m-1} \left[ (2x)^{m-1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left( m - \frac{1}{2} \right) \left( m - \frac{3}{2} \right) \dots \frac{3}{2} - \right. \\ & - \frac{(m-1)(m-2)}{1} (2x)^{m-3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \left( m - \frac{1}{2} \right) \left( m - \frac{3}{2} \right) \dots \frac{5}{2} + \\ & \left. + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{m-5} (1-x^2)^{\frac{5}{2}} \left( m - \frac{1}{2} \right) \left( m - \frac{3}{2} \right) \dots \frac{7}{2} - \dots \right], \end{aligned}$$

т.-е.

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \left[ mx^{m-1} \sqrt{1-x^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} (\sqrt{1-x^2})^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{m-5} (\sqrt{1-x^2})^5 \dots \right].$$

Если положить  $x = \cos u$ , то это выражение, въ силу известной тригонометрической формулы, которая къ тому же будетъ доказана въ одной изъ слѣдующихъ главъ, обратится въ

$$(-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \sin mu.$$

Итакъ, при  $x = \cos u$  имѣемъ:

$$\frac{d^{m-1}(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}} = (-1)^{m-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{m} \sin mu.$$

#### § 144. Производныя отъ $\arctang x$ . — Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d \arctang x}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d^2 \arctang x}{dx^2} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \\ \frac{d^3 \arctang x}{dx^3} &= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Не трудно продолжать эти дѣйствія, но результаты все болѣе и болѣе усложняются и общій законъ не открывается самъ собою. Чтобы его найти, замѣтимъ, что при  $u = \arctang x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \left[ \frac{1}{x + \sqrt{-1}} - \frac{1}{x - \sqrt{-1}} \right],$$

откуда

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (-1)^n \left[ \frac{1}{(x + \sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x - \sqrt{-1})^{n+1}} \right].$$

Приводя обѣ дроби въ скобкахъ къ одному знаменателю, увидимъ, что мнимыя количества исчезнутъ и выражение для производной приметъ вещественный видъ.

Изящный результатъ получается при

$$u = \frac{\pi}{2} - y.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned}\cos y &= \sin u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \sin y &= \cos u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ x + \sqrt{-1} &= \sqrt{1+x^2} [\cos y + \sqrt{-1} \sin y], \\ x - \sqrt{-1} &= \sqrt{1+x^2} [\cos y - \sqrt{-1} \sin y];\end{aligned}$$

зная же, что по теоремѣ Моавра для всякаго положительнаго или отрицательнаго значенія  $m$

$$\begin{aligned}(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m &= \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx, \\ (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^m &= \cos mx - \sqrt{-1} \sin mx,\end{aligned}$$

пишемъ:

$$\frac{1}{(x + \sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(x - \sqrt{-1})^{n+1}} = \frac{-2\sqrt{-1}}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} [\sin(n+1)y],$$

а такъ какъ при этомъ

$$\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \sin^{n+1} y,$$

то окончательно

$$\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(-1)^{n+1} \sin^{n+1} y \sin(n+1)y.$$

§ 145. Производныя отъ  $\arcsin x$ . — Имѣемъ:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n (1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{dx^n};$$



примѣняя, наконецъ, общую формулу § 139-го, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} \arcsin x}{dx^{n+1}} = & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(1-x)^n} \left[ 1 - \frac{n}{2n-1} \frac{1-x}{1+x} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}}{(2n-1)(2n-3)} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^3 \pm \dots \\ & \left. \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2p+1)} \frac{n(n-1)(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^p \pm \dots \pm \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Полезно замѣтить, что коэффициенты при различныхъ степеняхъ  $\frac{1-x}{1+x}$  въ скобкахъ всѣ меньше единицы. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе коэффициента при  $\left( \frac{1-x}{1+x} \right)^{p+1}$  къ коэффициенту при  $\left( \frac{1-x}{1+x} \right)^p$  равно

$$\frac{(2p+1)(n-p)}{(2n-2p-1)(p+1)} = \frac{2 - \frac{1}{p+1}}{2 - \frac{1}{n-p}}.$$

Это же отношеніе меньше единицы, когда  $n-p > p+1$ , т.-е. когда  $n > 2p+1$ , и, наоборотъ, больше единицы, когда  $n < 2p+1$ . Такимъ образомъ, коэффициенты идутъ, уменьшаясь, съ перваго коэффициента до минимальнаго, а затѣмъ увеличиваются до послѣдняго. Слѣдовательно, крайніе коэффициенты, равные оба единицѣ, больше всѣхъ остальныхъ.

Числовое значеніе нѣкоторыхъ производныхъ, когда переменная  
ОБРАЩАЕТСЯ ВЪ НУЛЬ

§ 146. Часто требуется вычислить, во что обратится производная при нѣкоторомъ числовомъ значеніи переменной, и въ особенности въ томъ случаѣ, когда, послѣ выполненія дѣйствій для полученія производной, переменная полагается равною нулю. Вопросы этого рода рѣшаются иногда при помощи особыхъ пріемовъ; приведемъ нѣсколько примѣровъ.

**Производная отъ  $\arctang x$  при  $x=0$ .**—Нѣтъ необходимости прибѣгать къ общему виду производной для опредѣленія значенія, какое она приметъ при  $x=0$ .

Въ самомъ дѣлѣ, полагая  $u = \arctang x$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$(1+x^2) \frac{d^2u}{dx^2} + 2x \frac{du}{dx} = 0.$$

Дифференцируя это уравнение  $n-1$  разъ и пользуясь известной теоремою (§ 139), находимъ:

$$(1+x^2) \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} + 2(n-1)x \frac{d^nu}{dx^n} + (n-1)(n-2) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + 2x \frac{d^nu}{dx^n} + 2(n-1) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = 0;$$

полагая  $x=0$ , получаемъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 + \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 n(n-1) = 0.$$

Отсюда, замѣчая, что  $\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 1$ , выводимъ при  $n+1$  нечетномъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n;$$

полагая же  $n+1$  четнымъ и замѣчая, что  $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = 0$ , изъ того же уравненія выводимъ:

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0.$$

§ 147. Производная отъ  $\arcsin x$  при  $x=0$ .—Если положить

$$u = \arcsin x,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \sqrt{1-x^2} \frac{du}{dx} &= 1, \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{du}{dx} + \sqrt{1-x^2} \frac{d^2u}{dx^2} &= 0, \end{aligned}$$

и, по освобожденіи отъ знаменателя,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 0.$$

Дифференцируя это уравненіе  $n - 1$  и пользуясь извѣстной теоремою (§ 139), находимъ:

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} - 2(n - 1) x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1)(n - 2) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0;$$

полагая  $x = 0$ , получаемъ:

$$\left( \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 - (n - 1)^2 \left( \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \right)_0 = 0.$$

Отсюда, замѣчая, что  $\left( \frac{du}{dx} \right)_0 = 1$ , выводимъ при  $n + 1$  нечетномъ:

$$\left( \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 = 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (n - 1)^2,$$

а при  $n + 1$  четномъ:

$$\left( \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} \right)_0 = 0.$$

§ 148. Производная отъ  $(\arcsin x)^2$  при  $x = 0$ .—Полагая  $(\arcsin x)^2 = u$ , выводимъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{1}{1 - x^2} + \frac{2x \arcsin x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1 - x^2} + \frac{x}{1 - x^2} \frac{du}{dx}; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} = 2.$$

Дифференцируемъ это уравненіе  $n - 1$  разъ:

$$(1 - x^2) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} - 2(n - 1) x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1)(n - 2) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - x \frac{d^n u}{dx^n} - (n - 1) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = 0$$

и полагаемъ  $x = 0$ :

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 - (n-1)^2 \left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0;$$

это соотношеніе даетъ возможность вычислять послѣдовательныя производныя и при  $n+1$  нечетномъ

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0,$$

а при  $n+1$  четномъ

$$\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}\right)_0 = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (n-1)^2.$$

§ 149. Производныя отъ  $x \cot x$  при  $x = 0$ .—Полагаемъ  $x \cot x = u$ ; очевидно,

$$x \cos x = u \sin x. \quad (1)$$

Дифференцируемъ обѣ части этого уравненія  $n$  разъ, пользуясь при этомъ правиломъ, относящимся къ производной отъ произведенія; находимъ:

$$\begin{aligned} x \frac{d^n \cos x}{dx^n} + n \frac{d^{n-1} \cos x}{dx^{n-1}} &= u \frac{d^n \sin x}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} \sin x}{dx^{n-1}} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} \sin x}{dx^{n-2}} + \dots + \sin x \frac{d^n u}{dx^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если въ этомъ уравненіи положить  $x = 0$ , то членъ съ  $\frac{d^n u}{dx^n}$  исчезнетъ и  $\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$  выразится въ функціи отъ всѣхъ предыдущихъ производныхъ; дѣлая послѣдовательно  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3, \dots$ , получаемъ:

$$u = 1, \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0, \dots$$

когда эти первыя значенія уже вычислены, изъ уравненія (2) можно вывести и другія производныя въ послѣдовательномъ порядкѣ.

Замѣтимъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка равны нулю. Дѣйствительно, функція  $x \cot x$  есть четная функція, т.-е. не измѣняется ни по величинѣ, ни по знаку при замѣнѣ  $x$  на  $-x$ ; иначе говоря, если обозначить ее черезъ  $\varphi(x)$ , то

$$\varphi(x) = \varphi(-x).$$



Беря послѣдовательныя производныя отъ этого уравненія, находимъ:

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -\varphi'(-x), \\ \varphi''(x) &= +\varphi''(-x), \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi^n(x) &= (-1)^n \varphi^n(-x).\end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ, что при  $x=0$  для всякаго нечетнаго значенія  $n$

$$\varphi^n(0) = -\varphi^n(0)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi^n(0) = 0.$$

Производя численныя выкладки, получаемъ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2}{3}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{8}{15}, \quad \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = -\frac{288}{189}, \\ \left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 &= 0, \quad \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{8064}{945}.\end{aligned}$$

§ 150. Производныя отъ  $\frac{x}{e^x-1}$  при  $x=0$ . — Полагаемъ  $\frac{x}{e^x-1} = u$ , тогда

$$x = ue^x - u \tag{1}$$

и послѣ дифференцированія

$$1 = e^x \frac{du}{dx} + ue^x - \frac{du}{dx}.$$

Дифференцируя  $n$  разъ подъ рядъ обѣ части уравненія (1), находимъ:

$$0 = e^x \frac{d^n u}{dx^n} + ne^x \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} e^x \frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \dots + ue^x - \frac{d^n u}{dx^n},$$

откуда при  $x=0$

$$0 = n \left(\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}\right)_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}}\right)_0 + \dots + n \left(\frac{du}{dx}\right)_0 + (u)_0.$$

Это соотношеніе даетъ возможность вычислить какую-угодно изъ производныхъ, если всѣ предыдущія извѣстны;  $u_0$  равно 1. Въ самомъ дѣлѣ, отношеніе  $\frac{e^x-1}{x}$  при  $x$

безконечно-маломъ является производною отъ  $e^x$  и приводится къ единицѣ при  $x=0$ ; очевидно, то же самое справедливо и для обратнаго отношенія  $\frac{x}{e^x-1}$ . Выполняя вычисленія, получаемъ:

$$\begin{aligned} u_0 = 1, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{6}, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 = -\frac{1}{30}, \quad \left(\frac{d^5u}{dx^5}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^6u}{dx^6}\right)_0 = \frac{1}{42}, \quad \left(\frac{d^7u}{dx^7}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^8u}{dx^8}\right)_0 = -\frac{1}{30}, \quad \left(\frac{d^9u}{dx^9}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{10}u}{dx^{10}}\right)_0 = \frac{5}{66}, \quad \left(\frac{d^{11}u}{dx^{11}}\right)_0 = 0, \\ \left(\frac{d^{12}u}{dx^{12}}\right)_0 = -\frac{691}{2730}, \quad \left(\frac{d^{13}u}{dx^{13}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^{14}u}{dx^{14}}\right)_0 = \frac{7}{6}, \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Всѣ производныя нечетнаго порядка, исключая первой  $\frac{du}{dx}$ , равны нулю. Это можно утверждать *a priori*, независимо отъ предыдущихъ вычисленій. Дѣйствительно, функція

$$\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{2}, \quad (2)$$

какъ легко видѣть, есть четная функція отъ  $x$ , а выше мы видѣли, что при этомъ условіи для  $x \cos x$  производныя нечетнаго порядка равнялись нулю при  $x=0$ ; производныя же отъ функціи (2) совпадаютъ всѣ, за исключеніемъ первой, съ производными отъ  $\frac{x}{e^x-1}$ .

§ 151. Производныя отъ  $\cos(m \arcsin x)$  при  $x=0$ . — Полагаемъ

$$u = \cos(m \arcsin x);$$

дифференцируемъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{m \sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{-mx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \sin(m \arcsin x) - \frac{m^2 \cos(m \arcsin x)}{(1-x^2)}; \end{aligned}$$

отсюда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0.$$

Дифференцируемъ  $p$  разъ это уравненіе:

$$(1-x^2) \frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} - 2px \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - p(p-1) \frac{d^p u}{dx^p} - x \frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} - p \frac{d^p u}{dx^p} + m^2 \frac{d^p u}{dx^p} = 0,$$

что при  $x = 0$  даетъ:

$$\left(\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}}\right)_0 = (p^2 - m^2) \left(\frac{d^p u}{dx^p}\right)_0.$$

Кромѣ того, при  $x = 0$  имѣемъ  $u = 1$ ,  $\frac{du}{dx} = 0$ . Слѣдовательно, предыдущее уравненіе показываетъ, что всѣ производныя нечетнаго порядка равны нулю. Что же касается производныхъ четнаго порядка, то всѣ онѣ выводятся одна изъ другой въ послѣдовательномъ порядкѣ, такъ какъ каждая изъ нихъ связана съ производною порядка на двѣ единицы низшаго. Такимъ образомъ

$$\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0 = (-1)^{n+1} m^2 (m^2 - 4) (m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2).$$

Чтобы изученіе разсматриваемой функціи не представило тяжелыхъ затрудненій, остановимся на нѣкоторомъ опредѣленномъ толкованіи полученнаго результата.

Функція  $\cos(m \arcsin x)$ —не вполне опредѣленная и, подъ однимъ и тѣмъ же символомъ, представляетъ въ дѣйствительности нѣсколько различныхъ функцій, число которыхъ можетъ возрасти до бесконечности. Въ самомъ дѣлѣ, дуга, синусъ которой есть  $x$ , не единственная; напротивъ, такихъ дугъ безчисленное множество. Произведенія этихъ дугъ на какое-угодно  $m$  будутъ имѣть, вообще, различные косинусы, число которыхъ будетъ равно удвоенному знаменателю числа  $m$ , если  $m$  — соизмѣримо, и безчисленному множеству, если  $m$  — несоизмѣримо.

Будутъ ли имѣть всѣ эти различныя функціи однѣ и тѣ же производныя?

Только-что полученный результатъ, повидимому, рѣшаетъ вопросъ,—по крайней мѣрѣ, для частнаго значенія  $x = 0$ , а такъ какъ мы нашли только одно значеніе, то невольно можемъ придти къ заключенію, что и существуетъ только одно. Однако это было бы большою ошибкою. Предыдущее вычисленіе основано на двухъ предположеніяхъ, выдѣляющихъ опредѣленную функцію, къ которой оно и относится. Во-первыхъ, положивъ

$$u = \cos m(\arcsin x),$$

мы вывели равенство:

$$\frac{du}{dx} = -m \frac{\sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

а это возможно только при допущеніи, что производная отъ  $\arcsin x$  есть  $\frac{+1}{\sqrt{1-x^2}}$ . По-

добное же допущеніе, въ свою очередь, требуетъ (§ 34), чтобы косинусъ разсматриваемой дуги былъ положителенъ; въ противномъ случаѣ

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и пришлось бы написать:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -m \frac{\sin(m \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{mx \sin(m \arcsin x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - m^2 \frac{\cos(m \arcsin x)}{1-x^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0;$$

это уравненіе тождественно съ прежде полученнымъ, при другомъ предположеніи, и приводитъ къ тому же соотношенію:

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Но, во-вторыхъ, мы допустили, что при  $x=0$  функція  $u=0$ ,  $\frac{du}{dx}=0$ . Это справедливо только въ томъ случаѣ, если, при  $x=0$ ,  $\arcsin x=0$ ; на самомъ же дѣлѣ это значеніе есть первое изъ цѣлаго ряда, но не единственное, такъ какъ, для  $x=0$ ,  $\arcsin x=k\pi$ , гдѣ  $k$  — какое-угодно цѣлое число, и, слѣдовательно,

$$u = \cos(m \arcsin x) = \cos mk\pi.$$

Точно такъ же, если  $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$  равна нулю, то только въ силу того же предположенія; если же принять  $\arcsin x=k\pi$ , то для  $\frac{du}{dx}$  придется принять одно изъ слѣдующихъ значеній:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -m \sin mk\pi, \\ \frac{du}{dx} &= m \sin mk\pi. \end{aligned}$$



Слѣдуетъ замѣтить, что первое изъ нихъ относится къ случаю, когда  $k$  — четное, потому что тогда  $\cos k\pi$  положителенъ, второс же — къ случаю, когда  $k$  — нечетное.

Итакъ, значеніе, найденное для  $\left(\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}}\right)_0$ , относится только къ той функціи  $\cos m(\arcsin x)$ , въ которой за  $\arcsin x$  принята дуга, обращающаяся въ нуль при  $x=0$  и являющаяся всегда, въ силу своего непрерывнаго измѣненія, наименьшею изъ положительныхъ или отрицательныхъ дугъ съ общимъ синусомъ  $x$ . Косинусъ такой дуги всегда положителенъ.

§ 152. Чтобы придать функціи  $u = \cos(m \arcsin x)$  снова всю ея общность, стоитъ только вычислить общее выраженіе ея производныхъ при  $x=0$ , что сдѣлать не трудно. Во всѣхъ случаяхъ

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при  $x=0$

$$u = \cos(m \arcsin 0) = \cos mk\pi,$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin(m \arcsin 0) = \pm m \sin mk\pi,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^{n+1} m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \cos mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \mp (-1)^n (m^2 - 1)(m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] m \sin mk\pi,$$

при чемъ знакъ — соответствуетъ случаю, когда  $k$  — четное.

§ 153. Производныя отъ  $\sin(m \arcsin x)$  при  $x=0$ . — Вычисленіе производныхъ отъ функціи  $(\sin m \arcsin x)$  совершается по тому же способу и приводитъ къ аналогичному изслѣдованію. Полагаемъ

$$u = \sin(m \arcsin x),$$

откуда

$$\frac{du}{dx} = \frac{m \cos(m \arcsin x)}{\pm \sqrt{1-x^2}};$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{mx \cos(m \arcsin x)}{\pm (1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \sin(m \arcsin x)}{1-x^2};$$

знакъ  $+$  передъ радикаломъ долженъ быть взятъ тогда, когда  $\arcsin x$  имѣетъ положительный косинусъ, и знакъ  $-$  въ противномъ случаѣ. Изъ этихъ формулъ выводится уравненіе:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} (1 - x^2) - x \frac{du}{dx} \pm m^2 u = 0,$$

справедливое во всѣхъ случаяхъ. Дифференцируя  $p$  разъ это уравненіе, ничѣмъ не отличающееся отъ полученнаго выше, также найдемъ, при  $x = 0$ , что

$$\frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при  $x = 0$

$$u = \sin(m \arcsin 0) = \sin mk\pi$$

и

$$\frac{du}{dx} = \pm m \cos(m \arcsin 0) = \pm m \cos mk\pi,$$

при чемъ знакъ  $+$  соответствуетъ случаю, когда  $\cos \arcsin x$  положителенъ и, слѣдовательно, случаю, когда  $k$  — четное. Замѣтивъ это, легко найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2p+2} u}{dx^{2p+2}} &= (-1)^p m^2 (m^2 - 4) \dots (m^2 - 4p^2) \sin mk\pi, \\ \frac{d^{2p+1} u}{dx^{2p+1}} &= \pm (-1)^p (m^2 - 1) (m^2 - 5) \dots [m^2 - (2p - 1)^2] m \cos mk\pi, \end{aligned}$$

гдѣ  $k$  — произвольное цѣлое число, а знакъ  $+$  во второй формулѣ соответствуетъ случаю, когда  $k$  — четное. Если предположить, что  $\arcsin 0 = 0$ , т.-е. если  $\arcsin x$  есть наименьшая, положительная или отрицательная, дуга, синусъ которой  $x$ , то  $k = 0$  и, слѣдовательно,

$$\frac{d^{2p+2} u}{dx^{2p+2}} = 0, \quad \frac{d^{2p+1} u}{dx^{2p+1}} = -(-1)^p (m^2 - 1) (m^2 - 5) \dots [m^2 - (2p - 1)^2] m.$$

#### § 154. Производная отъ $\cos(m \arccos x)$ при $x = 0$ . — Полагая

$$\cos(m \arccos x) = u,$$

находимъ:

$$\frac{du}{dx} = \pm \frac{m \sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \pm \frac{mx \sin(m \arccos x)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{m^2 \cos(m \arccos x)}{1-x^2},$$

откуда

$$(1-x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0;$$

это уравненіе было уже получено два раза и изъ него прежнимъ же способомъ, при  $x=0$ , выводимъ:

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

Кромѣ того, при  $x=0$

$$u = \cos m(\arccos 0) = \cos m(2k+1) \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \pm m \sin m(2k+1) \frac{\pi}{2},$$

при чемъ  $k$  обозначаетъ какое-угодно цѣлое число; знакъ  $+$  соотвѣтствуетъ, какъ легко видѣть, случаю, когда  $k$ —нечетное, а знакъ  $-$ , когда  $k$ —четное. Далѣе находимъ:

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m^2(m^2-4)(m^2-16)\dots(m^2-4n^2) \cos(2k+1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = \pm (-1)^n (m^2-1)(m^2-5)\dots[m^2-(2n-1)^2] m \sin(2k+1)m \frac{\pi}{2},$$

при чемъ во второй формулѣ знакъ  $+$  долженъ быть взятъ въ случаѣ  $k$  четнаго и знакъ  $-$  въ случаѣ  $k$  нечетнаго.

Если изъ дугъ, косинусы которыхъ равны нулю, требуется взять только  $\frac{\pi}{2}$ , то надо положить  $k=0$ .

**§ 155.** Производная отъ  $\sin(m \arccos x)$  при  $x=0$ . — Полагая

$$u = \sin(m \arccos x),$$

найдемъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, уравненіе:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - x \frac{du}{dx} + m^2 u = 0,$$

изъ котораго, при  $x = 0$ , выводимъ:

$$\frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} = (p^2 - m^2) \frac{d^p u}{dx^p}.$$

А такъ какъ при  $x = 0$

$$u = \sin(m \arccos 0) = \sin(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \mp m \cos m(\arccos 0) = \mp m \cos(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

гдѣ  $k$  — произвольное цѣлое число и знакъ  $\mp$  во второмъ уравненіи соответствуетъ четному  $k$ , то при помощи этихъ значеній найдемъ:

$$\frac{d^{2n+2} u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \sin(2k + 1)m \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{d^{2n+1} u}{dx^{2n+1}} = \mp (-1)^n m (m^2 - 1)(m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] \cos(2k + 1)m \frac{\pi}{2}.$$

§ 156. Производныя отъ  $(1 + x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \arctang x)$  при  $x = 0$ . — Полагая

$$u = (1 + x^2)^{\frac{m}{2}} \sin(m \arctang x)$$

и составляя производныя  $\frac{du}{dx}$  и  $\frac{d^2 u}{dx^2}$ , находимъ, посредствомъ исключенія  $\sin(m \arctang x)$  и  $\cos(m \arctang x)$  изъ трехъ полученныхъ уравненій, слѣдующее соотношеніе между  $u$ ,  $\frac{du}{dx}$  и  $\frac{d^2 u}{dx^2}$ :

$$(1 + x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m - 1)x \frac{du}{dx} + m^2 u - mu = 0.$$

Дифференцируемъ  $p$  разъ:

$$(1 + x^2) \frac{d^{p+2} u}{dx^{p+2}} + 2px \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} + p(p - 1) \frac{d^p u}{dx^p} - 2(m - 1)x \frac{d^{p+1} u}{dx^{p+1}} - 2(m - 1)p \frac{d^p u}{dx^p} +$$

$$+ m^2 \frac{d^p u}{dx^p} - m \frac{d^p u}{dx^p} = 0;$$



полагаемъ  $x = 0$ :

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^p u}{dx^p} (m-p)(m-p-1).$$

Кромѣ того, при  $x = 0$  (предполагая, что  $\arctang 0 = 0$ ) имѣемъ:

$$u = 0, \quad \frac{du}{dx} = m,$$

откуда заключаемъ:

$$\frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = 0, \quad \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = (-1)^n m(m-1)(m-2)\dots(m-2n+1)(m-2n).$$

Беря  $\arctang x$  во всей его общности, пишемъ:

$$\arctang 0 = k\pi$$

и, при  $x = 0$ ,

$$u = \sin mk\pi, \quad \frac{du}{dx} = m \cos mk\pi;$$

въ такомъ случаѣ

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} &= (-1)^n m(m-1)\dots(m-2n)(m-2n-1)\sin mk\pi, \\ \frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} &= (-1)^n m(m-1)\dots(m-2n)\cos mk\pi, \end{aligned}$$

гдѣ  $k$ —произвольное цѣлое число.

**§ 157.** Производныя отъ  $(1+x^2)^{\frac{m}{2}} \cos(m \arctang x)$  при  $x = 0$ . — Полагая

$$u = (1+x^2)^{\frac{m}{2}} \cos(m \arctang x),$$

находимъ посредствомъ такого же вычисленія, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, равенство:

$$(1+x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m-1)x \frac{du}{dx} + m^2 u - mu = 0,$$

откуда

$$\frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} = -\frac{d^p u}{dx^p} (m-p)(m-p-1).$$

Зная же  $n$  и  $\frac{du}{dx}$  при  $x=0$  и предполагая  $\arctang 0 = 0$ , выводимъ:

$$\frac{d^{2n+1}u}{dx^{2n+1}} = 0, \quad \frac{d^{2n+2}u}{dx^{2n+2}} = (-1)^n m(m-1) \dots (m-2n-1).$$

§ 158. Производная отъ  $\frac{\cos(m \arctang x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$  при  $x=0$ . — Полагая

$$u = \frac{\cos(m \arctang x)}{(1+x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

и вычисляя  $u$  и  $\frac{du}{dx}$ , легко приходимъ къ соотношенію:

$$(1+x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} + (2m+2)x \frac{du}{dx} + m(m+1)u = 0,$$

откуда, дифференцируя  $p$  разъ и приравнивая  $x$  нулю, выводимъ:

$$\left( \frac{d^{p+2}u}{dx^{p+2}} \right)_0 + (m+p)(m+p+1) \frac{d^p u}{dx^p} = 0$$

и, слѣдовательно, можемъ писать:

$$\frac{d^{2k+1}u}{dx^{2k+1}} = 0$$

при  $p$  нечетномъ, равномъ  $2k+1$ , и

$$\frac{d^{2k}u}{dx^{2k}} = m(m+1) \dots (m+2k-1) (-1)^n$$

при  $p$  четномъ, равномъ  $2k$ .

Производныя и дифференціалы высшаго порядка для функций  
отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ.

Принятое при этомъ обозначеніе.

§ 159. Когда функция содержитъ нѣсколько независимыхъ переменныхъ, то можно составить производную по какой-нибудь одной изъ нихъ; обозначеніе для такой производной одинаково съ обозначеніемъ производной отъ функции съ одною независимой переменною. Если

$$u = \varphi(x, y, z),$$

то производныя отъ  $u$  по  $x, y, z$  обозначаются (§ 50) черезъ  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ . Производныя второго, третьяго, и т. д. порядка по одной изъ этихъ переменныхъ будутъ обозначаться также, согласно обозначеніямъ, приведеннымъ выше, черезъ  $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots$

Если берется производная отъ  $u$  по  $x$ , а затѣмъ отъ полученной производной производная по  $y$ , или, въ болѣе общемъ случаѣ, сначала  $m$  разъ производная по переменной  $x$ , а затѣмъ  $n$  разъ по переменной  $y$ , то конечный результатъ обозначается черезъ  $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ .

Точно такъ же, производную, взятую сначала  $m$  разъ по  $x$ , затѣмъ  $n$  разъ по  $y$  и, наконецъ,  $p$  разъ по  $z$ , будемъ обозначать черезъ  $\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}$ .

Возможность мѣнять порядокъ дифференцированій

§ 160. Изученіе производныхъ, взятыхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ по различнымъ переменнымъ, приводитъ къ важному результату. *Порядокъ дѣйствій не вліяетъ на результатъ.*

Чтобы начать съ простѣйшаго случая, къ которому приводятся всѣ остальные, возьмемъ производную отъ функции  $u$  сначала по  $x$ , а затѣмъ отъ полученнаго результата производную по  $y$ , и докажемъ, что къ тому же придемъ, взявъ сначала производную по  $y$ , а затѣмъ по  $x$ . Короче говоря, докажемъ, что

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}.$$

Пусть

$$u = \varphi(x, y);$$

по опредѣленію

$$\frac{du}{dx} = \lim \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)}{\Delta x} + \varepsilon,$$

гдѣ  $\varepsilon$  бесконечно-мало одновременно съ  $\Delta x$ . Если въ этомъ равенствѣ придать  $y$  приращеніе  $\Delta y$  и раздѣлить соотвѣтственные приращенія обѣихъ частей на  $\Delta y$ , то

$$\frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y + \Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y}. \quad (1)$$

Точно такъ же имѣемъ:

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varphi(x, y + \Delta y) - \varphi(x, y)}{\Delta y} + \varepsilon_1,$$

гдѣ  $\varepsilon_1$  стремится къ нулю вмѣстѣ съ  $\Delta y$ ; измѣняя  $x$  на  $x + \Delta x$ , дѣлимъ соотвѣтственные приращенія обѣихъ частей этого равенства на  $\Delta x$  и полученные частныя приравниваемъ другъ другу:

$$\frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y + \Delta y) + \varphi(x, y)}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}. \quad (2)$$

Въ этихъ формулахъ на основаніи тѣхъ же соображеній, какъ и въ § 136-мъ,  $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta y}$  и  $\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta x}$  въ предѣлѣ равны нулю; кромѣ того, первые члены во вторыхъ частяхъ уравненій (1) и (2) тождественно одни и тѣ же,—слѣдовательно, первыя части этихъ уравненій стремятся къ общему предѣлу. Итакъ,

$$\lim \frac{\Delta \frac{du}{dx}}{\Delta y} = \lim \frac{\Delta \frac{du}{dy}}{\Delta x},$$

т.-е.

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx},$$

что и требовалось доказать.

**§ 161.** Такъ какъ порядокъ двухъ послѣдовательныхъ дифференцированій по различнымъ перемѣннымъ можетъ быть измѣненъ, то отсюда ясно, что и для какова-угодно числа послѣдовательныхъ дифференцированій порядокъ, въ которомъ они будутъ выполнены, безразличенъ. Доказательство тождественно съ доказательствомъ



въ ариѳметикѣ теоремы, что въ произведеніи всѣ множители можно расположить въ какомъ-угодно порядкѣ; тамъ оно также основано только на томъ, что въ произведеніи можно переставить два послѣдовательныхъ множителя.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЫ РАЗЛИЧНЫХЪ ПОРЯДКОВЪ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ОТЪ НѢСКОЛЬКИХЪ  
ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 162. Пусть  $u = \varphi(x, y)$  будетъ функція отъ двухъ независимыхъ переменныхъ. Если приписать каждой переменной безконечно-малое приращеніе, то для функціи  $\varphi(x, y)$  получится также безконечно-малое приращеніе, которое можно замѣнить всякимъ другимъ безконечно-малымъ количествомъ, имѣющимъ съ первымъ отношеніе, стремящееся въ предѣлѣ къ единицѣ. Мы видѣли (§ 54), что, обозначая черезъ  $dx$  и  $dy$  безконечно-малыя приращенія двухъ переменныхъ, мы можемъ соотвѣтственное приращеніе функціи выразить черезъ

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Если приписать снова  $x$  и  $y$  приращенія, равныя предыдущимъ, то дифференціалъ  $du$ , представляющій функцію отъ  $x$  и  $y$ , будетъ самъ имѣть дифференціалъ, который обозначается черезъ  $d^2u$ ; такимъ образомъ

$$d^2u = d\left(\frac{du}{dx}\right) dx + d\left(\frac{du}{dy}\right) dy = \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} dxdy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2.$$

Приписывая снова  $x$  и  $y$  приращенія, равныя  $dx$  и  $dy$ , находимъ, что дифференціалъ  $d^2u$ , представляющій функцію отъ  $x$  и  $y$ , будетъ имѣть дифференціалъ  $d^3u$ , выражаемый формулою:

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3} dx^3 + 3 \frac{d^3u}{dx^2 dy} dx^2 dy + 3 \frac{d^3u}{dx dy^2} dx dy^2 + \frac{d^3u}{dy^3} dy^3.$$

Продолжая составлять послѣдовательные дифференціалы, соотвѣтствующіе постояннымъ приращеніямъ, приписываемымъ  $x$  и  $y$ , получимъ, заключая по индукціи, формулу:

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + n \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \dots + \frac{d^n u}{dy^n} dy^n,$$

которая символически пишется слѣдующимъ образомъ:

$$d^n u = \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^n.$$

Во второй части этой формулы необходимо замѣнять различныя степени  $du$  дифференціалами порядковъ, равныхъ соотвѣтственнымъ показателямъ; такимъ образомъ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^p \left(\frac{du}{dy}\right)^q$$

должно быть замѣнено черезъ

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q}.$$

Эта формула доказана для частныхъ значеній 1, 2, 3, ... числа  $n$ . Чтобы доказать ее вообще, достаточно вывести, что если справедливо символическое равенство:

$$d^n u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

то будетъ справедливо, при тѣхъ же обозначеніяхъ, равенство:

$$d^{n+1} u = \left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^{n+1}.$$

Для этого замѣтимъ, что такъ какъ  $d^n u$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , то его дифференціалъ выразится формулою:

$$d^{n+1} u = \frac{d}{dx} (d^n u) dx + \frac{d}{dy} (d^n u) dy;$$

значить, приходится взять производную по  $x$  отъ выраженія, которое пишется, символически

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^n,$$

умножить эту производную на  $dx$ , затѣмъ взять производную отъ того же выраженія по  $y$  и умножить ее на  $dy$ . Но если умножить то же выраженіе на

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy$$

и написать

$$\left(\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy\right)^{n+1},$$

то пришлось бы произвести точно такія же выкладки и самые результаты писать

абсолютно въ томъ же видѣ. Въ самомъ дѣлѣ, беря производную по  $x$  отъ какого-нибудь члена

$$A \frac{d^{p+q}u}{dx^p dy^q} dx^p dy^q$$

и умножая эту производную на  $dx$ , находимъ

$$A \frac{d^{p+q+1}u}{dx^{p+1} dy^q} dx^{p+1} dy^q,$$

что тождественно по виду съ членомъ, который мы получимъ, умноживъ символически

$$A \frac{d^p u}{dx^p} \frac{d^q u}{dy^q}$$

на  $\frac{du}{dx} dx$ . Точно такъ же, беря производную по  $y$  и умножая ее на  $dy$ , замѣтимъ, что получаемые при этомъ члены будутъ имѣть тотъ же видъ, что и члены, получаемые при умноженіи предыдущаго выраженія на  $\frac{du}{dy} dy$ ; такимъ образомъ, выполняя дѣйствіе для полученія полного дифференціала  $d^{n+1}u$ , мы пишемъ такіе же члены, какъ и при умноженіи на

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy.$$

Итакъ, допуская символическое равенство:

$$d^n u = \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^n,$$

закключаемъ, что равнымъ образомъ справедливо символическое равенство:

$$d^{n+1}u = \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy \right)^{n+1}.$$

**§ 163.** То же самое правило прилагается къ дифференціаламъ функціи отъ какого-угодно числа переменныхъ. Такъ напр., если

$$u = \varphi(x, y, z, t),$$

то совершенно такимъ же образомъ находимъ:

$$d^n u = \left( \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt \right)^n,$$

при чемъ степень, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, понимается символически.

§ 164. Необходимо замѣтить, что если функція зависитъ отъ нѣсколькихъ переменныхъ, которыя сами извѣстныя функціи отъ другихъ переменныхъ, принимаемыхъ за независимыя, то предыдущія формулы не приложимы.

Дѣйствительно, пусть, напр.,

$$u = \varphi(p, q),$$

гдѣ  $p$  и  $q$  — извѣстныя функціи отъ двухъ переменныхъ  $x$  и  $y$ . Имѣемъ:

$$du = \frac{du}{dp} dp + \frac{du}{dq} dq. \quad (1)$$

На первые дифференціалы выборъ независимыхъ переменныхъ не вліяетъ: между ними существеннаго различія нѣтъ (§ 138); слѣдовательно, можно предположить, что  $p$  и  $q$  замѣняютъ  $x$  и  $y$ . Но если требуется вычислить  $d^2u$ , то не нужно забывать, что такимъ образомъ обозначается дифференціалъ отъ  $du$ , когда  $x$  и  $y$  приписываются снова безконечно-малыя приращенія, равныя тѣмъ, которыя они уже получили. Этимъ равнымъ приращеніямъ соотвѣтствуютъ, вообще говоря, неравныя приращенія какъ для  $p$ , такъ и для  $q$ , и, значитъ, при дифференцированіи выраженія (1) для составленія  $d^2u$  нельзя разсматривать  $dp$  и  $dq$ , какъ постоянныя; иначе говоря,

$$d^2u = \frac{d^2u}{dp^2} dp^2 + 2 \frac{d^2u}{dp dq} dp dq + \frac{d^2u}{dq^2} dq^2 + \frac{du}{dp} d^2p + \frac{du}{dq} d^2q.$$

Продолжая такимъ же образомъ далѣе, придемъ къ сложнымъ и рѣдко употребляющимся формуламъ.

#### Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функцій

§ 165. Предыдущія разсужденія даютъ возможность вычислять производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функцій съ нѣсколькими переменными; наиболѣе простой и употребительный методъ заключается въ составленіи полного дифференціала той функціи, отъ которой желательно имѣть частныя производныя: этими производными будутъ коэффициенты при различныхъ степеняхъ дифференціаловъ независимыхъ переменныхъ, раздѣленные соотвѣтственно на извѣстные численные множители.

Достаточно одного примѣра, чтобы вполне разъяснить этотъ методъ. Пусть

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x, \alpha), \\ y &= \psi(x, \alpha). \end{aligned}$$



Требуется вывести изъ этихъ уравненій  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2}$ . Для этого вычисляемъ  $d^2z$ , принимая  $dx$  и  $dy$  за постоянныя; получится выраженіе вида:

$$d^2z = A dx^2 + 2B dx dy + C dy^2,$$

и, слѣдовательно, будемъ имѣть:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = B, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = C.$$

Замѣчая, что  $d^2x$  и  $d^2y$  равны нулю, а  $d^2\alpha$  не нуль, изъ данныхъ уравненій выводимъ:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{d\alpha} d\alpha, \\ dy &= \frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{d\alpha} d\alpha, \\ d^2z &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2\varphi}{dxd\alpha} dx d\alpha + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} d\alpha^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha} d^2\alpha, \\ 0 &= \frac{d^2\psi}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2\psi}{dxd\alpha} dx d\alpha + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} d\alpha^2 + \frac{d\psi}{d\alpha} d^2\alpha. \end{aligned}$$

Исключая изъ этихъ уравненій  $d\alpha$  и  $d^2\alpha$ , получимъ для  $d^2z$  выраженіе искомаго вида, и задача будетъ рѣшена. Такимъ образомъ находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} - 2 \frac{d^2\varphi}{dxd\alpha} \left( \frac{d\psi}{dx} \right) + \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 - \frac{d\varphi}{d\alpha} \left[ \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d^2\psi}{dxd\alpha} \frac{d\psi}{dx} + \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 \right], \\ \frac{d^2z}{dy^2} &= \frac{\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}}{\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2} - \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}}{\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^3}, \\ \frac{d^2z}{dxdy} &= 2 \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \frac{\frac{d\psi}{dx}}{\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^2} - 2 \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{\frac{d^2\psi}{dxd\alpha}}{\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d^2\psi}{d\alpha^2} \frac{\left( \frac{d\psi}{dx} \right)}{\left( \frac{d\psi}{d\alpha} \right)^3}. \end{aligned}$$

Тотъ же методъ можно примѣнить къ вычисленію производныхъ болѣе высшаго порядка, но результаты будутъ получаться все сложнѣе и сложнѣе.

**§ 166.** Также можно искать производныя отъ  $z$  въ послѣдовательномъ порядкѣ, выводя ихъ одну изъ другой. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя оба данныхъ уравненія по  $x$  и рассматривая  $y$ , какъ постоянную, находимъ.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx} \\ 0 &= \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned}$$

откуда, по исключеніи  $\frac{d\varphi}{dx}$ ,

$$* \frac{dz}{dx} = p = \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} = \varphi_1(x, \alpha).$$

Тѣ же уравненія, дифференцированныя по  $y$ , даютъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dy} = q &= \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy}, \\ 1 &= \frac{d\psi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{dz}{dy} = q = \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}} = \varphi_2(x, \alpha).$$

Такъ какъ  $p$  и  $q$  — извѣстныя функціи отъ  $x$  и  $\alpha$ , то достаточно замѣнить въ послѣдовательномъ порядкѣ въ этихъ формулахъ функцію  $\varphi$  на  $\varphi_1$  и затѣмъ на  $\varphi_2$ , чтобы получить  $\frac{dp}{dx}$ ,  $\frac{dp}{dy}$ ,  $\frac{dq}{dx}$  и  $\frac{dq}{dy}$ , т.-е. вторыя производныя отъ  $z$ . Такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_1}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dy} = \frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}},$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{d\varphi_2}{dx} - \frac{d\psi}{dx} \frac{\frac{d\varphi_2}{d\alpha}}{\frac{d\psi}{d\alpha}}.$$

Замѣтимъ, что производныя  $\frac{dp}{dy}$  и  $\frac{dq}{dx}$  представляютъ, и та, и другая,  $\frac{d^2z}{dx dy}$ ; слѣдовательно, онѣ равны. Это есть необходимая зависимость между производными отъ функцій  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Если бы изъ этихъ формулъ мы пожелали вывести результаты, полученные выше, то нужно было бы выполнить лишь указанные здѣсь дифференцированія по  $x$  и по  $\alpha$  функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

### УПРАЖНЕНІЯ

1. Если въ функціи  $y = \varphi(x)$  давать переменной  $x$  послѣдовательныя значенія:  $x, x + h_1, x + h_1 + h_2, x + h_1 + h_2 + h_3, \dots$  и обозначать при этомъ соотвѣтственныя значенія  $y$  черезъ  $y, y_1, y_2, \dots, y_n$ , то предѣломъ отношенія  $\frac{\Delta^n y}{h_1 h_2 h_3 \dots h_n}$  будетъ  $n$ -ая производная отъ  $y$ , когда  $h_1, h_2, \dots, h_n$  стремятся одновременно къ нулю.

2. Если конечная и непрерывная функція отъ  $x$  обращается въ нуль при значеніяхъ:  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$ , расположенныхъ въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ, то для всякаго значенія  $x$ , содержащагося между  $x_1$  и  $x_n$ ,

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \frac{\varphi^n(\alpha)}{1.2.3 \dots n},$$

гдѣ  $\varphi^n(\alpha)$  есть значеніе  $n$ -ой производной отъ функціи  $\varphi$  при нѣкоторомъ среднемъ значеніи  $x$  между  $x_1$  и  $x_n$ . Для доказательства этой теоремы замѣчаютъ, что  $n$ -ая производная отъ первой части уравненія:

$$\varphi(x) - A(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0,$$

имѣющаго при всякомъ  $A$  корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , равная

$$\varphi^n(x) - 1.2.3 \dots n A,$$

обращается въ нуль для нѣкотораго значенія  $x$ , лежащаго между  $x_1$  и  $x_n$ , если  $A$  таково, что допускаетъ еще  $(n + 1)$ -ый корень для этого уравненія въ тѣхъ же предѣлахъ.

3. Представить выраженіе  $\frac{d^n \varphi(e^x)}{dx^n}$  подъ видомъ:

$$A_1 \varphi'(e^x) + A_2 \varphi''(e^x) + \dots + A_n \varphi^n(e^x),$$

т.-е. вычислить коэффиціенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , не зависящіе отъ вида функціи  $\varphi$ .

4. Вычислить выраженіе  $\frac{d^n \frac{1}{e^x - 1}}{dx^n}$  и представить его подъ видомъ:

$$A_1 \frac{1}{e^x - 1} + A_2 \frac{1}{(e^x - 1)^2} + \dots + A_{n+1} \frac{1}{(e^x - 1)^{n+1}},$$

т.-е. опредѣлить постоянныя  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ .

5. Выраженіе  $\frac{d^n x^n (lx)^n}{dx^n}$  есть вида:

$$1 + A_1 lx + \frac{A_2}{1.2} (lx)^2 + \dots + \frac{A_n}{1.2 \dots n} (lx)^n;$$

найти постоянныя  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

6. Полагая

$$z = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

имѣемъ:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (-1)^n \frac{1.2.3 \dots n \cos \left[ (n+1) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n} z}{dy^{2n}} = (-1)^n \frac{1.2.3 \dots 2n \cos \left[ (2n+1) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{\frac{2n+1}{2}}},$$

$$\frac{d^{2n+1} z}{dy^{2n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{1.2.3 \dots (2n+1) \sin \left[ (2n+2) \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \right]}{(x^2 + y^2)^{n+1}}.$$

7. Если  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , опредѣляемая двумя уравненіями:

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + F(\alpha),$$

$$0 = x + y\varphi'(\alpha) + F'(\alpha),$$

то, каковы бы ни были функціи  $\varphi(\alpha)$  и  $F(\alpha)$ ,

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dy^2} = \left( \frac{d^2 z}{dx dy} \right)^2.$$

8. Если

$$\alpha = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\beta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\gamma = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

и  $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ , и если функція  $\nu$ , разсматриваемая какъ функція отъ  $x, y, z$ , удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{d^2 \nu}{dx^2} + \frac{d^2 \nu}{dy^2} + \frac{d^2 \nu}{dz^2} = 0,$$

то, разсматривая  $\nu$  какъ функцію отъ  $\alpha, \beta, \gamma$ , будемъ имѣть:

$$\frac{d^2 \left( \frac{\nu}{\rho} \right)}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \left( \frac{\nu}{\rho} \right)}{d\beta^2} + \frac{d^2 \left( \frac{\nu}{\rho} \right)}{d\gamma^2} = 0.$$



## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### Замѣна переменныхъ

#### Вліяніе независимой переменной на дифференціалы порядка выше перваго

§ 167. Когда рассматриваютъ дифференціалы перваго порядка, выборъ независимой переменной безразличенъ, и нѣтъ никакой необходимости говорить о немъ. Если приходится замѣнить эту переменную другою, связанною съ нею какимъ-нибудь образомъ, то дифференціальныя выраженія не измѣнятся. Иное дѣло — дифференціалы высшаго порядка; чтобы второй дифференціалъ  $d^2y$  имѣлъ опредѣленный смыслъ, необходимо указать независимую переменную, вслѣдствіе чего часто пишутъ, если  $x$  есть эта переменная,  $\frac{d^2y}{dx^2}dx^2$  вмѣсто болѣе простаго, но менѣе яснаго  $d^2y$ .

Возьмемъ для примѣра функцію  $y = x^4$ ; считая  $x$  за независимую переменную, имѣемъ:

$$dy = 4x^3dx, \quad d^2y = 12x^2dx^2.$$

Принимая теперь за независимую переменную  $x^2$  и обозначая ее черезъ  $u$ , будемъ имѣть:

$$y = u^2, \quad dy = 2ud u, \quad d^2y = 2du^2.$$

Отсюда, замѣняя  $u$  и  $du$  ихъ значеніями черезъ  $x$  и  $dx$ , находимъ:

$$dy = 4x^3dx, \quad d^2y = 8x^2dx^2.$$

Итакъ,  $dy$  осталось безъ переменны, а  $d^2y$  уже измѣнилось.

§ 168. Смыслъ только-что отмѣченнаго факта очень простъ. Когда принимается  $x$  за независимую переменную,  $dx$  — постоянная величина, а когда вводится вмѣсто прежней новая независимая переменная, дифференціалъ которой рассматри-

вается какъ постоянная,  $dx$  является переменною и дифференціалъ произведе-  
нія  $\varphi'(x)dx$  будетъ другой.

Въ выбранномъ выше примѣрѣ мы положили  $x^2 = u$  и, слѣдовательно,  $x = \sqrt{u}$ ;  
въ такомъ случаѣ  $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ ,  $d^2x = -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}du^2$ . Значитъ, если продифференцировать  
выраженіе:

$$dy = 4x^3 dx,$$

то будемъ имѣть:

$$d^2y = 12x^2 dx^2 + 4x^3 d^2x = 8x^2 dx^2,$$

что совпадаетъ съ полученнымъ выше результатомъ; кромѣ того, отсюда усматри-  
вается яснѣе, почему  $d^2y$  не равно болѣе  $12x^2 dx^2$  и въ чемъ его отличие отъ прежняго.

#### ЗАМѢНА НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 169. Если разсматривается функція  $y$  отъ переменной  $x$  и эта переменная  
принимается за независимую, то дифференціалы  $dy$ ,  $d^2y$ ,  $d^3y$  являются вполне опре-  
дѣленными (§ 133). Предположимъ теперь, что за независимую переменную требуется  
принять нѣкоторую новую переменную  $t$ , связанную съ  $x$  извѣстнымъ образомъ; ка-  
ковы будутъ соотношенія, связывающія дифференціалы  $dy$ ,  $d^2y$ , ...,  $d^ny$  съ диффе-  
ренціалами  $y$ , взятыми при этомъ новомъ предположеніи? Чтобы отвѣтить на этотъ  
вопросъ, условимся обозначать дифференціалы, взятые при  $dx$  постоянномъ, черезъ  
 $d_x y$ ,  $d_x^2 y$ ,  $d_x^3 y$ , ...,  $d_x^n y$ , а дифференціалы, взятые по независимой переменной  $t$ , по-  
прежнему, буквою  $d$  безъ всякаго указателя, такъ что  $d^n y$  будетъ выражать  $n$ -ый  
дифференціалъ при  $dt$  постоянномъ. Производная отъ  $y$  по  $x$  выразится, какъ мы ви-  
дѣли (§ 48), черезъ  $\frac{dy}{dx}$ , какова бы ни была независимая переменная. Пусть  $t$  бу-  
детъ эта переменная; ищемъ вторую производную отъ  $y$  по  $x$ . Для этого нужно диф-  
ференцировать предыдущую дробь и ея дифференціалъ раздѣлить на  $dx$ ; такимъ  
образомъ, для этой второй производной находимъ выраженіе:

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}.$$

Точно такъ же, чтобы получить третью производную  $\frac{d^3y}{dx^3}$ , беремъ, какова бы ни была  
независимая переменная, дифференціалъ отъ второй производной и дѣлимъ его на  $dx$ :

$$\frac{dx^4 d^3y - dx^3 dy d^3x - 3dx^3 d^2y d^2x + 3dy dx^2 (d^2x)^2}{dx^6};$$

слѣдовательно, искомыя формулы будутъ:

$$d_x^2 y = \frac{d^2 y dx - d^2 x dy}{dx},$$

$$d_x^3 y = \frac{d^3 y dx^2 - dx dy d^2 x - 3 dx d^2 y dx + dy (d^2 x)^2}{dx^2}.$$

Эти формулы даютъ возможность выбрать независимую переменную по своему желанію, или, что не рѣдко болѣе выгодно, оставить независимую переменную неопредѣленною.

§ 170. Въ каждомъ приложеніи необходимо пользоваться уравненіемъ, связывающимъ съ  $x$  новую независимую переменную, и вычислять дифференціалы  $d^2 x$ ,  $d^3 x$ , ... въ функціи отъ этой новой переменной, вполне произвольной по нашимъ формуламъ. Разсмотримъ, напр., уравненіе:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0, \quad (1)$$

въ которомъ требуется положить  $x = \cos t$  и  $t$  принять за независимую переменную.

По общей формулѣ это уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2 y dx - d^2 x dy}{dx^3} - \frac{x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0,$$

и независимая переменная станетъ произвольною. Полагая  $x = \cos t$  и замѣчая, что  $d^2 t = 0$ , выводимъ:

$$dx = -\sin t dt, \quad d^2 x = -\cos t dt^2;$$

слѣдовательно, уравненіе (1), послѣ небольшихъ упрощеній, перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

§ 171. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ общіе методы привели бы къ сложнымъ выкладкамъ, которыхъ можно избѣжать съ помощію частныхъ приѣмовъ. Въ качествѣ примѣра приведемъ преобразование выраженія  $x^n \frac{d^n y}{dx^n}$ , когда вмѣсто  $x$  вводится независимая переменная  $t$ , опредѣляемая изъ уравненія  $x = e^t$ , дающаго  $\frac{dx}{dt} = x$ .

Имѣемъ:

$$\frac{d}{dt} \left( x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) = \frac{d}{dx} \left( x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) \frac{dx}{dt} = \left( nx^{n-1} \frac{d^n y}{dx^n} + x^n \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} \right) x = nx^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left( x^n \frac{d^n y}{dx^n} \right) - n x^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}},$$

что для краткости можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\left( \frac{d}{dt} - n \right) x^n \frac{d^n y}{dx^n} = x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}.$$

Полагая  $n = 1$ , выводимъ:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) x \frac{dy}{dx} = \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt};$$

значитъ, полагая послѣдовательно  $n = 2, n = 3, \dots$ , легко приходимъ къ общей формулѣ:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[ \frac{d}{dt} - (n-1) \right] \left[ \frac{d}{dt} - (n-2) \right] \dots \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt};$$

напр., при  $n = 3$ , получаемъ:

$$x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = \left( \frac{d}{dt} - 2 \right) \left( \frac{d}{dt} - 1 \right) \frac{dy}{dt} = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}.$$

§ 172. Сдѣлаемъ здѣсь одно замѣчаніе, полезное во многихъ случаяхъ. Когда независимая переменная остается неопредѣленною, мы сохраняемъ право выбрать ее послѣ и, притомъ, совершенно произвольно. Поэтому, если въ найденныхъ формулахъ положимъ  $d^2 x = 0$ , то мы получимъ выраженія, къ которымъ пришли бы непосредственно, принявъ  $x$  за независимую переменную; далѣе, вводя въ этихъ формулахъ вмѣсто независимой переменной  $x$  произвольную переменную  $t$ , мы должны снова придти къ первоначальнымъ формуламъ; если этого не случится, то навѣрное въ вычисленіяхъ сдѣлана ошибка.

Пусть, напр., при рѣшеніи задачи на кривую, заданную уравненіемъ  $y = \varphi(x)$ , мы нашли для нѣкоторой длины, опредѣляемой геометрически, выраженіе:

$$\frac{1}{a} = \frac{dx d^2 y + dy d^2 x}{dx^3 + dy^3},$$

при чемъ еще не сдѣланъ выборъ независимой переменной. Положивъ теперь  $d^2 x = 0$ , получимъ:

$$\frac{1}{a} = \frac{dx d^2 y}{dx^3 + dy^3}.$$



Чтобы отсюда вернуться къ общей формулѣ, когда независимая переменная какая-угодно, нужно замѣнить  $dx d^2y$  черезъ  $dx d^2y - dy d^2x$ ; въ такомъ случаѣ найдемъ:

$$\frac{1}{u} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3 + dy^3}.$$

Этотъ результатъ не совпадаетъ съ первоначальною формулою, что невозможно; значитъ, не точны тѣ, неизвѣстныя намъ, выкладки, которыя привели къ ней.

#### Одновременная замѣна всѣхъ переменныхъ

§ 173. Иногда представляется случай сдѣлать въ формулѣ замѣну всѣхъ переменныхъ и поставить вмѣсто нихъ другія, находящіяся съ первыми въ данной зависимости; это, напр., случается въ задачахъ при переходѣ отъ прямолинейныхъ координатъ къ полярнымъ. Въ такихъ случаяхъ вопросъ сводится къ рѣшенію слѣдующей общей задачи:

дано, что  $y$  есть функція отъ  $x$ ; подставить вмѣсто этихъ переменныхъ двѣ новыя  $u$  и  $v$ , представляющія извѣстныя функціи отъ первыхъ, и выразить дифференціалы  $x$  и  $y$  въ функціи отъ дифференціаловъ новыхъ переменныхъ  $u$  и  $v$ .

Для рѣшенія этого вопроса необходимо сначала приготовить данную формулу къ преобразованію такимъ образомъ, чтобы независимая переменная была бы произвольна; для этой цѣли достаточно вычислить  $dx$ ,  $dy$ ,  $d^2x$ ,  $d^2y$ , ...

Очевидно имѣемъ:

$$dx = \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv, \quad dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv. \quad (1)$$

Эти уравненія даютъ дифференціалы перваго порядка  $dx$  и  $dy$ ; дѣйствительно, такъ какъ  $x$  и  $y$  даны въ функціи отъ  $u$  и  $v$ , то можно  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dx}{dv}$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $\frac{dy}{dv}$  разсматривать, какъ извѣстныя, полученныя или непосредственнымъ дифференцированіемъ, или съ помощью метода дифференцированія неявныхъ функцій въ томъ случаѣ, когда  $u$  и  $v$  задаются двумя уравненіями, не рѣшенными относительно  $x$  и  $y$ .

Дифференцируя уравненія (1), находимъ:

$$d^2x = \frac{d^2x}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2x}{du dv} du dv + \frac{d^2x}{dv^2} dv^2 + \frac{dx}{du} d^2u + \frac{dx}{dv} d^2v,$$

$$d^2y = \frac{d^2y}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2y}{du dv} du dv + \frac{d^2y}{dv^2} dv^2 + \frac{dy}{du} d^2u + \frac{dy}{dv} d^2v,$$

и т. д. Значенія  $\frac{d^2x}{du^2}$ ,  $\frac{d^2x}{du dv}$ ,  $\frac{d^2x}{dv^2}$ ,  $\frac{d^2y}{du^2}$ ,  $\frac{d^2y}{du dv}$ ,  $\frac{d^2y}{dv^2}$  вычисляются непосредственно, если  $x$  и  $y$  даны явно въ функціи отъ  $u$  и  $v$ ; въ противномъ же случаѣ—при помощи извѣстныхъ методовъ дифференцированія неявныхъ функцій.

Особенно эта теорія имѣетъ примѣненіе въ приложеніи дифференціального исчисления къ геометріи. Пусть, напр.,

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y - dy d^2 x}$$

есть выраженіе нѣкоторой длины; требуется найти выраженіе, въ которое обратится  $R$  послѣ замѣны въ немъ  $x$  и  $y$  новыми переменными  $\rho$  и  $\omega$ , опредѣляемыми изъ уравненій:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \omega, \\ y &= \rho \sin \omega. \end{aligned}$$

Принимая  $\omega$  за независимую переменную, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} dx &= d\rho \cos \omega - \rho \sin \omega d\omega, & dy &= d\rho \sin \omega + \rho \cos \omega d\omega, \\ d^2 x &= d^2 \rho \cos \omega - 2d\rho \sin \omega d\omega - \rho \cos \omega d\omega^2, \\ d^2 y &= d^2 \rho \sin \omega + 2d\rho \cos \omega d\omega - \rho \sin \omega d\omega^2 \end{aligned}$$

и, послѣ подстановки,

$$R = \frac{(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 d\omega^3 + 2d\rho^2 d\omega - \rho d^2 \rho d\omega}.$$

§ 174. Пусть требуется въ формулѣ принять переменную, которая все время разсматривалась какъ неопредѣленная, за независимую; въ такомъ случаѣ, если она представляетъ одну изъ буквъ, входящихъ въ вычисленія, всѣ ея дифференціалы порядка выше перваго приравняются нулю, а если эта новая переменная входитъ въ вычисленія неявно, то нужно поступить иначе.

Въ послѣднемъ случаѣ составляютъ второй дифференціалъ отъ этой независимой переменной и приравняютъ его нулю; тогда между различными дифференціалами буквъ, входящихъ въ разсматриваемое выраженіе, получится зависимость, съ помощью которой можно его подвергнуть безчисленному множеству преобразованій. Возьмемъ, напр., выраженіе:

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy d^2 x - dx d^2 y} \quad (1)$$

и примемъ за независимую переменную функцію  $s$  отъ  $x$  и  $y$ , опредѣляемую уравненіемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2; \quad (2)$$

$s$ , какъ известно (§ 118), есть дуга кривой, координатами точекъ которой служатъ  $x$  и  $y$ . Приравнивая  $d^2s$  нулю, находимъ равенство:

$$0 = dx d^2x + dy d^2y, \quad (3)$$

при помощи котораго можно многими способами преобразовать выражение (1), послѣ чего это послѣднее приметъ видъ:

$$\frac{1}{R} = \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dx}{ds} \left( \frac{\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}} \right) + \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \frac{d^2x}{ds^2} + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \frac{d^2y}{ds^2}}{\frac{dy}{ds}}$$

Для бѣльшаго изящества возвышаютъ  $\frac{1}{R}$  въ квадратъ:

$$\frac{1}{R^2} = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 - 2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^2y}{ds^2},$$

а такъ какъ въ силу соотношенія (3)

$$- 2 \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^2y}{ds^2} = 2 \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 = 2 \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 = \left( \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2,$$

то

$$\frac{1}{R^2} = \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2,$$

или

$$\frac{1}{R^2} = \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right] = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2.$$

Должно замѣтить, что выраженіе  $R$  въ функціи производныхъ отъ  $x$  и  $y$ , взятыхъ по  $s$ , неопредѣленно; въ самомъ дѣлѣ, между этими производными существуютъ соотношенія, и два выраженія, содержащія ихъ, могутъ быть равносильными, не будучи тождественными.

§ 175. Когда получена формула, въ которой за независимую все время принималась переменная, опредѣленная такъ, какъ указано въ предыдущемъ параграфѣ, то можно поставить себѣ задачу перейти, съ помощью этой формулы, къ общему случаю, гдѣ независимая переменная была бы совершенно произвольною. Этотъ вопросъ отличается отъ рѣшеннаго въ § 169-мъ. Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь производныя взяты по переменной  $s$ , которая вмѣстѣ со своими дифференціалами должна исчезнуть изъ окончательнаго результата. Если дано, напр., уравненіе:

$$\frac{1}{R^2} = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2, \quad (1)$$

гдѣ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то по формуламъ § 169-го получится:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2x ds - dx d^2s)^2 + (d^2y ds - dy d^2s)^2}{ds^6}, \quad (2)$$

мы же хотимъ получить выраженіе для  $\frac{1}{R}$  безъ  $s$ , въ функціи исключительно отъ  $x$  и  $y$ .

Относительно выбраннаго примѣра ограничимся указаніемъ хода необходимыхъ выкладокъ.

Чтобы преобразовать формулу (2), достаточно вычислить  $\frac{d^2x}{ds^2}$  и  $\frac{d^2y}{ds^2}$ ; но, такъ какъ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \right) = - \frac{d^2x \sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{dx(dx d^2x + dy d^2y)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}}{ds(dx^2 + dy^2)} = \frac{d^2x dy^2 - dx dy d^2y}{(dx^2 + dy^2)^2}; \end{aligned}$$

точно такъ же

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y dx^2 - dx dy d^2x}{(dx^2 + dy^2)^2}.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 &= \frac{(d^2x dy^2 - dx dy d^2y)^2 + (d^2y dx^2 - dx dy d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2)^4} = \\ &= \frac{d^2x^2 dy^2 (dx^2 + dy^2) + d^2y^2 dx^2 (dx^2 + dy^2) - 2 dx d^2x dy d^2y (dx^2 + dy^2)}{(dx^2 + dy^2)^4} = \\ &= \frac{(dx d^2y - dy d^2x)^2}{(dx^2 + dy^2)^3}, \end{aligned}$$

что представляетъ весьма извѣстную формулу.

#### СЛУЧАЙ МНОГИХЪ НЕЗАВИСИМЫХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 176. Если въ функціи отъ многихъ переменныхъ эти послѣднія замѣняются новыми, то производныя отъ преобразованной такимъ образомъ функціи могутъ быть



вычислены при помощи соотношений, съ которыми мы сейчас познакомимся и которыя даютъ возможность вывести изъ нихъ производныя отъ функціи въ ея первоначальномъ видѣ.

Разсмотримъ сначала, для большей простоты, функцію  $z$  отъ двухъ переменныхъ:

$$z = \varphi(x, y).$$

Пусть  $u$  и  $v$  будутъ двѣ новыя переменныя, связанныя съ  $x$  и  $y$  двумя данными уравненіями, при чемъ не исключается, конечно, случай, когда одно изъ этихъ уравненій есть  $u = x$  или  $v = y$  и, слѣдовательно, будетъ замѣнена только одна изъ переменныхъ, отъ которыхъ зависитъ функція  $z$ .

Если  $x$  и  $y$  — независимыя переменныя, дифференціалы  $dz$ ,  $d^2z$ ,  $d^3z$ , ... являются вполне опредѣленными и ихъ выраженіе было дано какъ въ функціи отъ  $dx$  и  $dy$ , такъ и въ функціи отъ дифференціаловъ  $du$ ,  $dv$ ,  $d^2u$ ,  $d^2v$ , ... Отождествленіе этихъ выраженій дастъ намъ искомыя соотношенія.

Имѣемъ:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy,$$

$$dz = \frac{dz}{du} du + \frac{dz}{dv} dv.$$

Эти два выраженія  $dz$  должны быть тождественны послѣ замѣны  $du$  и  $dv$  ихъ значеніями:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

$$dv = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy.$$

Дѣйствительно, тогда оба выраженія  $dz$  будутъ вида  $Pdx + Qdy$  и такъ какъ оба они представляютъ, съ точностью до бесконечно-малыхъ второго порядка, приращеніе функціи  $z$ , то ихъ разность должна быть бесконечно-малою второго порядка. Замѣчая же, что  $dx$  и  $dy$  — двѣ бесконечно-малыя перваго порядка, не зависящія одна отъ другой, выводимъ, что эта разность строго равна нулю.

Изъ такого тождества вытекаетъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dx}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{du} \frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dy}. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти уравненія рѣшаютъ вопросъ для случая производныхъ перваго порядка. Производныя  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ , входящія сюда, должны быть рассматриваемы, какъ извѣстныя; получаются онѣ изъ данныхъ уравненій, связывающихъ  $u$  и  $v$  съ  $x$  и  $y$ .

Замѣтимъ, что каждое изъ уравненій (1) можетъ быть выписано, какъ прямое слѣдствіе изъ правила дифференцірованія (§ 58) сложныхъ функцій.

§ 177. Сравненіе двухъ различныхъ выраженій  $d^2z$  дастъ производныя второго порядка  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2}$  въ функціи отъ производныхъ, взятыхъ по переменнымъ  $u$  и  $v$ .

Разсматривая  $dx$  и  $dy$ , какъ постоянныя, имѣемъ:

$$d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2, \quad (1)$$

$$d^2z = \frac{d^2z}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2z}{dudv} dudv + \frac{d^2z}{dv^2} dv^2 + \frac{dz}{du} d^2u + \frac{dz}{dv} d^2v; \quad (2)$$

кроме того,

$$\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy, & dv &= \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy, \\ d^2u &= \frac{d^2u}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} dxdy + \frac{d^2u}{dy^2} dy^2, & d^2v &= \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dxdy + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2. \end{aligned}$$

Уравненіе (2) послѣ подстановки въ него этихъ значеній приметъ видъ:

$$d^2z = A dx^2 + 2B dxdy + C dy^2;$$

сравнивая съ уравненіемъ (1), заключаемъ, что

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = B, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = C,$$

гдѣ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — извѣстныя функціи отъ  $\frac{d^2z}{du^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dudv}$ ,  $\frac{d^2z}{dv^2}$ ,  $\frac{dz}{du}$ ,  $\frac{dz}{dv}$  и отъ производныхъ  $u$  и  $v$ , взятыхъ по  $x$  и  $y$ .

Тотъ же методъ, очевидно, распространяется на производныя третьяго и высшихъ порядковъ.

§ 178. По предыдущему методу опредѣляются за-разъ, изъ одного равенства, всѣ производныя одного и того же порядка. Впрочемъ, можетъ понадобиться выраженіе только одной производной, — тогда находятъ болѣе удобнымъ опредѣлять ее непосредственно и отдѣльно.

Предположимъ, напр., что при данныхъ предыдущаго параграфа требуется вычислить  $\frac{d^2z}{dxdy}$ .

Сначала, по теоріи сложныхъ функцій, пишемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dx}.$$

Чтобы получить  $\frac{d^2z}{dx dy}$ , нужно взять производныя отъ обѣихъ частей этого равенства по  $y$ , т.-е. написать:

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{du} \right) \frac{du}{dx} + \frac{dz}{du} \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{dv} \right) \frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{d^2v}{dx dy};$$

при этомъ  $\frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{du} \right)$  и  $\frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{dv} \right)$  могутъ быть вычислены по общей формулѣ:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dy} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dy};$$

такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{d^2z}{dx dy} = \frac{d^2z}{du^2} \frac{du}{dx} \frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{du dv} \left( \frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx} \right) + \frac{d^2z}{dv^2} \frac{dv}{dx} \frac{dv}{dy} + \frac{dz}{du} \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{dz}{dv} \frac{d^2v}{dx dy}.$$

Тѣ же принципы прилагаются къ преобразованію производныхъ отъ функціи съ большимъ числомъ независимыхъ переменныхъ; нѣтъ никакой необходимости останавливаться на этомъ. Приложенія въ дальнѣйшихъ параграфахъ не оставятъ мѣста какимъ-либо затрудненіямъ.

#### СЛУЧАЙ ЗАМѢНЫ ФУНКЦІИ

§ 179. Когда уравненіе связываетъ нѣсколько переменныхъ, каждая изъ нихъ можетъ быть рассмотрѣна, какъ функція отъ всѣхъ остальныхъ, и часто въ теченіи одной и той же выкладки считается полезнымъ замѣнить не только независимыя переменныя, но еще и функціи, которыя отъ нихъ зависятъ и вмѣсто которыхъ вводятся въ такомъ случаѣ новыя функціи, связанныя съ первыми данными соотношеніями.

Пусть  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ . Предположимъ сначала, что требуется подставить сюда новую функцію  $w$  отъ двухъ новыхъ переменныхъ  $u$  и  $v$ , при чемъ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  связаны, конечно, съ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  тремя данными уравненіями.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} dw &= \frac{dw}{du} du + \frac{dw}{dv} dv, \\ du &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} \left( \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right), \\ dv &= \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} \left( \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy \right); \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} dw &= \left[ \frac{dw}{du} \left( \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dw}{dv} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} \right) \right] dx + \\ &+ \left[ \frac{dw}{du} \left( \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dw}{dv} \left( \frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} \right) \right] dy, \end{aligned}$$

съ другой же стороны

$$dw = \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz = \left( \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx} \right) dx + \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} \right) dy.$$

Приравнивая другъ другу коэффициенты при  $dx$  и  $dy$  въ этихъ двухъ значеніяхъ  $dw$ , получаемъ уравненія:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dx} &= \frac{dw}{du} \left( \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right) + \frac{dw}{dv} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} \right), \\ \frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} &= \frac{dw}{du} \left( \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right) + \frac{dw}{dv} \left( \frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} \right), \end{aligned}$$

дающія возможность выразить  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  въ функціи отъ  $\frac{dw}{du}$  и  $\frac{dw}{dv}$ . Другія производныя, входящія въ ихъ выраженія, именно  $\frac{dw}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dz}$ ,  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{dz}$ , ..., должны быть рассматриваемы какъ данныя, такъ какъ  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — извѣстныя функціи отъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Такъ же составляемъ двѣ формулы для  $d^2w$ :

$$\begin{aligned} d^2w &= \frac{d^2w}{du^2} du^2 + 2 \frac{d^2w}{dudv} dudv + \frac{d^2w}{dv^2} dv^2 + \frac{dw}{du} d^2u + \frac{dw}{dv} d^2v, \\ d^2w &= \frac{d^2w}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2w}{dxdy} dxdy + \frac{d^2w}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2w}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2w}{dzdx} dzdx + 2 \frac{d^2w}{dydz} dydz + \frac{dw}{dz} dz^2. \end{aligned}$$

Если замѣнить  $du$ ,  $dv$ ,  $d^2u$ ,  $d^2v$  и  $d^2z$  ихъ выраженіями въ функціи отъ  $dx$  и  $dy$ , то обѣ формулы примутъ видъ:

$$d^2w = Pdx^2 + 2Qdxdy + Rdy^2.$$

Пользуясь теперь ихъ тождественностью, напомнимъ три уравненія, изъ которыхъ  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$  и  $\frac{d^2z}{dy^2}$  могутъ быть вычислены въ функціи отъ производныхъ  $w$ , взятыхъ по  $u$  и  $v$ . Мы не будемъ останавливаться на этихъ слишкомъ сложныхъ и не интересныхъ выкладкахъ.

### ПРИМѢРЫ

#### § 180. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

замѣнивъ въ немъ три прямоугольныя координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  тремя новыми прямоугольными координатами  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , связанными съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$x' = ax + by + cz, \quad y' = a'x + b'y + c'z, \quad z' = a''x + b''y + c''z,$$



при чемъ девять коэффициентовъ  $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$  связаны между собою известными соотношеніями, которымъ удовлетворяютъ косинусы угловъ, образуемыхъ попарно осями обѣихъ прямоугольныхъ системъ. Замѣтимъ, что соотношенія, связывающія прежнія переменныя съ новыми, всѣ первой степени, — поэтому  $dx', dy', dz'$  будутъ постоянными одновременно съ  $dx, dy, dz$ ; значитъ, мы въ правѣ писать:

$$\begin{aligned} d^2v &= \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2v}{dz^2} dz^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dxdy + 2 \frac{d^2v}{dxdz} dxdz + 2 \frac{d^2v}{dydz} dydz, \\ d^2v &= \frac{d^2v}{dx'^2} dx'^2 + \frac{d^2v}{dy'^2} dy'^2 + \frac{d^2v}{dz'^2} dz'^2 + 2 \frac{d^2v}{dx'dy'} dx'dy' + 2 \frac{d^2v}{dx'dz'} dx'dz' + 2 \frac{d^2v}{dy'dz'} dy'dz'; \end{aligned}$$

кромѣ того,

$$dx' = a dx + b dy + c dz, \quad dy' = a' dx + b' dy + c' dz, \quad dz' = a'' dx + b'' dy + c'' dz.$$

Подставляемъ эти значенія во вторую часть предыдущаго уравненія и приравниваемъ другъ другу коэффициенты при подобныхъ членахъ въ обоихъ выраженіяхъ  $d^2v$ , тождественно равныхъ между собою вслѣдствіе произвольности  $dx, dy, dz$ ; находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= a^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + a'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + a''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2aa' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2aa'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2a'a'' \frac{d^2v}{dz'dy'}, \\ \frac{d^2v}{dy^2} &= b^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + b''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2bb' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2bb'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2b'b'' \frac{d^2v}{dz'dy'}, \\ \frac{d^2v}{dz^2} &= c^2 \frac{d^2v}{dx'^2} + c'^2 \frac{d^2v}{dy'^2} + c''^2 \frac{d^2v}{dz'^2} + 2cc' \frac{d^2v}{dx'dy'} + 2cc'' \frac{d^2v}{dx'dz'} + 2c'c'' \frac{d^2v}{dz'dy'}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, принимая во вниманіе соотношенія, связывающія девять коэффициентовъ, имѣемъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{d^2v}{dx'^2} + \frac{d^2v}{dy'^2} + \frac{d^2v}{dz'^2}.$$

### § 181. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2},$$

въ которомъ  $v$  обозначаетъ какую-угодно функцію отъ  $x$  и  $y$ , замѣнивъ  $x$  и  $y$  переменными  $r$  и  $\theta$ , связанными съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

равносильныхъ

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctang \frac{y}{x}.$$

Имѣемъ.

$$d^2v = \frac{d^2v}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2v}{dxdy} dxdy + \frac{d^2v}{dy^2} dy^2,$$

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2} dr^2 + 2 \frac{d^2v}{drd\theta} drd\theta + \frac{d^2v}{d\theta^2} d\theta^2 + \frac{dv}{dr} d^2r + \frac{dv}{d\theta} d^2\theta;$$

кромѣ того,

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}, \quad d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

$$d^2r = \frac{(dx^2 + dy^2)r - \frac{(xdx + ydy)^2}{r}}{r^2} = \frac{(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) - (xdx + ydy)^2}{r^3} = \frac{(xdy - ydx)^2}{r^3},$$

$$d^2\theta = \frac{-2(xdx + ydy)(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{(y^2 - x^2)dxdy - xy(dy^2 - dx^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

и, слѣдовательно,

$$d^2v = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{(xdx + ydy)^2}{r^2} + 2 \frac{d^2v}{drd\theta} \frac{(x^2 - y^2)dxdy + xy(dy^2 - dx^2)}{r^3} +$$

$$+ \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{(xdy - ydx)^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{(xdy - ydx)^2}{r^3} + \frac{dv}{d\theta} 2 \frac{(y^2 - x^2)dxdy - xy(dy^2 - dx^2)}{r^4}.$$

Приравнивая другъ другу коэффициенты при  $dx^2$  и  $dy^2$  въ обоихъ выраженіяхъ  $d^2v$ , пишемъ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{x^2}{r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{d^2v}{drd\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{y^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{y^2}{r^3} + \frac{2xy}{r^4} \frac{dv}{d\theta},$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} \frac{y^2}{r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{d^2v}{drd\theta} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{x^2}{r^4} + \frac{dv}{dr} \frac{x^2}{r^3} - \frac{2xy}{r^4} \frac{dv}{d\theta},$$

откуда

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{d^2v}{d\theta^2} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr}.$$

## § 182. Преобразовать выраженіе:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

сдѣлавъ переходъ отъ координатъ  $x, y, z$  къ полярнымъ  $\rho, \theta, \psi$ , связаннымъ съ первыми посредствомъ равенствъ:

$$z = \rho \cos \theta, \quad x = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \psi.$$

Вводимъ сначала вспомогательную переменную  $r$ , равную произведению  $\rho \sin \theta$ ; тогда  $\rho$  и  $\psi$  замѣняютъ вполне  $x$  и  $y$ , и такъ какъ

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi,$$

то по предыдущему получимъ:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr};$$

значитъ, заданное выраженіе приметъ видъ:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{d^2 v}{dz^2}.$$

Замѣтимъ теперь, что  $r$  и  $z$ , при данномъ  $\psi$ , будутъ двумя прямоугольными координатами, относительно которыхъ  $\rho$  и  $\theta$  можно принять за полярныя, т.-е. написать:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 v}{dr^2} = \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho}. \quad (A)$$

Остается вычислить  $\frac{dv}{dr}$ ; не слѣдуетъ забывать, что при вычисленіи этой производной  $\psi$  и  $z$  рассматриваются какъ постоянныя;  $v$  въ такомъ случаѣ зависитъ отъ  $\rho$  и  $\theta$  и

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{dv}{d\theta} \frac{d\theta}{dr}.$$

Далѣе, такъ какъ  $z$  постоянно, уравненіе  $\rho \sin \theta = z$  даетъ:

$$-\rho \sin \theta d\theta + \cos \theta d\rho = 0,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho \tan \theta.$$

Кромѣ того, изъ уравненія  $\rho \sin \theta = r$  выводимъ:

$$d\rho \sin \theta + \rho \cos \theta d\theta = dr,$$

что на основаніи предыдущаго равенства можетъ быть написано въ видѣ:

$$d\rho \sin \theta + \frac{\cos \theta d\rho}{\tan \theta} = dr, \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{dr} = \sin \theta.$$

Наконецъ, заключаемъ:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\sin \theta}{\rho \tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{dv}{dr} \sin \theta + \frac{dv \cos \theta}{\rho};$$

уравненіе (A), послѣ замѣны въ немъ  $r$  и  $\frac{dv}{dr}$  ихъ значеніями, переходитъ въ уравненіе:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{d^2 v}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dv}{d\rho}.$$

§ 183. Приложимъ общіе методы къ тому случаю, когда прямолинейные координаты  $x, y, z$  замѣняются тремя переменными  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , которымъ Лямэ, часто и плодотворно ими пользовавшійся, далъ названіе *системы криволинейныхъ координатъ*.

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = \rho, \quad \varphi_1(x, y, z) = \rho_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = \rho_2$$

будутъ уравненія трехъ системъ поверхностей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ и дѣлящихъ пространство на безчисленное множество безконечно-малыхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ; каждой системѣ значеній параметровъ  $\rho, \rho_1, \rho_2$  соотвѣтствуютъ три поверхности, которыя, по предположенію, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ въ точкѣ, такъ же хорошо опредѣляемой значеніями  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , какъ и значеніями  $x, y, z$ . Эти параметры образуютъ *систему криволинейныхъ координатъ*.

Лямэ съ большою пользою ввелъ въ вычисленія, относящіяся къ этой теоріи, три функціи  $h, h_1, h_2$ , опредѣляемыя изъ уравненій:

$$\begin{aligned} h^2 &= \left( \frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2, \\ h_1^2 &= \left( \frac{d\rho_1}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_1}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_1}{dz} \right)^2, \\ h_2^2 &= \left( \frac{d\rho_2}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_2}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_2}{dz} \right)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Эти функціи не измѣняются, въ чемъ не трудно убѣдиться, отъ замѣны координатъ  $x, y, z$  другими прямолинейными прямоугольными координатами. Это, впрочемъ, вытекаетъ непосредственно изъ того, что  $\frac{d\rho}{h}, \frac{d\rho_1}{h_1}, \frac{d\rho_2}{h_2}$  представляютъ (§ 125) ребра параллелепипеда, ограниченнаго шестью поверхностями, соотвѣтствующими значеніямъ  $\rho, \rho + d\rho, \rho_1, \rho_1 + d\rho_1, \rho_2, \rho_2 + d\rho_2$  нашихъ параметровъ; измѣренія же такого параллелепипеда не могутъ измѣняться вмѣстѣ съ направленіемъ осей.



Замѣтивъ это, постараемся сначала выразить производныя отъ  $x, y, z$ , взятыхъ по  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , въ функціи отъ производныхъ  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , взятыхъ по  $x, y, z$ . Пишемъ:

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{d\rho}{dx} dx + \frac{d\rho}{dy} dy + \frac{d\rho}{dz} dz, \\ d\rho_1 &= \frac{d\rho_1}{dx} dx + \frac{d\rho_1}{dy} dy + \frac{d\rho_1}{dz} dz, \\ d\rho_2 &= \frac{d\rho_2}{dx} dx + \frac{d\rho_2}{dy} dy + \frac{d\rho_2}{dz} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Чтобы вывести изъ этихъ уравненій производныя отъ  $x, y, z$ , взятыхъ по  $\rho, \rho_1, \rho_2$ , рѣшаемъ ихъ относительно дифференціаловъ  $dx, dy, dz$ . Если принять во вниманіе, что  $\frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dz}, \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dx}, \dots$  суть косинусы угловъ, составляемыхъ (§ 96) съ осями координатъ нормальми къ тремъ нашимъ поверхностямъ, которыя, по предположенію, образуютъ прямоугольную систему, то увидимъ, что для рѣшенія уравненій (2) достаточно ихъ сложить, предварительно умноживъ въ послѣдовательномъ порядкѣ сначала на  $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx}$ , затѣмъ на  $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy}$  и, наконецъ, на  $\frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz}, \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz}, \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz}$ . Такимъ образомъ находимъ:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx} d\rho_2, \\ dy &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy} d\rho_2, \\ dz &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz} d\rho + \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz} d\rho_1 + \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz} d\rho_2 \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, по § 57-му

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dx}, & \frac{dx}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dx}, \\ \frac{dy}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dy}, & \frac{dy}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dy}, \\ \frac{dz}{d\rho} &= \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_1} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{d\rho_1}{dz}, & \frac{dz}{d\rho_2} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{d\rho_2}{dz}. \end{aligned}$$

Впрочемъ, эти формулы можно доказать непосредственно. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что произведеніе  $\frac{dx}{d\rho} d\rho$  представляетъ бесконечно-малое приращеніе перемѣнной  $x$ , когда при  $\rho_1$  и  $\rho_2$  постоянныхъ  $\rho$  получаетъ приращеніе  $d\rho$ . Значитъ, это произведеніе есть проекція на ось  $X$ -овъ бесконечно-малой нормали, содержащейся между поверхностями, соответствующими параметрамъ  $\rho$  и  $\rho + d\rho$ , и равной (§ 125) по длинѣ  $\frac{d\rho}{h}$ . А такъ

какъ косинусъ угла, составляемаго этою нормалью съ осью X-овъ, выражается (§ 96) произведениемъ  $\frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}$ , то

$$\frac{dx}{d\rho} d\rho = \frac{1}{h^2} d\rho \frac{d\rho}{dx},$$

или, по сокращеніи на  $d\rho$ ,

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx}$$

§ 184. Вычислимъ теперь въ функціи отъ координатъ  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  сумму

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2},$$

которой Лямэ далъ названіе *параметра второго порядка функціи v*.

Прежде всего этотъ параметръ выражается легко черезъ такіе же параметры отъ переменныхъ  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ . Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{d\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{d\rho_2}{dx}, \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{d^2v}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\rho_1^2} \left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \frac{d^2v}{d\rho_2^2} \left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + 2 \frac{d^2v}{d\rho_1 d\rho_2} \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dx} + 2 \frac{d^2v}{d\rho_2 d\rho} \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dx} + \\ &+ 2 \frac{d^2v}{d\rho d\rho_1} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dx} + \frac{dv}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{d^2\rho_2}{dx^2}, \end{aligned}$$

такъ же составляемъ  $\frac{d^2v}{dy^2}$  и  $\frac{d^2v}{dz^2}$ ; складывая всѣ эти вторыя производныя и принимая во вниманіе, что поверхности взаимно-перпендикулярны, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} &= h^2 \frac{d^2v}{d\rho^2} + h_1^2 \frac{d^2v}{d\rho_1^2} + h_2^2 \frac{d^2v}{d\rho_2^2} + \frac{dv}{d\rho} \left( \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} \right) + \\ &+ \frac{dv}{d\rho_1} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + \frac{dv}{d\rho_2} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right); \end{aligned}$$

слѣдовательно, параметръ второго порядка функціи  $v$  выраженъ въ функціи отъ  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и отъ параметровъ этихъ трехъ функцій, которые мы теперь и постараемся отыскать.

§ 185. Поверхности, выражаемыя уравненіями:  $\rho = \text{const.}$ ,  $\rho_1 = \text{const.}$ ,  $\rho_2 = \text{const.}$ , пересѣкаются взаимно подъ прямымъ угломъ, независимо отъ значеній тѣхъ постоянныхъ, которымъ приравнены  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , и косинусы угловъ, образуемыхъ тремя ихъ нормальми въ какой-нибудь точкѣ съ осями X, Y, Z, будутъ:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dx}, & \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dy}, & \frac{1}{h} \frac{d\rho}{dz}, \\ \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dx}, & \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dy}, & \frac{1}{h_1} \frac{d\rho_1}{dz}, \\ \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dx}, & \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dy}, & \frac{1}{h_2} \frac{d\rho_2}{dz}. \end{array}$$

Между этими девятью количествами, какъ между косинусами угловъ, образуемыхъ попарно осями двухъ прямоугольныхъ системъ, существуютъ слѣдующія весьма извѣстныя соотношенія:

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dz} \right),$$

$$\frac{d\rho}{dy} = \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dx} \right),$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dy} \right),$$

$$\frac{d\rho_1}{dx} = \frac{h_1}{h h_2} \left( \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d\rho}{dy} - \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d\rho}{dz} \right),$$

$$\frac{d\rho_1}{dy} = \frac{h_1}{h h_2} \left( \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dz} - \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d\rho}{dx} \right),$$

$$\frac{d\rho_1}{dz} = \frac{h_1}{h h_2} \left( \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d\rho}{dx} - \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d\rho}{dy} \right),$$

$$\frac{d\rho_2}{dx} = \frac{h_2}{h h_1} \left( \frac{d\rho}{dz} \frac{d\rho_1}{dy} - \frac{d\rho}{dy} \frac{d\rho_1}{dz} \right),$$

$$\frac{d\rho_2}{dy} = \frac{h_2}{h h_1} \left( \frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dz} - \frac{d\rho}{dz} \frac{d\rho_1}{dx} \right),$$

$$\frac{d\rho_2}{dz} = \frac{h_2}{h h_1} \left( \frac{d\rho}{dy} \frac{d\rho_1}{dx} - \frac{d\rho}{dx} \frac{d\rho_1}{dy} \right).$$

Выводимъ изъ этихъ формулъ  $\frac{d^2\rho}{dydx}$  и  $\frac{d^2\rho}{dx dy}$ , дифференцируя  $\frac{d\rho}{dx}$  по  $y$ , а затѣмъ  $\frac{d\rho}{dy}$  по  $x$ , и полученные результаты приравниваемъ другъ другу:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d^2\rho_1}{dz dy} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d^2\rho_1}{dy^2} \frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2\rho_2}{dy^2} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d^2\rho_2}{dy dz} \right) + \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d\rho_2}{dz} \right) = \\ & = \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d^2\rho_1}{dz dx} \frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d^2\rho_2}{dx dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2\rho_2}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} \left( \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d\rho_2}{dx} \right), \end{aligned}$$

или же, перенеся всѣ члены въ первую часть и придавъ и вычтя, для большей симметріи, еще нѣкоторые, взаимно уничтожающіеся, напишемъ:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{h_1 h_2} \left[ \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) \right] + \\ & + \frac{h}{h_1 h_2} \left[ \left( \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} + \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d}{dy} \frac{d\rho_1}{dz} + \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} \right) - \left( \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d}{dy} \frac{d\rho_2}{dz} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d}{dz} \frac{d\rho_2}{dz} \right) \right] + \\ & + \left[ \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d\rho_2}{dx} \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_2}{dy} \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_2}{dz} \frac{d}{dz} \frac{h}{h_1 h_2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left( \frac{d\rho_1}{dx} \frac{d}{dx} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_1}{dy} \frac{d}{dy} \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d}{dz} \frac{h}{h_1 h_2} \right) \right] = 0; \end{aligned}$$

на основаніи же формулъ § 183-го, а также равенства:

$$\frac{d \frac{d\rho_1}{dz} \frac{dx}{d\rho_2}}{\frac{dx}{d\rho_2}} + \frac{d \frac{d\rho_1}{dz} \frac{dy}{d\rho_2}}{\frac{dy}{d\rho_2}} + \frac{d \frac{d\rho_1}{dz} \frac{dz}{d\rho_2}}{\frac{dz}{d\rho_2}} = \frac{d \frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2}$$

это уравненіе перейдетъ въ слѣдующее:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1 h_2} \left[ \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dz} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dz}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dz}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dz} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dz} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Точно такъ же получимъ два другихъ:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_1 h_2} \left[ \frac{d\rho_1}{dy} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dy} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dy}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dy}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dy} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dy} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0, \\ \frac{h}{h_1 h_2} \left[ \frac{d\rho_1}{dx} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) - \frac{d\rho_2}{dx} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + h_2^2 \frac{d \frac{d\rho_1}{dx}}{d\rho_2} - h_1^2 \frac{d \frac{d\rho_2}{dx}}{d\rho_1} \right] + \\ + \frac{d\rho_1}{dx} h_2^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_2} - \frac{d\rho_2}{dx} h_1^2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{d\rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Умноживъ эти три уравненія соотвѣтственно на  $\frac{d\rho_1}{dx}$ ,  $\frac{d\rho_1}{dy}$ ,  $\frac{d\rho_1}{dz}$  и сложивъ, найдемъ, послѣ всѣхъ упрощеній,

$$\frac{1}{h_2^2} \left( \frac{d^2\rho_2}{dx^2} + \frac{d^2\rho_2}{dy^2} + \frac{d^2\rho_2}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h h_1}{h_2}}{d\rho_2} = 0.$$

Такъ же, умноживъ ихъ на  $\frac{d\rho_2}{dz}$ ,  $\frac{d\rho_2}{dy}$ ,  $\frac{d\rho_2}{dx}$ , найдемъ:

$$\frac{1}{h_1^2} \left( \frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h h_2}{h_1}}{d\rho_1} = 0;$$

точно такимъ же образомъ:

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2} \right) + \frac{d \log \frac{h_1 h_2}{h}}{d\rho} = 0.$$



Принимая во вниманіе эти уравненія, можемъ теперь выраженіе  $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}$ , найденное въ § 184-мъ, написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = & h^2 \left( \frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{dv}{d\rho} \frac{h_1 h_2}{h} \frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} \right) + h_1^2 \left( \frac{d^2v}{d\rho_1^2} + \frac{dv}{d\rho_1} \frac{h_2 h}{h_1} \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h_2 h} \right) + \\ & + h_2^2 \left( \frac{d^2v}{d\rho_2^2} + \frac{dv}{d\rho_2} \frac{h h_1}{h_2} \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h h_1} \right), \end{aligned}$$

или, что то же самое, въ видѣ:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = h h_1 h_2 \left( \frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} \frac{dv}{d\rho} + \frac{d}{d\rho_1} \frac{h_1}{h_2 h} \frac{dv}{d\rho_1} + \frac{d}{d\rho_2} \frac{h_2}{h h_1} \frac{dv}{d\rho_2} \right).$$

Если  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  — полярныя координаты, такъ что взаимно-перпендикулярныя поверхности суть сферы, то, замѣняя  $\rho_1$  и  $\rho_2$  черезъ  $\theta$  и  $\psi$ , которыми обыкновенно выражаются двѣ угловыя координаты, имѣемъ:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos \theta, \\ x &= \rho \sin \theta \cos \psi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \psi; \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \psi &= \arctang \frac{y}{x}, \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

Такъ какъ разстояніе между двумя безконечно-близкими точками есть

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2,$$

то

$$h = 1, \quad h_1 = \frac{1}{\rho}, \quad h_2 = \frac{1}{\rho \sin \theta}.$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \sin \theta \frac{dv}{d\rho} \right) + \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \frac{d}{d\psi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{dv}{d\psi} \right) \right],$$

что вполне совпадаетъ съ результатомъ, найденнымъ въ § 182-мъ.

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что при  $x = \cos t$  уравнение  $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$  перейдетъ въ  $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$ .
2. Преобразовать уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

полагая  $x + y = \alpha$ ,  $x - y = \beta$  и рассматривая  $z$  какъ функцію отъ  $\alpha$  и  $\beta$ .

3. Если  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , то, полагая

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t, \quad u = px + qy - z$$

и принимая  $p$  и  $q$  за независимыя переменныя, будемъ имѣть:

$$\frac{du}{dp} = x, \quad \frac{du}{dq} = y, \quad \frac{d^2 u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dp dq} = \frac{-s}{rt - s^2}, \quad \frac{d^2 u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

4. Если  $\varphi(x, y, z) = \rho$ ,  $\varphi_1(x, y, z) = \rho_1$ ,  $\varphi_2(x, y, z) = \rho_2$  — уравненія трехъ группъ взаимно-перпендикулярныхъ поверхностей и, следовательно,  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , образуютъ систему криволинейныхъ координатъ, то опредѣлитель системы функцій  $\rho$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , составленный по переменнымъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , отъ которыхъ онѣ зависятъ, равенъ произведенію  $hh_1h_2$ , въ которомъ буквы имѣютъ значеніе, указанное въ § 183-мъ.

5. Если  $\rho^2$ ,  $\rho_1^2$ ,  $\rho_2^2$  — три всегда вещественныхъ корня уравненія:

$$1 = \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2},$$

то, полагая

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}, \quad du_1 = \frac{d\rho_1}{\sqrt{-(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}}, \quad du_2 = \frac{d\rho_2}{\sqrt{(\rho_2^2 - b^2)(\rho_2^2 - c^2)}}$$

заключаемъ, что уравненіе:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

равносильно

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2) \frac{d^2 v}{du^2} + (\rho^2 - \rho_2^2) \frac{d^2 v}{du_1^2} + (\rho^2 - \rho_1^2) \frac{d^2 v}{du_2^2} = 0.$$

6. Если положить

$$\sqrt{l+x} + \frac{y}{2} = u, \quad \sqrt{l-x} - \frac{y}{2} = v, \quad z = \frac{z_1}{\sqrt{l-x}},$$

182

то уравненіе:

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = (l - x) \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}$$

перейдетъ въ

$$\frac{d^2 z_1}{du dv} = - \frac{z_1}{4(u + v)}.$$

---

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### Составленіе дифференціальныхъ уравненій

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

§ 186. Всякое уравненіе, представляющее зависимость между функціею и ея производными, называютъ *дифференціальнымъ уравненіемъ*. Мы уже имѣли случай (§ 146) пользоваться дифференціальными уравненіями для разысканія производныхъ отъ нѣкоторыхъ функцій. Уравненія этого рода есть одинъ изъ важнѣйшихъ отдѣловъ математики, подлежащихъ нашему изслѣдованію.

Тѣмъ, что функція отъ нѣкоторой перемѣнной дана, еще не опредѣляется дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ эта функція. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе  $y = \varphi(x)$ ; дифференцируя его, пишемъ:  $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ ; всякая комбинація этихъ двухъ уравненій дастъ соотношеніе между  $x$ ,  $y$  и  $\frac{dy}{dx}$ , т.-е. дифференціальное уравненіе, которому  $y$  удовлетворитъ. Такъ, напр., дифференцируя функцію:

$$y = e^{2x},$$

находимъ:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x};$$

эти же два уравненія даютъ соотношенія:

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad \frac{dy}{dx} + y = 3e^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5ye^{2x}, \quad y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{5}{2} y \frac{dy}{dx},$$

къ которымъ можно, очевидно, прибавить безчисленное множество другихъ. Если въ этихъ уравненіяхъ принимать  $y$  за неизвѣстную, то они будутъ имѣть общее рѣ-



шеніе  $y = e^{2x}$ ; кромѣ того, каждое изъ нихъ можетъ имѣть и, дѣйствительно, имѣетъ безчисленное множество другихъ рѣшеній.

§ 187. Можно поставить себѣ задачею комбинировать уравненіе, опредѣляющее функцію, съ уравненіемъ, изъ котораго узнается производная этой самой функціи, такимъ образомъ, чтобы удовлетворить нѣкоторому условію, имѣющемуся въ виду при дальнѣйшемъ изслѣдованіи. Неопредѣленностью подобнаго дѣйствія пользуются, напр., для удаленія изъ даннаго выраженія функціи, не желательной въ дифференціальномъ уравненіи, какъ-то радикала, синуса, показательной функціи, и т. п.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$y = [\varphi(x)]^m.$$

Выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = m\varphi'(x) [\varphi(x)]^{m-1};$$

слѣдовательно, по исключеніи  $\varphi(x)^m$ ,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{m\varphi'(x)}{\varphi(x)}.$$

Если дано, напр., уравненіе:

$$y = \sqrt{1-x^2},$$

то

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = -\frac{x}{1-x^2},$$

гдѣ уже нѣтъ радикала.

Пусть будетъ еще

$$y = \sin \varphi(x).$$

Выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x);$$

исключая тригонометрическія функціи  $\sin \varphi(x)$  и  $\cos \varphi(x)$ , находимъ:

$$y^2 + \frac{1}{\varphi'(x)^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 1.$$

Можно много привести подобныхъ примѣровъ, но мы здѣсь лишь еще разъ напомнимъ, что дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ данная функція, по самой природѣ своей неопредѣленно. Вотъ почему, какъ мы только-что видѣли, можно самый видъ его подчинить извѣстнымъ условіямъ.

#### ИСКЛЮЧЕНІЕ ПОСТОЯННЫХЪ

§ 188. Если функція содержитъ въ своемъ выраженіи произвольную постоянную, то можно составить дифференціальное уравненіе безъ этой постоянной, которому данная функція будетъ однако удовлетворять. Задача всегда возможна и опредѣленна. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе:

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

въ которомъ  $a$  обозначаетъ произвольную постоянную. Дифференцируемъ его:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} = 0; \quad (2)$$

исключая  $a$  изъ уравненій (1) и (2), находимъ искомое дифференціальное уравненіе. Это уравненіе можно найти и другимъ путемъ: стоитъ только, напр., рѣшить уравненіе (1) относительно  $a$  и, представивъ его подъ видомъ:

$$\varphi(x, y) = a,$$

продифференцировать; тогда постоянная исключится непосредственно и получится уравненіе:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Вообще, прежде чѣмъ приступить къ дифференцированію, данное уравненіе можно преобразовать какимъ-угодно образомъ; исключеніе постоянной  $a$  можетъ быть произведено посредствомъ весьма различныхъ выкладокъ, но конечный результатъ будетъ одинъ и тотъ же во всѣхъ случаяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда намъ дано:

$$F(x, y, a) = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $a$ —произвольно, мы въ правѣ выбрать по своему желанію значеніе для  $x$  и соотвѣтственное значеніе для  $y$ , а разъ выборъ сдѣланъ, уравненіе (1) опредѣлитъ  $a$  и не будетъ болѣе ничего произвольнаго въ выраженіи  $y$  черезъ  $x$ ; значитъ,  $\frac{dy}{dx}$  является вполне опредѣленнымъ. Такъ какъ производная  $\frac{dy}{dx}$  опредѣленна при данныхъ  $x$  и  $y$ , то соотношеніе, связывающее  $x$ ,  $y$  и  $\frac{dy}{dx}$ , очевидно, также опредѣленное и должно являться однимъ и тѣмъ же при всякомъ способѣ полученія.

§ 189. Когда уравнение съ двумя переменными  $x$  и  $y$  содержит нѣсколько произвольныхъ постоянныхъ, ихъ можно исключить и составить дифференціальное уравненіе, въ которое онѣ болѣе не входятъ, но за то придется ввести ровно столько послѣдовательныхъ производныхъ отъ  $y$ , сколько было постоянныхъ.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $C_1, C_2, \dots, C_n$  обозначаютъ произвольныя постоянныя. Дифференцируя  $n$  разъ подъ рядъ, составимъ  $n$  новыхъ уравненій, которыя вмѣстѣ съ даннымъ дадутъ возможность исключить  $n$  постоянныхъ. Но той же цѣли мы можемъ достигнуть многими другими путями. Въ самомъ дѣлѣ, можно преобразовать уравненіе (1) до дифференцированія; можно также преобразовать какимъ-угодно способомъ тѣ изъ уравненій, которыя вытекаютъ изъ дифференцированія уравненія (1), подставляя до новаго еще дифференцированія на мѣсто какого-нибудь одного изъ нихъ результатъ его комбинированія со всѣми предшествующими. Можно, напр., исключить постоянную  $C_1$  изъ уравненія (1) и его производной, затѣмъ исключить  $C_2$  изъ полученнаго такимъ образомъ дифференціального уравненія и его производной, и такъ продолжать до тѣхъ поръ, пока не будутъ исключены всѣ постоянныя. Весьма замѣчательно, что всѣ эти методы хотя и требуютъ сильно различающихся между собою выкладокъ, но приводятъ къ одному и тому же конечному результату. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ уравненіе (1) содержитъ  $n$  различныхъ постоянныхъ произвольныхъ, то можно, при данномъ значеніи  $x$ , выбрать по своему желанію соотвѣтственныя значенія для  $y$  и его  $(n-1)$  первыхъ производныхъ  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ . Но эти  $n$  условій опредѣляютъ  $n$  постоянныхъ, и  $y$  является опредѣленною функціею отъ  $x$ ; слѣдовательно, производная  $\frac{d^ny}{dx^n}$  — опредѣленна. Такъ какъ эта  $n$ -ая производная опредѣленна при данныхъ

$x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ , то уравненіе, связывающее ее съ этими количествами, также опредѣленно и должно являться однимъ и тѣмъ же при всякомъ способѣ его полученія.

§ 190. Чтобы дать примѣръ исключенія постоянныхъ, составимъ дифференціальное уравненіе третьяго порядка, которому удовлетворяетъ функція  $y$ , опредѣляемая изъ уравненія:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

выражающаго всѣ круги, нанесенные на плоскости.

Дифференцируемъ три раза:

$$\begin{aligned} (y-b) \frac{dy}{dx} + x-a &= 0, \\ (y-b) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 &= 0, \\ (y-b) \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} &= 0; \end{aligned}$$

исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій  $(y - b)$ , находимъ:

$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{dy}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 0,$$

что и представляетъ искомое дифференціальное уравненіе.

#### ИСКЛЮЧЕНІЕ ПОСТОЯННЫХЪ ВЪ УРАВНЕНІИ СЪ НѢСКОЛЬКИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ

§ 191. Дифференцированіе даетъ возможность точно такъ же исключить постоянныя изъ уравненія, въ которое входитъ функція отъ нѣсколькихъ переменныхъ, какъ и въ случаѣ только съ одною независимою переменною.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0,$$

опредѣляющее  $z$ , какъ функцію отъ  $x, y$  и отъ двухъ постоянныхъ произвольныхъ. Дифференцируя по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , получаемъ два уравненія, которыя вмѣстѣ съ даннымъ даютъ возможность исключить  $a$  и  $b$ .

Вводя производныя второго порядка,  $\frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dx dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}$ , мы можемъ исключить пять постоянныхъ; вводя производныя третьяго порядка, исключили бы девять постоянныхъ, и т. д.

§ 192. Существуетъ весьма важное различіе между уравненіями, полученными такъ, какъ только что указано, и уравненіями, вытекающими изъ исключенія постоянныхъ въ уравненіяхъ только съ одною независимою переменною. Дѣйствительно, въ этомъ послѣднемъ случаѣ полученное уравненіе имѣетъ ту же степень общности, какъ и данное, и можетъ всецѣло его замѣнять. Точно такъ же, какъ оно было выведено изъ перваго, это послѣднее можетъ быть выведено изъ него, какъ изъ исходнаго. Это—теорема интегральнаго исчисленія, доказательства которой здѣсь привести мы не можемъ, но которая будетъ разобрана нами позднѣе; впрочемъ, можно видѣть теперь же, что все это совершенно иначе въ случаѣ двухъ или нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ: уравненіе въ частныхъ производныхъ отъ функціи гораздо болѣе общее, чѣмъ то, изъ котораго оно получено.

Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ уравненіе вида:

$$\varphi(x, y, a, b, z) = 0. \quad (1)$$

Беря послѣдовательныя производныя по  $x$  и по  $y$ , мы можемъ составить два уравненія перваго порядка, три второго, четыре третьяго, и т. д. Такимъ образомъ, если понадобится ввести производныя второго порядка, то у насъ будетъ шесть уравненій между  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \frac{d^2 z}{dx dy}$ , которыя, по исключеніи постоян-



ныхъ  $a$  и  $b$ , дадутъ четыре уравненія между этими различными количествами. Изъ дифференціального же уравненія между  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ , наоборотъ, мы можемъ получить только два уравненія второго порядка, дифференцируя по  $x$  и по  $y$ . Присоединивъ сюда данное, будемъ имѣть только три уравненія вмѣсто четырехъ; слѣдовательно, разсматривая производныя до второго порядка включительно, видимъ, что уравненіе (1) подчиняетъ ихъ большому числу условій, чѣмъ дифференціальное уравненіе, выводимое изъ (1). Различіе усилится, если перейдемъ къ производнымъ третьяго порядка. Данное уравненіе, дифференцированное по  $x$  и по  $y$  до третьяго порядка включительно, дастъ десять соотношеній между  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^3z}{dx^2 dy}, \frac{d^3z}{dy^2 dx}, \frac{d^3z}{dy^3}$  и двумя постоянными; такимъ образомъ будетъ восемь соотношеній, независимыхъ отъ постоянныхъ, между  $x, y, z$  и производными отъ  $z$  до третьяго порядка включительно. Беря же за исходную точку дифференціальное уравненіе, освобожденное отъ постоянныхъ, выводимъ два уравненія второго порядка и три третьяго, что составитъ всего шесть соотношеній между тѣми же производными, которыя первообразное уравненіе подчиняетъ восьми соотношеніямъ. Одно это сближеніе показываетъ, что дифференціальное уравненіе предоставляетъ функціи  $z$  болѣе просторъ, чѣмъ первообразное.

§ 193. Можно доказать другимъ путемъ, что уравненіе, полученное посредствомъ исключенія обѣихъ постоянныхъ  $a$  и  $b$  изъ уравненія:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1)$$

и его производныхъ, допускаетъ безчисленное множество рѣшеній, не содержащихся въ первообразномъ уравненіи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0 \quad (2)$$

будетъ такое дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяетъ, по предположенію, функція  $z$ , выведенная изъ уравненія (1), каковы бы ни были значенія постоянныхъ  $a$  и  $b$ . Прежде всего замѣтимъ, что поверхности, представляемыя уравненіемъ (1), имѣютъ огибающую, которой каждая изъ нихъ касается въ точкѣ; уравненіе этой огибающей поверхности получается чрезъ исключеніе  $a$  и  $b$  изъ уравненія (1) и его производныхъ по постояннымъ  $a$  и  $b$ . Пусть

$$\psi(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

есть результатъ такого исключенія. Уравненіе (3) даетъ для  $z$  выраженіе въ  $x$  и  $y$ , удовлетворяющее уравненію (2), потому что въ каждой точкѣ огибающей поверхности количества  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$  имѣютъ тѣ же значенія, какъ и для той изъ огибаемыхъ поверхностей, которой она касается въ этой точкѣ, а потому соотношеніе (2), имѣющее мѣсто для всѣхъ точекъ всѣхъ огибаемыхъ поверхностей, будетъ имѣть мѣсто и для огибающей поверхности.

Но можно получить безчисленное множество другихъ уравненій, которыя точно такъ же будутъ обладать свойствомъ уравненія (3). Въ самомъ дѣлѣ, зададимъ между постоянными  $a$  и  $b$  произвольное соотношеніе  $b = f(a)$ , тогда уравненіе (1) приметъ видъ:

$$\varphi[x, y, z, a, f(a)] = 0 \quad (4)$$

и будетъ содержать всего одинъ параметръ  $a$ , вслѣдствіе чего оно представитъ рядъ поверхностей, огибающая которыхъ касается каждой изъ нихъ не въ одной только точкѣ, а по нѣкоторой линіи. Уравненіе этой огибающей явится результатомъ исключенія  $a$  изъ уравненія (4) и его производной по  $a$ , и очевидно, что такимъ образомъ получится уравненіе новой поверхности, для каждой точки которой  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$  будутъ тѣ же, что и для соотвѣтственно выбранной точки на одной изъ первоначально данныхъ поверхностей; слѣдовательно, уравненіе (2) удовлетворится функціею  $z$ , выведенною изъ этого новаго соотношенія. А такъ какъ введеніе произвольной функціи  $f(a)$  даетъ возможность получить безчисленное множество различныхъ результатовъ, то, значитъ, уравненіе (1) очень далеко, какъ мы и предвидѣли, отъ общаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія, которое изъ него выводится.

§ 194. Пусть, напр., дано:

$$z = ax + by; \quad (1)$$

выводимъ:

$$\frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dy} = b;$$

слѣдовательно,

$$z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}. \quad (2)$$

Чтобы найти другія рѣшенія уравненія (2), полагаемъ  $b = \varphi(a)$  и исключаемъ  $a$  изъ уравненія:

$$z = ax + y\varphi(a). \quad (3)$$

и его производной:

$$0 = x + y\varphi'(a). \quad (4)$$

Изъ уравненія (4) заключаемъ, что  $a$  есть функція отъ  $\frac{y}{x}$  и, слѣдовательно, исключеніе  $a$  приводитъ уравненіе (3) къ виду:

$$z = x F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (5)$$

гдѣ  $F$  есть функція, видъ которой зависитъ отъ функціи  $\varphi$ ; въ самомъ дѣлѣ, легко показать, что, какова бы ни была функція  $F$ , уравненіе (5) удовлетворяетъ дифференціальному уравненію (2). Дѣйствительно, выводимъ изъ уравненія (5):

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} F'\left(\frac{y}{x}\right), \quad \frac{dz}{dy} = F'\left(\frac{y}{x}\right),$$

и, слѣдовательно,

$$z = x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy}.$$

Поверхности, представляемыя уравненіемъ (1), будутъ здѣсь плоскости, проходящія черезъ начало. Задавая соотношеніе между обѣими постоянными, получаемъ уравненіе плоскости, движущейся вокругъ начала по произвольному закону и эта плоскость огибаетъ конусъ, уравненіе котораго удовлетворяетъ дифференціальному уравненію совокупности его касательныхъ плоскостей.

§ 195. Предыдущее рѣшеніе всецѣло покоится на геометрическихъ разсужденіяхъ, но можно доказать непосредственно, не обращаясь къ теоріи поверхностей, что уравненіе, получаемое чрезъ исключеніе  $a$  изъ

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0 \quad (1)$$

и

$$\frac{dF[x, y, z, a, \varphi(a)]}{da} = 0, \quad (2)$$

дастъ, между  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ ,  $x, y, z$ , то же самое соотношеніе, что и уравненіе:

$$F(x, y, z, a, b) = 0.$$

Чтобы на самомъ дѣлѣ исключить  $a$  изъ уравненій (1) и (2), нужно вывести изъ второго значеніе  $a$  въ функціи отъ  $x, y, z$  и подставить его въ первое, а чтобы получить въ уравненіи, вытекающемъ изъ такого исключенія,  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , нужно продифференцировать уравненіе (1) по  $x$  и по  $y$ , принявъ во вниманіе, что  $a$ , бывшее постояннымъ, является теперь переменнымъ. Такимъ образомъ будетъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} + \frac{dF}{da} \frac{da}{dy} = 0,$$

но выраженіе для  $a$  таково, что мы имѣемъ тождественно  $\frac{dF}{da} = 0$ , и предыдущія уравненія приводятся, поэтому, къ уравненіямъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dy} = 0;$$

точно такія же уравненія получаются и при  $a$  постоянномъ. Два же эти уравненія можно такъ скомбинировать, чтобы исключить изъ нихъ и изъ даннаго оба количества  $a$  и  $\varphi(a)$ , являющіяся переменными. Вычисленія будутъ абсолютно тѣ же самыя, какъ и въ томъ случаѣ, когда эти количества были постоянными и назывались  $a$  и  $b$ ; значитъ, и результатъ будетъ точно такой же, что и требовалось доказать.

§ 196. Предыдущія разсужденія могутъ быть обобщены. Если разсматривать функцію отъ  $n$  независимыхъ переменныхъ, связанную съ этими  $n$  переменными уравненіемъ, содержащимъ  $n$  постоянныхъ произвольныхъ, то можно исключить эти  $n$  постоянныхъ изъ даннаго уравненія и производныхъ перваго порядка, взятыхъ по  $n$  независимымъ переменнымъ; такимъ образомъ составитъ дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое, каковы бы ни были постоянныя, будетъ удовлетворяться функціей, опредѣляемой даннымъ уравненіемъ, и, кромѣ того, безчисленнымъ множествомъ другихъ выводимыхъ изъ нея функцій.

Пусть будетъ дано уравненіе:

$$0 = F(u, x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (1)$$

Предположимъ, что между  $n$  постоянными  $C_1, C_2, \dots, C_n$  выбрано произвольное ихъ число  $p$  и что эти выбранныя разсматриваются, какъ произвольныя функціи отъ всѣхъ остальныхъ, такъ что уравненіе (1) содержитъ только  $n - p$  постоянныхъ; если продифференцировать это уравненіе по этимъ  $n - p$  постояннымъ, въ послѣдовательномъ порядкѣ, то можно исключить эти постоянныя изъ составленныхъ такимъ образомъ уравненій и даннаго; результатъ такого исключенія будетъ уравненіе между  $u, x_1, x_2, \dots, x_n$ ; функція  $u$ , опредѣляемая изъ этого соотношенія, видъ котораго зависитъ отъ введенныхъ нами произвольныхъ функцій, удовлетворитъ тому же дифференціальному уравненію, какъ и первоначально данная функція, содержащая  $n$  постоянныхъ.

Дѣйствительно, разсмотримъ  $C_1, C_2, \dots, C_p$  въ уравненіи (1) какъ произвольныя функціи отъ остальныхъ постоянныхъ и продифференцируемъ его по постояннымъ  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ ; такимъ образомъ у насъ будетъ  $n - p$  уравненій. Изъ этихъ уравненій выводимъ  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ , чтобы подставить ихъ въ данное уравненіе, которое будетъ тогда содержать только  $u, x_1, x_2, \dots, x_n$ . Можно утверждать, что производныя  $\frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \dots, \frac{du}{dx_n}$  и функція  $u$  будутъ имѣть, для данныхъ значеній переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , точно такія же выраженія въ функціи отъ  $x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ , какъ и въ томъ случаѣ, когда буквы  $C_1, C_2, \dots, C_n$  были постоянными. Въ самомъ дѣлѣ, если мы послѣ замѣны въ уравненіи (1)  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$  ихъ значеніями станемъ его дифференцировать для полученія  $\frac{du}{dx_1}$ , то намъ придется



принять во вниманіе, что буквы  $C_1, C_2, \dots, C_n$  не обозначаютъ болѣе постоянныхъ, но представляютъ функціи отъ  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ , которыя сами содержатъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Уравненіе, полученное посредствомъ дифференцированія по  $x_1$ , будетъ тогда:

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du} \frac{du}{dx_1} + \frac{dF}{dC_{p+1}} \frac{dC_{p+1}}{dx_1} + \dots + \frac{dF}{dC_n} \frac{dC_n}{dx_1} = 0,$$

но, по предположенію, выраженія  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$  даютъ тождественно:

$$\frac{dF}{dC_{p+1}} = 0, \quad \frac{dF}{dC_{p+2}} = 0, \dots, \quad \frac{dF}{dC_n} = 0,$$

и уравненіе приводится къ

$$\frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{du} \frac{du}{dx_1} = 0;$$

совершенно то же самое получается при  $C_1, C_2, \dots, C_n$  постоянныхъ.

Поэтому, соотношенія между  $u, x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{du}{dx_1}, \frac{du}{dx_2}, \dots, \frac{du}{dx_n}, C_1, C_2, \dots, C_n$  тѣ же самыя, что и при  $C_1, C_2, \dots, C_n$  постоянныхъ, и, слѣдовательно, хотя  $C_1, C_2, \dots, C_p$  являются функціями отъ  $C_{p+1}, C_{p+2}, \dots, C_n$ , а эти послѣднія количества, въ свою очередь, функціями отъ  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ихъ можно исключить совершенно одинаково въ обоихъ случаяхъ, потому что результатъ исключенія не зависитъ отъ обозначенія исключаемой буквы. Итакъ, всегда будетъ одно и то же соотношеніе между функціею  $u$ , переменными, отъ которыхъ она зависитъ, и ея производными по этимъ переменнымъ.

Чтобы придать результату наибольшую степень возможной общности, полагаютъ произвольное число  $p$  равнымъ  $n - 1$ .

Пусть, напр., дана функція отъ трехъ переменныхъ:

$$u = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3; \quad (1)$$

исключая постоянныя изъ этого уравненія и его производныхъ по  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , находимъ:

$$x_1 \frac{du}{dx_1} + x_2 \frac{du}{dx_2} + x_3 \frac{du}{dx_3} = u. \quad (2)$$

Пусть

$$C_2 = \varphi(C_1), \quad C_3 = \psi(C_1);$$

если исключимъ  $C_1$  изъ уравненій:

$$\begin{aligned} u &= C_1 x_1 + x_2 \varphi(C_1) + x_3 \psi(C_1), \\ 0 &= x_1 + x_2 \varphi'(C_1) + x_3 \psi'(C_1), \end{aligned} \quad (3)$$

то получимъ уравненіе между  $x_1, x_2, x_3$  и  $u$ , содержащее двѣ произвольныя функціи  $\varphi$  и  $\psi$ , и притомъ такое, что функція  $u$ , опредѣляемая изъ него, удовлетворяетъ уравненію (2).

Каковы бы ни были функціи  $\varphi$  и  $\psi$ , изъ (3) выводимъ:

$$C_1 = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

слѣдовательно,  $u$  есть однородная функція первой степени вида:

$$u = x_1 F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

легко убѣдиться, что эта функція удовлетворяетъ уравненію (2).

#### ИСКЛЮЧЕНІЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХЪ ФУНКЦІЙ

§ 197. Предыдущіе выводы позволяютъ думать, что дифференцированіе даетъ возможность не только исключить постоянныя, но и избавиться отъ произвольныхъ функцій въ уравненіи, которое ихъ содержитъ. Сейчасъ мы докажемъ, что это дѣйствительно такъ, и сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній относительно такого исключенія.

Здѣсь не можетъ быть и рѣчи о функціяхъ съ одною только переменною. Присутствіе въ уравненіи, опредѣляющемъ такую функцію, еще нѣкоторой произвольной функціи превратило бы первую въ совершенно произвольную и, значить, не было бы мѣста спеціальному изслѣдованію.

Разсмотримъ случай, гдѣ функція  $z$  зависитъ отъ двухъ независимыхъ переменныхъ  $x$  и  $y$ . Произвольныя функціи, входящія въ уравненіе, связывающее  $x, y$  и  $z$ , могутъ быть двухъ сортовъ. Разсматриваемое уравненіе можетъ заключать, подъ знакомъ произвольной функціи, данную функцію отъ  $x, y$  и  $z$ ; такъ, напр., въ уравненіи:

$$x + y + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$$

$\varphi$  обозначаетъ произвольную функцію отъ суммы  $x^2 + y^2 + z^2$ . Въ другихъ случаяхъ уравненіе содержитъ одну или нѣсколько произвольныхъ функцій отъ количествъ, выраженіе которыхъ въ  $x, y, z$  измѣняется вмѣстѣ съ самимъ видомъ функцій, такъ какъ они опредѣляются изъ прочихъ уравненій, куда входятъ тѣ же функціи съ своими производными; такъ, напр., въ системѣ:

$$\begin{aligned} z &= (x + \alpha)[y + \varphi(\alpha)], \\ x + \varphi(\alpha) + (y + \alpha)\varphi'(\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

исключеніе  $\alpha$  дастъ между  $x, y$  и  $z$  соотношеніе, которое, очевидно, зависитъ отъ вида, выбраннаго для произвольной функціи  $\varphi(\alpha)$ , но  $\alpha$  можетъ быть выражено въ

функции отъ  $x$ ,  $y$  и  $z$  только въ томъ случаѣ, если задана эта функция  $\varphi$ . Такъ, напр., полагая  $\varphi(\alpha) = \alpha$ , находимъ:

$$\alpha = \frac{x + y}{2},$$

а принимая  $\varphi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ , выводимъ:

$$\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}};$$

значитъ, функция  $\varphi$  ведетъ, въ обоихъ случаяхъ, къ весьма различнымъ выраженіямъ.

Ясно, что если уравненіе, связывающее  $z$  съ  $x$  и  $y$ , содержитъ  $n$  произвольныхъ функций  $\varphi_1(\alpha_1)$ ,  $\varphi_2(\alpha_2)$ , ...,  $\varphi_n(\alpha_n)$ , то нужно для ихъ исключенія имѣть еще  $n$  другихъ уравненій, содержащихъ тѣ же самыя функции, при чемъ туда могутъ входить какъ ихъ производныя, такъ и самыя переменныя  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_n$ .

Напр., три уравненія:

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x)\psi'(\beta) + \psi(\beta)\varphi'(x), \\ x &= \varphi(x) + \psi(\beta), \\ y &= \varphi'(x) + \psi'(\beta) \end{aligned}$$

даютъ, между  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соотношеніе, зависящее отъ вида функций  $\varphi$  и  $\psi$ .

**§ 198.** Рассмотримъ сначала простѣйшій случай, когда произвольная функция берется отъ данной функции переменныхъ  $x$ ,  $y$  и  $z$  и когда заданное уравненіе имѣетъ видъ:

$$v = \varphi(u), \quad (1)$$

при чемъ  $v$  и  $u$  данныя функции отъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а  $\varphi$ —произвольная функция.

Беря производную отъ уравненія (1) по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx} &= \varphi'(u) \left( \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \right), \\ \frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy} &= \varphi'(u) \left( \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy} \right); \end{aligned}$$

для первое изъ этихъ уравненій на второе, пишемъ:

$$\frac{\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dx}}{\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dz}{dy}} = \frac{\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx}}{\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{dz}{dy}},$$

или

$$\frac{dz}{dx} \left( \frac{du}{dy} \frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz} \frac{dv}{dy} \right) + \frac{dz}{dy} \left( \frac{dv}{dx} \frac{du}{dz} - \frac{dv}{dz} \frac{du}{dx} \right) = \frac{du}{dx} \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy} \frac{dv}{dx}.$$

Итакъ, каковы бы ни были функціи  $u$  и  $v$ , это уравненіе содержитъ частныя производныя  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  въ первой степени.

§ 199. Разсмотримъ, во-вторыхъ, болѣе общій случай, когда функція  $z$  опредѣляется системою  $k+1$  уравненій между  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $k$  произвольными функціями, которыя должны быть исключены вмѣстѣ съ переменными, отъ которыхъ онѣ зависятъ.

Пусть  $\varphi_1(\alpha_1)$ ,  $\varphi_2(\alpha_2)$ , ...,  $\varphi_k(\alpha_k)$  будутъ тѣ  $k$  произвольныхъ функцій, которыя могутъ входить вмѣстѣ со своими производными въ  $k+1$  данныхъ уравненій; начнемъ съ вычисленія частныхъ производныхъ  $\frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dy}$ ,  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2}$ , ..., въ функціи отъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и функцій  $\varphi_1(\alpha_1)$ ,  $\varphi_2(\alpha_2)$ , ...,  $\varphi_k(\alpha_k)$  съ ихъ производными. Для этого продифференцируемъ сначала всѣ уравненія по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , и составимъ такимъ образомъ  $2(k+1)$  новыхъ уравненій, содержащихъ, вмѣстѣ съ  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , производныя по  $x$  и по  $y$  отъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_k$ . Значитъ, мы можемъ исключить эти производныя и вычислить  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ . Производныхъ второго порядка отъ  $k+1$  данныхъ уравненій будетъ  $3(k+1)$ ; онѣ содержатъ, сверхъ  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$ , производныя перваго и втораго порядка отъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ...,  $\alpha_k$ . Если замѣнить въ нихъ производныя перваго порядка,  $\frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dy}$ ,  $\frac{d\alpha_1}{dx}$ ,  $\frac{d\alpha_1}{dy}$ , ..., ихъ значеніями, выведенными изъ предыдущихъ уравненій, и затѣмъ исключить  $3k$  производныхъ второго порядка  $\frac{d^2\alpha_1}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2\alpha_1}{dxdy}$ ,  $\frac{d^2\alpha_1}{dy^2}$ , ..., то останется три уравненія, изъ которыхъ можно вывести  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dxdy}$  и  $\frac{d^2z}{dy^2}$ . Точно такъ же можно опредѣлить производныя отъ  $z$  какого-угодно порядка. Ихъ выраженія будутъ содержать, вмѣстѣ съ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , функціи  $\varphi_1(\alpha_1)$ ,  $\varphi_2(\alpha_2)$ , ...,  $\varphi_k(\alpha_k)$  и производныя отъ этихъ функцій, которыя войдутъ посредствомъ дифференцированія. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что если уравненіе содержитъ функцію  $\varphi(\alpha)$ , то производная отъ этого уравненія, по той или по другой изъ независимыхъ переменныхъ  $x$  и  $y$ , будетъ содержать  $\varphi'(\alpha)$ ; второе дифференцированіе введетъ  $\varphi''(\alpha)$ , и т. д. Слѣдовательно, вычисленные по этому способу производныя отъ  $z$  до  $n$ -го порядка включительно будутъ содержать  $k$  функцій  $\varphi_1(\alpha_1)$ ,  $\varphi_2(\alpha_2)$ , ...,  $\varphi_k(\alpha_k)$  и ихъ производныя порядка ниже  $(n+1)$ -го, что составитъ всего  $(n+1)k$  функцій, подлежащихъ исключенію для полученія искомага соотношенія между  $z$  и его производными. Всѣхъ производныхъ функцій отъ  $z$ , до  $n$ -го порядка, вмѣстѣ съ самою функціею  $z$  будетъ  $\frac{n(n+1)}{2}$  и, слѣдовательно, каково бы ни было  $k$ , можно выбрать  $n$  достаточно большимъ, чтобы

$$\frac{n(n+1)}{2} > (n+1)k.$$

Въ такомъ случаѣ число уравненій превзойдетъ число исключаемыхъ количествъ и самое исключеніе всегда будетъ возможно.

§ 200. Если функція  $\varphi(\alpha)$  входитъ въ уравненіе, производная отъ этого уравненія по  $x$  или по  $y$  всегда содержитъ  $\varphi'(\alpha)$ . Отсюда вытекаетъ, что, вообще, всякая



производная отъ  $z$  будетъ содержать такую производную отъ функции  $\varphi$ , которая не входитъ въ производныя низшаго порядка. Но въ нѣкоторыхъ исключительныхъ случаяхъ эта новая функция, введенная посредствомъ дифференцированія, исчезаетъ при исключеніяхъ и не входитъ уже въ конечный результатъ.

Пусть будутъ даны, напр., уравненія:

$$z = \frac{[y - \varphi(x)]^2}{\varphi'(x)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Дифференцируя эти уравненія по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , пишемъ:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-2[y - \varphi(x)]\varphi'(x)^2 - \varphi''(x)[y - \varphi(x)]^2}{\varphi'(x)^2} \frac{d\alpha}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2[y - \varphi(x)] \left[ 1 - \varphi'(x) \frac{d\alpha}{dy} \right] \varphi'(x) - [y - \varphi(x)]^2 \varphi''(x) \frac{d\alpha}{dy}}{\varphi'(x)^2},$$

$$1 + \frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\varphi'(x)^2 \frac{d\alpha}{dx} - \varphi''(x)[y - \varphi(x)] \frac{d\alpha}{dx}}{\varphi'(x)^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\left[ 1 - \varphi'(x) \frac{d\alpha}{dy} \right] \varphi'(x) - \varphi''(x) \frac{d\alpha}{dy} [y - \varphi(x)]}{\varphi'(x)^2}.$$

Изъ двухъ послѣднихъ равенствъ выводимъ:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\varphi'(x)^2}{-2\varphi'(x)^2 - [y - \varphi(x)]\varphi''(x)},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\varphi'(x)}{2\varphi'(x)^2 + [y - \varphi(x)]\varphi''(x)},$$

а послѣ подстановки этихъ значеній въ остальные два равенства получаемъ:

$$\frac{dz}{dx} = y - \varphi(x),$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}.$$

Итакъ, производная  $\varphi''(x)$  хотя и входитъ въ уравненія, служащія для опредѣленія производныхъ перваго порядка  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , но однако исчезаетъ въ окончательномъ ихъ выраженіи.

**§ 201.** Важно отмѣтить, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, особый случай, когда вычисленіе производныхъ отъ  $z$  не вводитъ новыхъ производныхъ отъ произвольныхъ функций, содержащихся въ данныхъ уравненіяхъ. Чтобы понять, какія слѣдствія

включить за собою это обстоятельство въ занимающей насъ теоріи, докажемъ слѣдующую теорему:

Если функція  $z$  опредѣляется двумя уравненіями вида:

$$\left. \begin{aligned} y &= F_1[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)], \\ z &= F_2[x, \alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $F_1$  и  $F_2$  — данныя функціи, а  $\varphi(\alpha)$  — произвольная функція и исключеніе функціи  $\varphi(\alpha)$  возможно между производными перваго порядка  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , то уравненіе между  $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ , къ которому оно приводитъ, первой степени относительно  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , всякій разъ какъ производныя  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  содержатъ въ своемъ выраженіи функцію  $\varphi''(\alpha)$ .

Для упрощенія положимъ  $\frac{dz}{dx} = p, \frac{dz}{dy} = q$ , имѣя въ виду отличить такимъ образомъ производную  $p$  отъ частной производной  $\frac{dF_2}{dx}$ , въ которой  $\alpha$  рассматривается какъ постоянная, тогда какъ при вычисленіи  $p$  за постоянную принимается  $y$ .

Уравненія (1), дифференцированные по  $x$  при  $y$  постоянномъ, даютъ:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{dF_1}{d\alpha} + \frac{dF_1}{dx} \frac{d\alpha}{dx}, \\ p &= \frac{dF_2}{dx} + \frac{dF_2}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ  $\frac{dF_1}{d\alpha}$  и  $\frac{dF_2}{d\alpha}$  представляютъ производныя отъ  $F_1$  и  $F_2$  по буквѣ  $\alpha$ , рассматриваемой какъ переменная всюду, куда она входитъ въ ихъ выраженіяхъ, т.-е. одинаково какъ въ тѣхъ членахъ, гдѣ она встрѣчается одна, такъ и подъ знаками  $\varphi(\alpha)$  и  $\varphi'(\alpha)$ .

Приравнивая другъ другу значенія частной производной  $\frac{d\alpha}{dx}$ , выведенныя изъ уравненій (2), находимъ:

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_2}{d\alpha} \cdot \frac{\frac{dF_1}{d\alpha}}{\frac{dF_1}{dx}};$$

дифференцируя уравненія (1) по  $y$  при  $x$  постоянномъ, получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{dF_1}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy}, \\ q &= \frac{dF_2}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned} \right\}$$

и, слѣдовательно,

$$q = \frac{\frac{dF_2}{dx}}{\frac{dF_1}{dx}}.$$

Вообще, эти выраженія для  $p$  и  $q$  будутъ содержать  $\varphi''(x)$ , такъ какъ эта производная *обязательно* входитъ и въ  $\frac{dF_1}{dx}$ , и въ  $\frac{dF_2}{dx}$ : она можетъ исчезнуть только случайно, являясь общимъ множителемъ для обѣихъ производныхъ. Но если этого нѣтъ, то  $\varphi''(x)$  можно исключить не иначе, какъ вмѣстѣ съ дробью  $\frac{\frac{dF_2}{dx}}{\frac{dF_1}{dx}}$ , которая только одна и содержитъ эту производную; результатъ такого исключенія необходимо будетъ:

$$p = \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dx} q.$$

Если существуетъ соотношеніе между  $x, y, z, p, q$ , то возможно далѣе исключить  $\alpha, \varphi(\alpha)$  и  $\varphi'(\alpha)$  между этимъ уравненіемъ и двумя заданными, не содержащими ни  $p$ , ни  $q$ , такъ что результатъ необходимо будетъ линейнымъ относительно  $p$  и  $q$ .

Уравненія:

$$z = \frac{[y - \varphi(x)]^2}{\varphi'(x)},$$

$$x + \alpha = \frac{y - \varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

приводятъ къ соотношенію:

$$r = pq,$$

не линейному относительно  $p$  и  $q$ . Дѣйствительно, производныя  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , которыя мы изъ нихъ выводимъ, не содержатъ  $\varphi''(x)$ , какъ того и требуетъ предыдущая теорема.

#### УРАВНЕНІЯ ВЪ ЧАСТНЫХЪ ПРОИЗВОДНЫХЪ РАЗЛИЧНЫХЪ КЛАССОВЪ ПОВЕРХНОСТЕЙ

**§ 202.** Мы рассмотримъ послѣдовательно главные классы поверхностей, изслѣдованныхъ геометрами. Приложение методовъ, которымъ посвящена эта глава, даетъ возможность исключать произвольныя функціи, входящія въ общее уравненіе поверхностей, и получать такимъ образомъ дифференціальное уравненіе, характеризующее каждый классъ.

**Цилиндрическія поверхности.**—Цилиндрическая поверхность образуется движениемъ прямой, параллельно нѣкоторой неподвижной прямой. Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= az + \alpha, \\ y &= bz + \beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будутъ уравненія движущейся прямой, гдѣ  $a$  и  $b$  — двѣ постоянныя, а  $\alpha$  и  $\beta$  — двѣ переменныя, связанныя уравненіемъ, такъ какъ безъ этого условія прямая могла бы проходить черезъ всѣ точки пространства и законъ ея движенія пересталъ бы быть опредѣленнымъ.

Итакъ, предположимъ, что

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad (2)$$

при чемъ функція  $\varphi$  — вполнѣ произвольна и частный видъ ея отличаетъ одну цилиндрическую поверхность отъ другой. Исключая  $\alpha$  и  $\beta$  изъ уравненій (1) и (2), получаемъ:

$$y - bz = \varphi(x - az); \quad (3)$$

это — общее уравненіе цилиндрическихъ поверхностей.

Дифференцируя это уравненіе по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , находимъ:

$$\begin{aligned} -b \frac{dz}{dx} &= \varphi'(x - az) \left(1 - a \frac{dz}{dx}\right), \\ 1 - b \frac{dz}{dy} &= -a \varphi'(x - az) \frac{dz}{dy}; \end{aligned}$$

исключая же произвольную функцію  $\varphi'(x - az)$  и дѣлая приведеніе, выводимъ:

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1, \quad (4)$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе всѣхъ цилиндрическихъ поверхностей, производящія которыхъ — параллельны данной прямой. Оно выражаетъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, что касательная плоскость въ каждой точкѣ — параллельна этой прямой.

Чтобы исключить  $a$  и  $b$  и получить свойство, общее всѣмъ цилиндрическимъ поверхностямъ и не зависящее отъ направленія производящихъ, нужно продифференцировать уравненіе (4) по  $x$ , затѣмъ по  $y$ ; находимъ:

$$a \frac{d^2z}{dx^2} + b \frac{d^2z}{dx dy} = 0, \quad a \frac{d^2z}{dx dy} + b \frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$



и, слѣдовательно,

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2};$$

это уравненіе соотвѣтствуетъ всѣмъ цилиндрическимъ поверхностямъ, но оно соотвѣтствуетъ также, какъ мы увидимъ, и безчисленному множеству другихъ поверхностей.

**§ 203. Коническія поверхности** — Коническая поверхность образуется движеніемъ прямой, проходящей черезъ неподвижную точку. Если  $\alpha, \beta, \gamma$  — координаты такой точки, то уравненія вращающейся прямой будутъ вида:

$$\left. \begin{aligned} x - \alpha &= m(z - \gamma), \\ y - \beta &= n(z - \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $m$  и  $n$  связаны уравненіемъ, такъ какъ безъ этого условія прямая могла бы проходить черезъ всѣ точки пространства и законъ ея движенія пересталъ бы быть опредѣленнымъ. Итакъ, предположимъ, что

$$m = \varphi(n), \quad (2)$$

при чемъ функція  $\varphi$  — произвольна и видъ ея отличаетъ одну коническую поверхность отъ другой. Исключая  $m$  и  $n$  изъ (1) и (2), находимъ общее уравненіе коническихъ поверхностей:

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = \varphi\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right); \quad (3)$$

дифференцируемъ это уравненіе по  $x$ , затѣмъ по  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{(z - \gamma) - \frac{dz}{dx}(x - \alpha)}{(z - \gamma)^2} &= -\varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) \frac{dz}{dx} \frac{y - \beta}{(z - \gamma)^2}, \\ -\frac{(x - \alpha) \frac{dz}{dy}}{(z - \gamma)^2} &= \varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) \frac{(z - \gamma) - \frac{dz}{dy}(y - \beta)}{(z - \gamma)^2}; \end{aligned}$$

исключивъ отсюда  $\varphi'\left(\frac{y - \beta}{z - \gamma}\right)$  и сдѣлавъ приведенія, получимъ:

$$(x - \alpha) \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{dz}{dy} = z - \gamma. \quad (4)$$

что представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ коническихъ поверхностей, вершина которыхъ имѣетъ координатами  $\alpha, \beta, \gamma$ ; оно выражаетъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, что всѣ касательныя плоскости проходятъ черезъ вершину конуса.

Чтобы исключить  $\alpha, \beta, \gamma$  и получить свойство, общее всѣмъ коническимъ поверхностямъ и не зависящее отъ положенія вершины, нужно продифференцировать уравненіе (4) по  $x$ , затѣмъ по  $y$ ; находимъ:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{d^2z}{dydx} + (x - \alpha) \frac{d^2z}{dx^2}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{dz}{dy} + (x - \alpha) \frac{d^2z}{dxdy} + (y - \beta) \frac{d^2z}{dy^2},\end{aligned}$$

и, слѣдовательно, по уничтоженіи общихъ членовъ и исключеніи отношенія  $\frac{y - \beta}{x - \alpha}$ ,

$$\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2};$$

это уравненіе уже было найдено для цилиндрическихъ поверхностей.

**§ 204. Поверхности вращенія.** — Поверхности вращенія образуются вращеніемъ линіи, безъ измѣненія ея вида, вокругъ неподвижной прямой такимъ образомъ, что каждая изъ ея точекъ описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ этой прямой и центръ его расположенъ на ней.

Пусть

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

будутъ уравненія неподвижной прямой, служащей осью поверхности. Любой изъ этихъ круговъ можетъ быть разсмотрѣнъ, какъ пересѣченіе съ плоскостью, перпендикулярною къ прямой, сферы съ центромъ въ произвольной точкѣ этой прямой (напр., въ точкѣ, координаты которой  $x = m, y = n, z = 0$ ). Значитъ уравненія такого круга будутъ вида:

$$\left. \begin{aligned}(x - m)^2 + (y - n)^2 + z^2 &= R^2, \\ ax + by + z &= k,\end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при чемъ существуетъ зависимость между  $k$  и  $R$ , безъ которой кругъ могъ бы проходить черезъ всякую точку пространства и никакой поверхности не получилось бы. Итакъ, предположимъ, что

$$k = \varphi(R^2); \quad (2)$$

исключеніе  $k$  и  $R$  изъ уравненій (1) и (2) даетъ:

$$ax + by + z = \varphi[(x - m)^2 + (y - n)^2 + z^2], \quad (3)$$

что представляетъ общее уравненіе поверхностей вращенія.

Дифференцируемъ это уравненіе по  $x$ , затѣмъ по  $y$ :

$$\begin{aligned} a + \frac{dz}{dx} &= 2\varphi'[(x-m)^2 + (y-n)^2 + z^2] \left[ (x-m) + z \frac{dz}{dx} \right], \\ b + \frac{dz}{dy} &= 2\varphi'[(x-m)^2 + (y-n)^2 + z^2] \left[ (y-n) + z \frac{dz}{dy} \right]; \end{aligned}$$

исключая  $\varphi'$  и дѣлая приведенія, находимъ:

$$a(y-n) - b(x-m) + (y-n - bz) \frac{dz}{dx} + (az - x + m) \frac{dz}{dy} = 0,$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе поверхностей вращенія; оно выражаетъ, что нормаль встрѣчаетъ ось. Если предположить ось поверхности совпадающей съ осью  $z$ -овъ, то

$$a = 0, \quad b = 0, \quad m = 0, \quad n = 0,$$

и дифференціальное уравненіе приметъ видъ:

$$y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = 0;$$

уравненіе въ конечномъ видѣ, въ этомъ случаѣ, есть

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

**§ 205. Конюиды.** — Конюидъ есть поверхность, образуемая движеніемъ нѣкоторой прямой, скользящей по данной прямой параллельно неподвижной плоскости.

Примемъ за неподвижную плоскость, параллельно которой должна перемѣщаться производящая, плоскость  $XU$  и зададимъ уравненіями  $x = mz$ ,  $y = nz$  ту прямую, по которой она скользитъ. Уравненія производящей будутъ вида:

$$z = \gamma, \quad y = \alpha x + \beta;$$

чтобы она встрѣчала направляющую, должно существовать равенство:

$$n\gamma = \alpha m\gamma + \beta,$$

и, слѣдовательно, уравненія производящей примутъ видъ:

$$z = \gamma, \quad y - n\gamma = \alpha(x - m\gamma); \quad (1)$$

чтобы движеніе было опредѣленнымъ, необходима зависимость между  $\alpha$  и  $\gamma$ , — напр., пусть

$$\gamma = \varphi(\alpha); \quad (2)$$

исключая  $\alpha$  и  $\gamma$  изъ уравненій (1) и (2), получаемъ общее уравненіе коноидовъ:

$$z = \varphi \left( \frac{y - nz}{x - mz} \right).$$

Дифференцируя его по  $x$ , затѣмъ по  $y$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{-n \frac{dz}{dx} (x - mz) - (y - nz) \left( 1 - m \frac{dz}{dx} \right)}{(x - mz)^2} \varphi' \left( \frac{y - nz}{x - mz} \right), \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{\left( 1 - n \frac{dz}{dy} \right) (x - mz) + m \frac{dz}{dy} (y - nz)}{(x - mz)^2} \varphi' \left( \frac{y - nz}{x - mz} \right), \end{aligned}$$

откуда, по исключеніи  $\varphi'$  и нѣкоторыхъ приведеній,

$$(x - mz) \frac{dz}{dx} + (y - nz) \frac{dz}{dy} = 0,$$

что представляетъ дифференціальное уравненіе коноидовъ. Если принять за директрису ось  $z$ -овъ, то  $m = 0$ ,  $n = 0$ ; уравненіе въ конечномъ видѣ будетъ:

$$z = \varphi \left( \frac{y}{x} \right),$$

а дифференціальное:

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0.$$

**§ 206.** Дифференціальныя уравненія разсмотрѣнныхъ поверхностей до сихъ поръ были перваго порядка; тѣ поверхности, которыя намъ остается еще изслѣдовать, имѣютъ дифференціальныя уравненія второго и третьяго порядка; для упрощенія введемъ слѣдующее обозначеніе, обычное въ вопросахъ, относящихся къ теоріи поверхностей.

Если уравненіе поверхности есть

$$z = \varphi(x, y),$$

то будемъ полагать

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dxdy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

и, слѣдовательно,

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, \\ d^2z &= r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2, \\ \frac{dp}{dx} &= r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t. \end{aligned}$$



§ 207. Поверхность, образуемая движением некоторой прямой, скользящей по неподвижной прямой.—Примем за неподвижную прямую ось  $z$ -овъ; уравненія производящей—вида:

$$y = \gamma x, \quad z = ax + b.$$

Чтобы эта прямая образовала опредѣленную поверхность, нужно, чтобы  $a$  и  $b$  были данными функциями отъ  $\gamma$ ; полагая

$$a = \varphi(\gamma), \quad b = \psi(\gamma),$$

пишемъ уравненія производящей въ видѣ:

$$y = \gamma x, \quad z = x\varphi(\gamma) + \psi(\gamma), \quad (1)$$

откуда, по исключеніи  $\gamma$ ,

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right); \quad (2)$$

это—общее уравненіе разсматриваемыхъ поверхностей; оно содержитъ двѣ произвольныя функціи. Для исключенія  $\varphi$  и  $\psi$  можно было бы, согласно изложенному методу, составить производныя отъ уравненія (2) по  $x$  и по  $y$ , но проще и изящнѣе продифференцировать уравненія (1), считая  $x$  и  $y$  за переменныя, а  $\gamma$  за постоянную. Это приводитъ къ разсмотрѣнію на поверхности двухъ бесконечно-близкихъ точекъ, расположенныхъ на одной и той же производящей; такимъ образомъ получаемъ:

$$dy = \gamma dx, \quad dz = \varphi(\gamma) dx. \quad (3)$$

Въ послѣднемъ уравненіи замѣняемъ  $dz$  черезъ  $pdx + qdy$ , затѣмъ дѣлимъ на  $dx$  и, замѣчая, что, по уравненіямъ (3),  $\frac{dy}{dx} = \gamma = \frac{y}{x}$ , находимъ:

$$p + q \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (4)$$

Чтобы двѣ функціи,  $p + q \frac{y}{x}$  и  $\frac{y}{x}$ , зависѣли одна отъ другой, необходимо и достаточно (§ 73), чтобы ихъ опредѣлитель равнялся нулю, а это сводится къ пропорціональности ихъ производныхъ, такъ какъ здѣсь дѣло идетъ о двухъ функціяхъ отъ двухъ переменныхъ; такимъ образомъ, уравненіе (4) равносильно слѣдующему:

$$\frac{\frac{d\left(p + q \frac{y}{x}\right)}{dx}}{\frac{d\left(p + q \frac{y}{x}\right)}{dy}} = \frac{\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dx}}{\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{dy}},$$

т.-е.

$$\frac{r + s \frac{y}{x} - q \frac{y}{x^2}}{s + t \frac{y}{x} + \frac{q}{x}} = -\frac{y}{x},$$

или, послѣ приведенія,

$$ty^2 + 2sxy + rx^2 = 0;$$

это—дифференціальное уравненіе разсматриваемыхъ поверхностей:  $r, s, t$  обозначаютъ здѣсь производныя второго порядка, опредѣленныя выше.

§ 208. Косыя поверхности съ направляющею плоскостью.—Косою поверхностью съ направляющею плоскостью называется поверхность, образуемая движеніемъ прямой параллельно неподвижной плоскости.

Принимаемъ за плоскость  $xy$  неподвижную плоскость, носящую названіе *направляющей плоскости*; уравненія производящей:

$$z = \gamma, \quad y = \alpha x + \beta,$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$ —функции отъ  $\gamma$ , видъ которыхъ опредѣляетъ частную поверхность. Поэтому можно положить

$$\alpha = \varphi(\gamma), \quad \beta = \psi(\gamma);$$

и, значить, общее уравненіе косыхъ поверхностей съ направляющими плоскостями будетъ

$$y = x\varphi(z) + \psi(z); \quad (1)$$

дифференцируемъ это уравненіе, оставляя  $z$  постояннымъ,

$$dy = dx\varphi'(z); \quad (2)$$

кромѣ того, при  $z$  постоянномъ

$$0 = p dx + q dy$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q},$$

а это придастъ уравненію (2) слѣдующій видъ:

$$p + q\varphi'(z) = 0.$$

По этому равенству отношеніе  $\frac{p}{q}$  есть функція отъ  $z$ ; для этого необходимо и

достаточно, какъ мы только-что говорили въ предыдущемъ параграфѣ, чтобы ихъ производныя были пропорціональны, т.-е. чтобы

$$\frac{\frac{d \frac{p}{q}}{dx}}{\frac{d \frac{p}{q}}{dy}} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}},$$

или

$$\frac{qr - sp}{sq - tp} = \frac{\dot{p}}{q},$$

а по освобожденіи отъ знаменателей

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0;$$

это—дифференціальное уравненіе косыхъ поверхностей съ направляющею плоскостью.

**§ 209 Развертывающіяся поверхности.**—Мы опредѣлимъ развертывающуюся поверхность, какъ огибающую положеній подвижной плоскости. Мы уже нашли (§ 112), что уравненіе такой поверхности получается по исключеніи  $\alpha$  изъ двухъ уравненій слѣдующаго вида:

$$z = x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + F(\alpha), \quad (1)$$

$$0 = x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + F'(\alpha). \quad (2)$$

Чтобы исключить произвольныя функціи, дифференцируемъ первое изъ нихъ по  $x$  и принимаемъ во вниманіе второе:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(\alpha); \quad (3)$$

дифференцируя то же уравненіе по  $y$  и принимая во вниманіе второе, находимъ:

$$\frac{dz}{dy} = \psi(\alpha); \quad (4)$$

такъ какъ  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  — функціи отъ одной и той же переменнѣй  $\alpha$ , то можно исключить  $\alpha$  изъ двухъ уравненій (3) и (4) и тогда получится соотношеніе вида:

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dy}\right),$$

т.-е., по принятому нами обозначенію,

$$p = F(q). \quad (5)$$

Чтобы исключить функцию  $F$ , дифференцируемъ уравненіе (5) по  $x$ , затѣмъ по  $y$ :

$$\begin{aligned} r &= F'(q)s, \\ s &= F'(q)l, \end{aligned}$$

откуда

$$r'l = s^2;$$

это—уравненіе въ частныхъ производныхъ развертывающихся поверхностей.

**§ 210.** Всякая развертывающаяся поверхность есть геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривой, называемой ребромъ возврата этой поверхности. Принимая это свойство за опредѣленіе, можно придти къ тому же самому дифференціальному уравненію.

Дѣйствительно, уравненія касательной къ какой-нибудь кривой будутъ:

$$\left. \begin{aligned} v - z &= \frac{dz}{dx}(t - x), \\ u - y &= \frac{dy}{dx}(t - x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $z$  и  $y$  суть функціи отъ  $x$ , опредѣляемыя уравненіями кривой. Такъ какъ буква  $x$  обозначаетъ здѣсь параметръ, то замѣняемъ ее буквою  $\alpha$ ; кромѣ того, для полной аналогіи съ предыдущими задачами замѣняемъ  $t, u, v$ , координаты точки поверхности, буквами  $x, y, z$ , а  $z$  и  $y$  функціями  $\varphi(\alpha)$  и  $\psi(\alpha)$ ; пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} z - \varphi(\alpha) &= \varphi'(\alpha)(x - \alpha), \\ y - \psi(\alpha) &= \psi'(\alpha)(x - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Отсюда нужно исключить  $\alpha$  и произвольныя функціи  $\varphi$  и  $\psi$ .

Дифференцируя оба уравненія (2) по  $x$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - \varphi'(\alpha) \frac{d\alpha}{dx} &= \varphi'(\alpha) \left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \varphi''(\alpha)(x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx}, \\ - \psi'(\alpha) \frac{d\alpha}{dx} &= \psi'(\alpha) \left(1 - \frac{d\alpha}{dx}\right) + \psi''(\alpha)(x - \alpha) \frac{d\alpha}{dx}; \end{aligned}$$

изъ этихъ двухъ уравненій исключаемъ  $\frac{d\alpha}{dx}$ :

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(\alpha) - \frac{\varphi''(\alpha)}{\psi''(\alpha)} \psi'(\alpha);$$

такимъ образомъ,  $\frac{dz}{dx}$  зависитъ только отъ  $\alpha$ . Такъ же увидимъ, что  $\frac{dz}{dy}$  зависитъ тоже только отъ  $\alpha$ . Изъ этого заключаемъ, что существуетъ, какъ и въ **§ 209-мъ** соотношеніе вида:

$$\frac{dz}{dx} = F\left(\frac{dz}{dy}\right),$$



изъ котораго выводимъ, подобно предыдущему,

$$\left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2 = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2}.$$

§ 211. Последнее уравненіе можно получить еще и другимъ путемъ. Касательная плоскость къ развертывающейся поверхности — одна и та же по всей длинѣ производящей. Ищемъ, вообще, условія, при которыхъ одна и та же касательная плоскость къ поверхности имѣла бы безчисленное множество точекъ соприкосновенія.

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ, координаты которой  $x, y, z$ , есть

$$v - z = p(t - x) + q(u - y);$$

при безконечно-маломъ измѣненіи  $x, y, z$ , чтобы плоскость оставалась тою же самою, необходимо, чтобы  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$  не измѣнялись, т.-е. чтобы ихъ дифференціалы равнялись нулю; слѣдовательно, будутъ одновременно равенства:

$$0 = \frac{d^2z}{dx^2} dx - \frac{d^2z}{dx dy} dy, \quad 0 = \frac{d^2z}{dx dy} dx + \frac{d^2z}{dy^2} dy;$$

приравнивая другъ другу оба значенія  $\frac{dy}{dx}$ , находимъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2} \frac{d^2z}{dy^2} = \left(\frac{d^2z}{dx dy}\right)^2. \quad (1)$$

Такимъ образомъ, если касательная плоскость касается поверхности по непрерывной линіи, то предыдущее уравненіе будетъ удовлетворено во всѣхъ точкахъ этой линіи. Съ другой стороны, если поверхность есть геометрическое мѣсто ряда линій, вдоль которыхъ касательная плоскость остается одною и тою же, однимъ словомъ если она — огибающая положеній подвижной плоскости, то уравненіе (1) должно имѣть мѣсто въ какой-угодно точкѣ поверхности, иначе говоря, оно будетъ дифференціальнымъ уравненіемъ этой послѣдней.

Замѣтимъ при этомъ, что геометрическое истолкованіе уравненія (1) весьма просто; въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t},$$

т.-е.

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}};$$

слѣдовательно, оно выражаетъ, что производныя функцій  $p$  и  $q$  пропорціональны и, значитъ, зависятъ одна отъ другой, иными словами, существуетъ соотношеніе вида:

$$p = \varphi(q).$$

Изъ этого соотношенія между двумя коэффициентами уравненія касательной плоскости видно, что если требуется провести къ такой поверхности касательную плоскость параллельно данной, то задача становится вообще невозможною.

§ 212. *Линейчатая поверхность.* — Болѣе общее уравненіе поверхностей, образуемыхъ движеніемъ прямой, является, очевидно, слѣдствіемъ исключенія параметра  $\alpha$  изъ двухъ уравненій вида:

$$\left. \begin{aligned} z &= x\varphi(\alpha) + \alpha, \\ y &= x\psi(\alpha) = \omega(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Дифференцируемъ оба эти уравненія, оставляя  $\alpha$  постоянною; находимъ:

$$\left. \begin{aligned} dz &= \varphi(\alpha) dx, \\ dy &= \psi(\alpha) dx. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

А такъ какъ

$$dz = p dx + q dy, \quad (3)$$

то первое изъ этихъ уравненій, по раздѣленіи на  $dx$  и замѣнѣ производной  $\frac{dy}{dx}$  ея значеніемъ  $\psi(\alpha)$ , перейдетъ въ слѣдующее:

$$p + q\psi(\alpha) = \varphi(\alpha); \quad (4)$$

дифференцируемъ вновь, оставляя  $\alpha$  по-прежнему постоянною; находимъ:

$$dp + dq\psi(\alpha) = 0, \quad (5)$$

т.-е.

$$r dx + s dy + \psi(\alpha)(s dx + t dy) = 0, \quad (6)$$

или, по раздѣленіи на  $dx$  и замѣнѣ производной  $\frac{dy}{dx}$  ея значеніемъ,

$$r + s\psi(\alpha) + \psi(\alpha)[s + t\psi(\alpha)] = 0; \quad (7)$$

дифференцируемъ еще разъ, оставляя  $\alpha$  постоянною и замѣчая при этомъ, что

$$\begin{aligned} dr &= \frac{d^3z}{dx^3} dx + \frac{d^3z}{dx^2 dy} dy, \\ ds &= \frac{d^3z}{dx^2 dy} dx + \frac{d^3z}{dx dy^2} dy, \\ dt &= \frac{d^3z}{dy^2 dx} dx + \frac{d^3z}{dy^3} dy; \end{aligned}$$

находимъ:

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}dx + \frac{d^3z}{dx^2dy}dy\right) + 2\psi(\alpha)\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}dx + \frac{d^3z}{dxdy^2}dy\right) + \\ + \psi(\alpha)^2\left(\frac{d^3z}{dy^2dx}dx + \frac{d^3z}{dy^3}dy\right) = 0; \quad (8)$$

замѣняя производную  $\frac{dy}{dx}$  ея значеніемъ  $\psi(\alpha)$  и исключая затѣмъ  $\psi(\alpha)$  изъ уравненій (7) и (8), получаемъ дифференціальное уравненіе линейчатыхъ поверхностей; это уравненіе—третьяго порядка.

**§ 213. Каналообразныя поверхности.** — Каналообразною поверхностью называется огибающая поверхность различныхъ положеній сферы постояннаго радіуса, центръ которой движется по какой-нибудь кривой. Мы видѣли (§ 113), что уравненіе такой поверхности получается посредствомъ исключенія параметра  $\alpha$  изъ уравненій:

$$(z - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + [x - \psi(\alpha)]^2 = a^2, \quad (1)$$

$$z - \alpha + [y - \varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha) + [x - \psi(\alpha)]\psi'(\alpha) = 0. \quad (2)$$

Чтобы исключить произвольныя функціи  $\varphi$  и  $\psi$ , дифференцируемъ сначала уравненіе (1) по  $x$ , оставляя  $y$  постояннымъ, затѣмъ по  $y$ , оставляя  $x$  постояннымъ. При этихъ обоихъ дифференцированіяхъ члены, происходящіе отъ измѣненія  $\alpha$ , исчезнутъ въ силу уравненія (2).

Такимъ образомъ мы получимъ:

$$(z - \alpha)\frac{dz}{dx} + x - \psi(\alpha) = 0, \quad (3)$$

$$(z - \alpha)\frac{dz}{dy} + y - \varphi(\alpha) = 0; \quad (4)$$

отсюда, замѣчая, что  $\varphi(\alpha)$  необходимо есть функція отъ  $\psi(\alpha)$ , выводимъ:

$$(z - \alpha)\frac{dz}{dx} + x = F\left[(z - \alpha)\frac{dz}{dy} + y\right], \quad (5)$$

гдѣ  $F$  есть новая произвольная функція, видъ которой зависитъ отъ вида  $\varphi(\alpha)$  и  $\psi(\alpha)$ . А такъ какъ уравненія (3) и (4), совмѣстно съ первымъ, даютъ:

$$z - \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

то уравненіе (5) можетъ быть переписано въ видѣ:

$$\frac{a\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + x = F\left[\frac{a\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + y\right]. \quad (6)$$

Чтобы исключить эту функцию  $F$ , нужно продифференцировать предыдущее уравнение по  $x$ , затѣмъ по  $y$ ; исключая же  $F'$  изъ двухъ полученныхъ уравненій и принимая во вниманіе предыдущія обозначенія, получаемъ:

$$a^2(rt - s^2) + a\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \quad (7)$$

Уравненіе (6) выражаетъ геометрическое свойство поверхности, вытекающее непосредственно изъ опредѣленія; въ самомъ дѣлѣ,  $x + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ ,  $y + \frac{aq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$  представляютъ координаты точки на нормали въ разстояніи, равномъ  $a$ , отъ соотвѣтственной точки поверхности. Выведенное соотношеніе между этими двумя координатами показываетъ, что геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ есть кривая, а не поверхность, какъ непременно случилось бы, если бы такое построеніе было произведено на поверхности другого рода.

#### ЗАМѢЧАТЕЛЬНОЕ ВВЕДЕНІЕ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО УРАВНЕНІЯ ВЪ ОДНУ АРИѦМЕТИЧЕСКУЮ ЗАДАЧУ

§ 214. Разсмотримъ два какихъ-нибудь числа  $m$  и  $n$ . Составляемъ изъ нихъ два другихъ  $m_1$  и  $n_1$ , служащихъ для первыхъ соотвѣтственно среднимъ ариѦметическимъ и среднимъ геометрическимъ; другими словами, полагаемъ:

$$m_1 = \frac{m+n}{2},$$

$$n_1 = \sqrt{mn};$$

надъ  $m_1$  и  $n_1$  производимъ тѣ же дѣйствія, что и надъ  $m$  и  $n$ , и полагаемъ:

$$m_2 = \frac{m_1+n_1}{2},$$

$$n_2 = \sqrt{m_1 n_1};$$

продолжая безконечно эти дѣйствія, составляемъ рядъ чиселъ  $m_3, n_3, m_4, n_4, \dots$ , которыя, какъ въ этомъ не трудно убѣдиться, идутъ непрерывно сближаясь; требуется найти предѣлъ при безконечномъ повтореніи предыдущихъ дѣйствій.

Эта любопытная задача въ первый разъ была рѣшена Гауссомъ. Впослѣдствіи Борхардтъ связалъ ее весьма изящно съ дифференціальнымъ уравненіемъ при помощи разсужденій, съ которыми мы сейчасъ и познакомимся.

Пусть  $\omega$  есть искомый предѣлъ;  $\omega$ , очевидно, зависитъ отъ  $m$  и  $n$ . Полагаемъ, поэтому,

$$\omega = f(m, n);$$



изъ опредѣленія  $\omega$  вытекаетъ также, что

$$\omega = f(m_1, n_1);$$

кромѣ того, если умножить  $m$  и  $n$  на одно и то же число  $k$ , то всѣ послѣдовательно выведенныя числа  $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$ , не исключая и  $\omega$ , умножатся на  $k$ ; значитъ,  $\omega$  есть однородная функція первой степени отъ  $m$  и  $n$  и, слѣдовательно,

$$\omega = mf\left(\frac{n}{m}\right) = m_1 f\left(\frac{n_1}{m_1}\right) \dots$$

Полагаемъ  $\frac{n}{m} = x$ ,  $\frac{n_1}{m_1} = x_1, \dots$  и обозначаемъ функцію  $f\left(\frac{n}{m}\right)$  черезъ  $\frac{1}{y}$ ; обозначая подобнымъ же образомъ  $f\left(\frac{n_1}{m_1}\right)$  черезъ  $\frac{1}{y_1}$ , имѣемъ, очевидно,

$$y = y_1 \frac{m}{m_1} = \frac{2y_1}{1+x}; \quad (1)$$

далѣе, такъ какъ  $x_1$  связано съ  $x$  уравненіемъ:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}, \quad (2)$$

то изъ уравненія (2) выводимъ:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{1-x}{(1+x)^2 \sqrt{x}} = \frac{(x_1 - x_1^3)(1+x)^2}{2(x-x^3)},$$

и изъ (1):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(1+x)^2} y_1 + \frac{2}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}.$$

замѣняя производную  $\frac{dx_1}{dx}$  ея значеніемъ и освобождаясь отъ знаменателя  $x - x^3$ , получаемъ:

$$(x - x^3) \frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-1)}{1+x} y_1 + (1+x)(x_1 - x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1},$$

откуда, взявъ производныя отъ обѣихъ частей по  $x$ , найдемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d(x-x^3)}{dx} \frac{dy}{dx} &= 2y_1 \frac{d\frac{x(x-1)}{1+x}}{dx} + \frac{2x(x-1)}{1+x} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} + (x_1 - x_1^3) \frac{dy_1}{dx_1} + \\ &+ (1+x) \frac{d(x_1 - x_1^3)}{dx_1} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{dx_1}{dx}. \end{aligned}$$

Не трудно замѣтить, что по замѣнѣ производной  $\frac{dx_1}{dx}$  ея значеніемъ два члена, содер-

жащіе множителемъ  $\frac{dy_1}{dx_1}$ , взаимно уничтожаются; вычитая  $xy$  изъ обѣихъ частей, перепишемъ это уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \left[ \frac{d(x_1-x_1^3)\frac{dy_1}{dx_1}}{dx_1} - x_1 y_1 \right].$$

Если, въ этомъ уравненіи,  $x$  измѣнить на  $x_1$ , то  $x_1$  перейдетъ въ  $x_2$ ; если затѣмъ  $x_1$  измѣнить на  $x_2$ , то  $x_2$  перейдетъ въ  $x_3$ , и т. д.; поэтому, полагая

$$\frac{d(x-x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = \tilde{\omega}(y),$$

будемъ имѣть:

$$\tilde{\omega}(y) = \frac{1-x}{(1+x)\sqrt{x}} \frac{1-x}{(1+x_1)\sqrt{x_1}} \frac{1-x_2}{(1+x_2)\sqrt{x_2}} \dots \frac{1-x_n}{(1+x_n)\sqrt{x_n}} \tilde{\omega}(y_n);$$

но если  $n$  увеличивается безпредѣльно,  $1-x_n$  стремится, очевидно, къ нулю; въ такомъ случаѣ

$$\tilde{\omega}(y) = 0$$

и, слѣдовательно,  $y$  удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$(x-x^3)\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Не имѣя возможности останавливаться здѣсь на слѣдствіяхъ изъ полученнаго результата, мы всё-же полагали невозможнымъ пропустить столь замѣчательное приложеніе анализа въ главѣ, посвященной составленію дифференціальныхъ уравненій.

#### ПОЛНЫЯ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫЯ УРАВНЕНІЯ

**§ 215.** Дифференціальныя уравненія, которымъ удовлетворяютъ функціи отъ нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ, имѣютъ мѣсто между функціями и ихъ частными производными. Иногда изслѣдованіе приводится къ другому виду уравненій, имѣющимъ мѣсто между дифференціалами независимыхъ переменныхъ и дифференціаломъ зависящей отъ нихъ функціи. Мы видѣли (§ 57), что если  $z$  есть функція отъ  $x$  и  $y$ , то существуетъ уравненіе первой степени между дифференціалами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , изъ которыхъ два остаются произвольными и опредѣляютъ третій; уравненіе этого вида

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — данныя функціи отъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , называется полнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ.

Дифференціальное уравненіе (1) очевидно отличается отъ уравненія въ частныхъ дифференціалахъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи (1)  $dx$  и  $dy$  — произвольны, ихъ можно предположить равными послѣдовательно нулю и тогда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R};$$

такимъ образомъ, изъ уравненія (1), изъ одного, могутъ быть узаны обѣ частныя производныя  $\frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , между которыми уравненіе въ частныхъ производныхъ даетъ только одно соотношеніе.

**§ 216.** Введеніе частныхъ производныхъ перваго порядка отъ функціи съ двумя переменными позволяетъ, какъ мы видѣли (§ 197), исключить произвольную функцію; разысканіе же уравненія между дифференціалами даетъ возможность исключить только постоянную.

Пусть  $F(x, y, z, C) = 0$  есть соотношеніе между  $x, y, z$  и произвольною постоянною  $C$ . Отсюда выводимъ, между дифференціалами, единственное соотношеніе:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0,$$

которому они подчинены; результатъ исключенія  $C$  изъ этого и даннаго уравненій есть вполнѣ опредѣленное уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

**§ 217.** Уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \tag{1}$$

не всегда соотвѣтствуетъ какой-нибудь зависимости между  $x, y, z$ . Не трудно замѣтить, что для этой цѣли функціи  $P, Q, R$  должны удовлетворить нѣкоторому необходимому условію. Въ самомъ дѣлѣ, изъ уравненія (1) выводимъ:

$$dz = -\frac{P}{R} dx - \frac{Q}{R} dy, \tag{2}$$

откуда

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R} \tag{3}$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx}, \tag{4}$$

а такъ какъ  $P, Q$  и  $R$  содержатъ  $z$ , предположенное функціей отъ  $x$  и  $y$ , то

$$\frac{d\frac{P}{R}}{dy} + \frac{d\frac{P}{R}}{dz} \frac{dz}{dy} = \frac{d\frac{Q}{R}}{dx} + \frac{d\frac{Q}{R}}{dz} \frac{dz}{dx};$$

замѣняя  $\frac{dz}{dy}$  и  $\frac{dz}{dx}$  ихъ значеніями (3) и упрощая, находимъ:

$$P\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0; \quad (5)$$

это уравненіе должно имѣть мѣсто при всѣхъ значеніяхъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющихъ данному уравненію. Могутъ представиться два случая: или уравненіе (5) — тождество и тогда условіе, очевидно, выполнено, или оно устанавливаетъ нѣкоторое соотношеніе между  $x$ ,  $y$  и  $z$ , которое должно быть искомымъ, и если уравненіе (1) не есть слѣдствіе уравненія (5), то, значитъ, оно невозможно.

Пусть, напр., дано уравненіе:

$$(6xy^2z - 5yz^3)dx + (5x^2yz - 4xz^3)dy + (4x^2y^2 - 6xyz^3)dz = 0; \quad (6)$$

составляя уравненіе (5), видимъ, что оно — тождество. По предыдущей теоріи тогда можно поставить вопросъ, какому соотношенію между  $x$ ,  $y$  и  $z$  соотвѣтствуетъ уравненіе (6).

Пусть еще дано уравненіе:

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0; \quad (A)$$

уравненіе (5) будетъ:

$$z - x - y = 0. \quad (B)$$

Отсюда выводимъ:

$$dz = dx + dy, \quad (C)$$

и такъ какъ значенія  $z$  и  $dz$  изъ уравненій (B) и (C) обращаютъ уравненіе (A) въ тождество, то изъ этого должно заключить, что уравненіе (A) возможно и что оно имѣетъ единственное рѣшеніе:

$$z = x + y.$$

Пусть, наконецъ, дано уравненіе:

$$zdx - ydy + ydz = 0;$$

уравненіе (5) въ этомъ случаѣ будетъ:

$$-2z = 0,$$

и такъ какъ  $z = 0$  не представляетъ рѣшенія даннаго уравненія, то это послѣднее невозможно и не соотвѣтствуетъ никакой зависимости между  $x$ ,  $y$  и  $z$ .



§ 218 Предыдущіе выводы могутъ быть обобщены. Уравненіе между четырьмя переменными  $x, y, z, u$  и произвольною постоянною даетъ, черезъ исключеніе постоянной, полное дифференціальное уравненіе вида:

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu = 0, \quad (1)$$

но, при этомъ, между функціями  $P, Q, R, S$  должны существовать нѣкоторыя необходимыя соотношенія. Въ самомъ дѣлѣ, рассматриваемъ въ уравненіи (1)  $u$ , какъ функцію отъ независимыхъ переменныхъ  $x, y, z$ , и замѣняемъ  $du$  его значеніемъ:

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz;$$

такъ какъ  $dx, dy, dz$  — произвольны, то коэффициенты при нихъ должны быть по нулю и, слѣдовательно, уравненіе (1) заключаетъ въ себѣ три слѣдующихъ:

$$P + S \frac{du}{dx} = 0,$$

$$Q + S \frac{du}{dy} = 0,$$

$$R + S \frac{du}{dz} = 0.$$

Рѣшаемъ эти уравненія относительно частныхъ производныхъ отъ  $u$  и полученные значенія вносимъ въ равенства:

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dy} \right),$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{du}{dz} \right),$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{du}{dx} \right);$$

опуская взаимно-уничтожающіеся члены, находимъ:

$$S \left( \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} \right) + Q \left( \frac{dS}{dx} - \frac{dP}{du} \right) + P \left( \frac{dQ}{du} - \frac{dS}{dy} \right) = 0,$$

$$S \left( \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} \right) + R \left( \frac{dS}{dy} - \frac{dQ}{du} \right) + Q \left( \frac{dR}{du} - \frac{dS}{dz} \right) = 0,$$

$$S \left( \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} \right) + P \left( \frac{dS}{dz} - \frac{dR}{du} \right) + R \left( \frac{dP}{du} - \frac{dS}{dx} \right) = 0;$$

эти три уравненія должны удовлетворяться тождественно, чтобы уравненіе (1) могло быть выведено изъ соотношенія между  $x, y, z, u$  и произвольною постоянною.

§ 219. Когда  $p$  переменныхъ  $x_1, x_2, \dots, x_p$  связаны  $n$  соотношеніями, содержащими  $2n - 1$  произвольныхъ постоянныхъ, то можно исключить эти постоянныя

между данными уравнениями и их полными дифференциалами; результат такого исключения, очевидно, будет вида:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p = 0. \quad (1)$$

Обратно, если дано подобное уравнение, то, рассматривая въ немъ  $p - n$  переменныхъ, какъ неизвѣстныя функціи отъ  $n$  остальныхъ, можно написать непосредственно  $n$  уравнений, представляющихъ необходимое слѣдствіе, какъ бы въ нѣкоторомъ родѣ видоизмѣненіе уравненія (1). Если, напр.,  $x_1, x_2, \dots, x_{p-n}$  суть функціи отъ  $x_{p-n+1}, x_{p-n+2}, \dots, x_p$ , то

$$dx_1 = \frac{dx_1}{dx_{p-n+1}} dx_{p-n+1} + \frac{dx_1}{dx_{p-n+2}} dx_{p-n+2} + \dots + \frac{dx_1}{dx_p} dx_p;$$

замѣчая, что и другіе дифференциалы выразятся такимъ же образомъ, мы можемъ замѣнить ихъ въ данномъ уравненіи этими значеніями и приравнять нулю коэффициенты при  $n$  произвольныхъ дифференциалахъ  $dx_{p-n+1}, dx_{p-n+2}, \dots, dx_p$ , — получится  $n$  уравнений между  $p - n$  неизвѣстными. Если  $n$  равно или меньше  $p - n$ , то нѣтъ никакого необходимаго условія между коэффициентами  $X_1, X_2, \dots, X_p$ ; въ противномъ же случаѣ эти функціи подчиняются условіямъ, къ которымъ мы еще вернемся.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Исключить постоянныя  $a$  и  $b$  и составить дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ функція  $y$ , заданная уравненіемъ:

$$xy = ae^x + be^{-x}.$$

2. Исключить  $a, b, c, d$  и составить дифференціальное уравненіе третьяго порядка, которому удовлетворяетъ функція  $y$ , заданная уравненіемъ:

$$ae^y + be^{-y} = ce^x + de^{-x}.$$

Отв.

$$\left[ \frac{d^3 y}{dx^3} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 - \frac{dy}{dx} \right] \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 \right] = 3 \frac{dy}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2.$$

3. Исключить произвольную функцію изъ уравненія:

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)$$

и вывести уравненіе въ частныхъ производныхъ:

$$x^2 \frac{dz}{dx} + y^2 \frac{dz}{dy} = z^2.$$

4. Исключить произвольныя функции изъ уравненія:

$$z = x\varphi(ax + by) + y\psi(ax + by)$$

и вывести уравненіе:

$$a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} - 2ab \frac{d^2 z}{dxdy} + b^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

5. Уравненіе:

$$z = \varphi[x + f(y)],$$

въ которомъ  $\varphi$  и  $f$  — произвольныя функции, заключаетъ въ себѣ уравненіе:

$$\frac{d^2 z}{dxdy} \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

6. Исключить произвольныя функции изъ уравненія:

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{y^n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Отв.

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dxdy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} + x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = n^2 z.$$

7. Исключить произвольныя функции изъ уравненія:

$$z = \varphi(x + y) + xy\psi(x - y).$$

Отв.

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx^2 dy} - \frac{d^3 z}{dxdy^2} - \frac{d^3 z}{dy^3} = \frac{2}{x + y} \left( \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} \right).$$

8. Дано:

$$z = \varphi(\alpha) - x\varphi'(\alpha) + \psi(\beta) + x\psi'(\beta),$$

$$y = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Исключить произвольныя функции  $\varphi$  и  $\psi$  и составить дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{d^2 z}{dy^2} - \frac{2}{x} \frac{dz}{dx} = 0,$$

которому удовлетворяетъ  $z$ .

9. Дано:

$$y + ax = \varphi(\alpha),$$

$$z = x + \frac{y}{\alpha}$$

Составить дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ:

$$\left(1 + \frac{dz}{dx}\right) \left(1 + \frac{dz}{dy}\right) z = \left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] x + \left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] y,$$

которому удовлетворяетъ  $z$ .

10. Изъ уравненій:

$$z = \frac{\psi(\alpha)}{x(\alpha)^2 \psi'(\alpha)} + \frac{1}{x + \alpha},$$

$$y + 1[(x + \alpha)^2 \psi'(\alpha)] = 0$$

черезъ исключеніе произвольной функціи  $\psi(\alpha)$  вытекаетъ:

$$\left(z - \frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{dz}{dx} = 0.$$





# ВТОРАЯ КНИГА

## Развертываніе въ ряды

### ГЛАВА ПЕРВАЯ

#### Общее ученіе о рядахъ

#### ОПРЕДѢЛЕНІЯ

§ 220. Рядъ есть сумма безпредѣльнаго числа членовъ; рядъ называется *сходящимся*, если по мѣрѣ увеличенія числа членовъ ихъ сумма, составляемая въ томъ же порядкѣ, въ какомъ идутъ самые члены, бесконечно приближается къ опредѣленному предѣлу.

Въ противномъ случаѣ рядъ называется *расходящимся*.

Члены ряда могутъ идти по опредѣленному закону, быть положительными или отрицательными, вещественными или мнимыми, но при условіи безпредѣльнаго ихъ числа необходимо, чтобы этотъ законъ былъ извѣстенъ и давалъ бы возможность вычислять ихъ въ послѣдовательномъ порядкѣ, потому что выписать ихъ всѣ, какъ въ многочленѣ, невозможно.

Алгебраическое выраженіе для члена въ функціи отъ указателя мѣста, занимаемаго имъ, называется *общимъ членомъ ряда*.

Хотя рядъ, по опредѣленію, есть именно предѣлъ, къ которому стремится сумма членовъ, но обычно говорятъ, что составляютъ сумму ряда, когда вычисляютъ значеніе этого предѣла; этотъ неосторожный оборотъ рѣчи вошелъ, однако, во всеобщее употребленіе.

#### ПРИМѢРЫ РЯДОВЪ

§ 221. Начнемъ съ простѣйшихъ примѣровъ на ряды, сумма которыхъ извѣстна. Слѣдующее замѣчаніе можетъ много ихъ дать.

Назовемъ черезъ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  какія-нибудь числа, подчиненныя одному лишь условію, что  $\alpha_n$  бесконечно-мало при бесконечно-большомъ  $n$ ; очевидно,

$$\alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \dots, \quad (1)$$

а это тождество содержитъ большое число рядовъ.

Пусть, во-первыхъ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = x$ ,  $\alpha_3 = x^2$ , ...,  $\alpha_n = x^{n-1}$ , при чемъ  $x$  обозначаетъ число, меньшее единицы; формула (1) приметъ видъ:

$$1 = (1 - x) (1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots), \quad (2)$$

т. е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots,$$

что представляетъ весьма важную формулу, извѣстную изъ элементарной математики.

Пусть еще  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ , ...,  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ , ...; формула (1) перейдетъ въ любопытную формулу:

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots,$$

одну изъ первыхъ, найденныхъ Лейбницемъ, когда онъ приступалъ къ ученію о рядахъ.

Если положить

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{3}, \alpha_3 = \frac{1}{5}, \dots, \alpha_n = \frac{1}{2n-1}, \dots,$$

то такъ же найдемъ:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

**§ 222.** Приведемъ еще нѣсколько замѣчательныхъ рядовъ, суммированныхъ Стирлингомъ посредствомъ подобныхъ же разсужденій; ими онъ пользовался въ своемъ трудѣ о суммированіи рядовъ.

Каково бы ни было  $z$ , мы можемъ написать:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \dots + \frac{1}{(z+p)(z+p+1)} + \dots;$$

дѣйствительно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}, \\ \frac{1}{(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{(z+p)(z+p+1)} &= \frac{1}{z+p} - \frac{1}{z+p+1}; \end{aligned}$$

складывая же эти равенства, мы получаемъ искомую формулу.

Также не трудно доказать слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots, \\ \frac{1}{3} \frac{1}{z(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \dots, \\ \frac{1}{4} \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)(z+5)} + \dots\end{aligned}$$

§ 223. Если въ формулѣ (1) предыдущаго параграфа положить

$$\alpha_1 = \operatorname{arctang} \frac{c}{a}, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctang} \frac{c}{a+b}, \quad \alpha_3 = \operatorname{arctang} \frac{c}{a+2b}, \dots,$$

то она перейдетъ въ слѣдующую:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctang} \frac{c}{a} &= \operatorname{arctang} \frac{bc}{a(a+b)+c^2} + \operatorname{arctang} \frac{bc}{(a+b)(a+2b)+c^2} + \\ &+ \operatorname{arctang} \frac{bc}{(a+2b)(a+3b)+c^2} + \dots\end{aligned}$$

Полагая  $b=2$ ,  $a=1$ ,  $c=1$ , находимъ:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} \frac{1}{2} + \operatorname{arctang} \frac{1}{8} + \operatorname{arctang} \frac{1}{18} + \dots + \operatorname{arctang} \frac{1}{2n^2} + \dots;$$

полагая  $a=1$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ , находимъ также:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7} + \operatorname{arctang} \frac{1}{21} + \dots + \operatorname{arctang} \frac{1}{n^2+n+1} + \dots$$

§ 224. Къ предыдущимъ формуламъ, доказаннымъ непосредственно, посредствомъ простого разложенія каждаго члена на двѣ части, мы можемъ присоединить еще слѣдующую:

$$\frac{1}{x} = 2 \cot 2x + \operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{tang} \frac{1}{8} x + \dots$$

Хотя по виду она отлична отъ предыдущихъ, но доказывается совершенно такъ же. Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ тождество:

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2 \cot 2x;$$

изъ него вытекають равенства:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \cot x, \\ \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{x}{4} &= \frac{1}{4} \cot \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}, \\ \frac{1}{8} \operatorname{tang} \frac{x}{8} &= \frac{1}{8} \cot \frac{x}{8} - \frac{1}{4} \cot \frac{x}{4}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{x}{2^n} &= \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{x}{2^{n-1}};\end{aligned}$$

складывая всѣ ихъ по-членно, находимъ:

$$\operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - 2 \cot 2x.$$

Если  $n$  станетъ безпредѣльно возрастать, то  $\cot \frac{x}{2^n}$ , равный  $\frac{1}{\operatorname{tang} \frac{x}{2^n}}$ , можетъ быть замѣненъ черезъ  $\frac{2^n}{x}$ ; слѣдовательно, первый членъ второй части обратится въ предѣлѣ въ  $\frac{1}{x}$ , и мы получимъ:

$$\frac{1}{x} - 2 \cot 2x = \operatorname{tang} x + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tang} \frac{x}{2^n} + \dots,$$

что и требовалось доказать.

**§ 225.** Сумма ряда получается иногда посредствомъ разложенія каждаго члена такимъ образомъ, чтобы данный рядъ преобразовался въ другіе, болѣе простые, ряды, суммы которыхъ извѣстны.

Такъ доказалъ Яковъ Бернулли слѣдующія формулы, остроумно выведенныя Лейбницемъ изъ теоріи сложныхъ процентовъ; онѣ представляютъ частные случаи гораздо болѣе общей и болѣе важной формулы, которую мы рассмотримъ ниже. При всякомъ значеніи, положительномъ или отрицательномъ, но меньшемъ единицы по абсолютной величинѣ, мы можемъ написать:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + \dots, \\ \frac{1}{(1-x)^4} &= 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \dots + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n + \dots\end{aligned}$$



Первый изъ этихъ рядовъ хорошо извѣстенъ. Разсмотримъ второй и положимъ

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots$$

Вводя обозначенія:

$$\begin{aligned} A &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \\ B &= x + x^2 + x^3 + \dots, \\ C &= x^2 + x^3 + \dots, \\ D &= x^3 + \dots, \end{aligned}$$

замѣчаемъ, что

$$S = A + B + C + D + \dots = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \dots,$$

т.-е.

$$S = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Точно такъ же, полагая

$$S' = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n + \dots$$

и вводя обозначенія:

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots, \\ B &= x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots, \\ C &= x^2 + 2x^3 + \dots + (n-1)x^n + \dots, \\ D &= x^3 + \dots + (n-2)x^n + \dots, \end{aligned}$$

мы, очевидно, получимъ:

$$S' = A + B + C + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)^2} + \dots + \frac{x^n}{(1-x)^2} + \dots,$$

т.-е.

$$S' = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Мы не станемъ развивать болѣе подробно этихъ указаній, касающихся теоремъ, которыя должны быть получены ниже подъ болѣе общимъ видомъ; отмѣтимъ лишь здѣсь, какъ легкую для доказательства съ помощью приѣма, подобнаго предыдущему, формулу:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2} x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

въ которой  $n$  есть какое-угодно цѣлое число, а  $x$ —положительное или отрицательное число, меньшее единицы по абсолютной величинѣ.

§ 226. Тотъ же методъ можно приложить къ суммированію слѣдующаго ряда

$$S = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots + (n+1)^2 x^n + \dots$$

Полагая

$$\begin{aligned} A &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \\ B &= 3x + 3x^2 + 3x^3 + \dots, \\ C &= 5x^2 + 5x^3 + \dots, \\ D &= 7x^3 + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

имѣемъ, очевидно,

$$S = A + B + C + D + \dots = \frac{1}{1-x} + \frac{3x}{1-x} + \frac{5x^2}{1-x} + \dots = \frac{1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots}{1-x},$$

а такъ какъ числитель

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + 2(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2},$$

то окончательно выводимъ:

$$S = \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

§ 227. Число рядовъ, которые можно суммировать, или разложеній, которыя можно открыть посредствомъ приѣмовъ, подобныхъ только-что указанному, чрезвычайно велико; перечисленіе ихъ здѣсь было бы мало полезно и къ тому же отвлекло бы насъ совершенно отъ нашего предмета; поэтому, оставимъ въ сторонѣ эти первые примѣры, приведенные лишь съ цѣлью съ самаго начала показать, съ какою легкостью могутъ быть развернуты столь различныя выраженія въ ряды, и перейдемъ къ признакамъ сходимости и нѣкоторымъ общимъ принципамъ ученія о рядахъ.

Необходимость сходимости употребляемыхъ въ математикѣ рядовъ

§ 228. Математики XVIII-го столѣтія придавали мало значенія сходимости рядовъ. Наиболѣе знаменитые изъ нихъ употребляли расходящіеся ряды и въ разсужденіяхъ относительно ихъ, повидимому, не обращали вниманія на недостаточную строгость. Въ трудахъ Якова Бернулли есть весьма замѣчательный примѣръ той опасности, которую представляютъ ряды, и нелѣпый результатъ былъ тамъ полученъ именно по тому, что рядъ, послужившій исходною точкою, оказался расходящимся. Приведемъ это доказательство,

дающее одинъ изъ простѣйшихъ и убѣдительнѣйшихъ доводовъ по занимающему насъ вопросу, который, впрочемъ, не представляетъ въ настоящее время ни для кого ни малѣйшаго сомнѣнія.

Разсмотримъ рядъ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Обозначаемъ его черезъ  $S$ , т.-е. пишемъ:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

или, что то же самое,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \dots + \frac{n}{n(n+1)} + \dots$$

Полагаемъ:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots, \\ B &= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots, \\ C &= \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots, \\ D &= \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots; \end{aligned}$$

очевидно,

$$S = A + B + C + D + \dots;$$

съ другой же стороны (§ 221)

$$A = 1, \quad B = A - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad C = B - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad D = C - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}, \quad \dots,$$

и т. д. до бесконечности; слѣдовательно,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Сравнивая это значеніе съ предыдущимъ, находимъ

$$1 = 0,$$

что невозможно. Подобное разсужденіе было бы, однако, вполне правильнымъ при условіи

сходимости ряда  $S$ ; итакъ, можно утверждать, что этотъ послѣдній — рядъ расходящійся, замѣчая при этомъ, какія ошибки можетъ повлечь за собою употребленіе такихъ рядовъ.

#### Теоремы о сходимости рядовъ съ положительными членами

§ 229. Для сходимости ряда съ вещественными и положительными членами необходимо и достаточно, чтобы сумма, какъ бы далеко ни продолжать этотъ рядъ, не могла бы возрастать безпредѣльно. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что если въ суммѣ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

брать постоянно возрастающее число членовъ, то получаемые результаты будутъ все время увеличиваться, и если эти результаты не могутъ превзойти всякой величины, то они необходимо приближаются какъ угодно близко къ наименьшему изъ чиселъ, которыхъ не могутъ превзойти.

§ 230. Если рядъ съ положительными членами сходящійся, то при уменьшеніи его членовъ получается новый рядъ также сходящійся, такъ какъ сумма членовъ новаго ряда, очевидно, не можетъ возрастать безпредѣльно.

Изъ этого замѣчанія выводимъ доказательство слѣдующей весьма употребительной теоремы.

**Теорема.** — Если въ рядѣ съ положительными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  какого-угодно члена къ его предшествующему, т.-е. при всякомъ значеніи  $n$ , меньше нѣкотораго предѣла, меньшаго единицы, то рядъ — сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\dots \dots \dots ,$$

$$\dots \dots \dots ;$$

такъ какъ  $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$  положительны, то изъ этихъ неравенствъ выводимъ:

$$u_{n+1} < k u_n, \quad u_{n+2} < k^2 u_n, \quad u_{n+3} < k^3 u_n, \dots ;$$

такимъ образомъ, члены даннаго ряда меньше членовъ сходящейся прогрессіи:

$$u_n + k u_n + k^2 u_n + \dots ,$$

а, слѣдовательно, и самый рядъ — сходящійся.



**§ 231.** Сравненіе ряда, состоящаго изъ положительныхъ членовъ, съ убывающею прогрессіею приводитъ къ другому признаку сходимости.

Разсмотримъ рядъ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

Если общій членъ  $u_n$  меньше соотвѣтственнаго члена  $Aq^n$  убывающей геометрической прогрессіи, то рядъ — сходящійся, при чемъ условіе

$$u_n < Aq^n$$

равносильно

$$u_n^{\frac{1}{n}} < q\sqrt[n]{A}.$$

А такъ какъ  $\sqrt[n]{A}$  въ предѣлѣ, при безконечно возрастающемъ  $n$ , равно единицѣ, то это условіе, очевидно, будетъ выполнено для значеній  $n$ , большихъ нѣкоторой величины, лишь бы только  $q$  превышало предѣлъ, къ которому стремится  $u_n^{\frac{1}{n}}$ , или, въ случаѣ, когда этого предѣла нѣтъ, чтобы  $q$  превышало число  $k$ , меньше котораго всегда остается это выраженіе. Поэтому, если существуетъ такое число, меньшее единицы, то можно составить безчисленное множество сходящихся прогрессій, члены которыхъ, начиная съ нѣкотораго мѣста, превышаютъ члены даннаго ряда, и, значитъ, этотъ послѣдній будетъ самъ сходящимся.

Такимъ образомъ мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

*Если въ рядѣ съ положительными членами членъ  $u_n$ , занимающій  $(n+1)$ -ое мѣсто, таковъ, что выраженіе  $u_n^{\frac{1}{n}}$  остается, для достаточно большихъ значеній  $n$ , постоянно меньше нѣкотораго числа  $k$ , меньшаго единицы, то рядъ — сходящійся.*

Оба предыдущихъ правила ничего не даютъ, когда отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  и выраженіе  $u_n^{\frac{1}{n}}$  стремятся къ единицѣ при возрастаніи  $n$ . Въ этомъ случаѣ можетъ имѣть мѣсто какъ сходимость, такъ и расходимость, и чтобы рѣшить вопросъ, нужно прибѣгнуть къ другимъ правиламъ.

**§ 232.** Легко доказать, что рядъ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots,$$

уже рассмотрѣнный выше (§ 228), расходящійся. Дѣйствительно, невозможно, чтобы сумма его членовъ приближалась къ опредѣленному предѣлу, потому что сумма  $n$  членовъ,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

слѣдующихъ за любымъ членомъ  $\frac{1}{n}$ , больше  $\frac{1}{2}$  на томъ основаніи, что каждое ея слагаемое

больше  $\frac{1}{2n}$ ; слѣдовательно, какова бы ни была уже полученная сумма, можно ее еще увеличить болѣе, чѣмъ на  $\frac{1}{2}$ , иначе говоря, она будетъ возрастать безпредѣльно.

Отсюда слѣдуетъ, что всякій рядъ съ положительными членами:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

въ которомъ произведеніе  $nu_n$  не убываетъ безпредѣльно при возрастаніи  $n$ , необходимо расходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что начиная съ нѣкотораго значенія  $n$  постоянно

$$nu_n > k,$$

при чемъ  $k$  — определенное число, отличное отъ нуля; значитъ, мы имѣемъ рядъ неравенствъ:

$$\begin{aligned} nu_n &> k, \\ (n+1) u_{n+1} &> k, \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \\ (n+p) u_{n+p} &> k, \end{aligned}$$

изъ которыхъ заключаемъ, что члены данного ряда больше членовъ расходящагося ряда:

$$\frac{k}{n} + \frac{k}{n+1} + \dots + \frac{k}{n+p} + \dots,$$

т. е. ихъ сумма безконечно огромна.

**§ 233.** Теорема, обратная предыдущей, не всегда справедлива. Такой рядъ, для котораго произведеніе  $nu_n$  стремится къ нулю при возрастаніи  $n$ , не непремѣнно сходящійся въ силу только этого условія. Есть даже весьма замѣчательная теорема Абеля, по которой нѣтъ такой функціи  $\varphi(n)$ , чтобы всякій рядъ съ положительными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

былъ непремѣнно сходящимся, когда  $u_n \varphi(n)$  стремится къ нулю при возрастаніи  $n$ , и непремѣнно расходящимся въ противномъ случаѣ.

Для доказательства этого предложенія замѣчаемъ, что если рядъ съ положительными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

расходящійся, то слѣдующій рядъ

$$\frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2} + \dots + \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}} + \dots$$

также расходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ (§ 44) при всякомъ положительномъ значеніи  $x$

$$l(1+x) < x,$$

то

$$l(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - l(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) = \\ = l\left(1 + \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}\right) < \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}};$$

полагая же последовательно  $n = 1, n = 2, \dots$ , пишемъ неравенства:

$$l(u_0 + u_1) - l(u_0) < \frac{u_1}{u_2}, \\ l(u_0 + u_1 + u_2) - l(u_0 + u_1) < \frac{u_2}{u_0 + u_1}, \\ \dots \dots \dots \\ l(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - l(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) < \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}},$$

которыя по сложении даютъ:

$$l(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - l(u_0) < \frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \dots + \frac{u_n}{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}.$$

Поэтому, если  $u_0 + u_1 + \dots + u_n$  растеть безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$ , то и подавно растеть безпредѣльно вторая часть неравенства, иначе говоря, рядъ, первыхъ  $n$  членовъ котораго составляютъ эту вторую часть, есть расходящійся.

Пусть теперь  $\varphi(n)$  будетъ, если только это возможно, такая функція отъ  $n$ , что всякій рядъ съ положительными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

является сходящимся или расходящимся, смотря по тому, стремится или нѣтъ къ нулю  $\varphi(n) \cdot u_n$  при возрастаніи  $n$ ; въ такомъ случаѣ рядъ

$$\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)} + \dots \quad (1)$$

расходящійся, а рядъ

$$\frac{1}{\varphi(2) \frac{1}{\varphi(1)}} + \frac{1}{\varphi(3) \left[ \frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} \right]} + \frac{1}{\varphi(4) \left[ \frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \frac{1}{\varphi(3)} \right]} + \dots \\ + \frac{1}{\varphi(n) \left[ \frac{1}{\varphi(1)} + \dots + \frac{1}{\varphi(n-1)} \right]} \quad (2)$$

сходящійся, такъ какъ въ первомъ изъ нихъ членъ порядка  $n$ , умноженный на  $\varphi(n)$ , даетъ въ произведеніи единицу, а во второмъ, вслѣдствіе расходимости перваго ряда, аналогичное произведеніе, очевидно, стремится къ нулю. Передъ этимъ же мы только





Предположимъ, во-вторыхъ, что рядъ (A)—расходящійся; пишемъ слѣдующія неравенства:

$$\begin{aligned}(a-1)au_a &> u_a + u_{a+1} + \dots + u_{a^2-1}, \\ (a-1)a^2u_{a^2} &> u_{a^2} + u_{a^2+1} + \dots + u_{a^3-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ (a-1)a^nu_{a^n} &> u_{a^n} + u_{a^n+1} + \dots + u_{a^{n+1}-1},\end{aligned}$$

всѣ очевидныя, такъ какъ члены  $u_1, u_2, u_3, \dots$ , по предположенію, идутъ уменьшаясь. Складывая ихъ, находимъ:

$$(a-1)(au_a + a^2u_{a^2} + a^3u_{a^3} + \dots + a^nu_{a^n}) > u_a + u_{a+1} + \dots + u_{a^{n+1}-1}.$$

По предположенію, вторая часть растетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$ , а въ такомъ случаѣ первая и подавно растетъ безпредѣльно, и рядъ (B)—расходящійся, что и требовалось доказать.

§ 235. Первымъ далъ предыдущую теорему Коши; съ помощью ея онъ изящно доказалъ, что рядъ

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \dots + \frac{1}{n^\mu} + \dots$$

будетъ сходящимся или расходящимся, смотря по тому, больше или меньше единицы положительный показатель  $\mu$ . Въ самомъ дѣлѣ, достаточно приложить къ этому ряду предыдущую общую теорему, положивъ  $a=2$ . Тогда увидимъ, что онъ сходящійся или расходящійся одновременно съ болѣе простымъ рядомъ

$$1 + \frac{2}{2^\mu} + \frac{4}{4^\mu} + \dots,$$

т.-е.

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{1}{8}\right)^{\mu-1} + \dots,$$

что представляетъ геометрическую прогрессію со знаменателемъ  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}$ , сходящуюся при  $\mu$ , большемъ единицы, и расходящуюся въ противномъ случаѣ. Такимъ образомъ теорема доказана.

§ 236. Такъ же можно доказать, что рядъ

$$1 + \frac{1}{2(12)^\mu} + \frac{1}{3(13)^\mu} + \dots + \frac{1}{n(ln)^\mu} + \dots$$

сходящійся, если  $\mu$  больше единицы и расходящійся въ противномъ случаѣ. Въ самомъ дѣлѣ, прилагая теорему Коши при  $a=2$ , видимъ, что этотъ рядъ—сходящійся или расходящійся одновременно съ рядомъ

$$1 + \frac{1}{(12)^\mu} + \frac{1}{(14)^\mu} + \frac{1}{(18)^\mu} + \dots,$$

т.-е.

$$1 + \frac{1}{(12)^\mu} \left( 1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \dots \right),$$

сходящимся при  $\mu$ , большемъ единицы, и расходящимся въ противномъ случаѣ.

§ 237. Предположимъ теперь, что въ рядѣ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (A)$$

общій членъ  $u_n$  равенъ  $\frac{1}{n \ln (ln)^\mu}$ ; для испытанія условія сходимости этого ряда мы можемъ замѣнить его другимъ

$$u_1 + a u_a + a^2 u_{a^2} + \dots + a^n u_{a^n} + \dots, \quad (B)$$

гдѣ  $a$  обозначаетъ произвольное цѣлое число. Общій членъ такого ряда есть

$$v_n = a^n u_{a^n} = \frac{a^n}{a^n \ln a^n (ln a^n)^\mu} = \frac{1}{n \ln a [ln a]^\mu}.$$

При  $\mu$ , большемъ единицы, выбираемъ  $a$  больше  $e$ ; тогда  $\ln a$  больше единицы и членъ  $v_n$  меньше

$$\frac{1}{n (ln)^\mu},$$

т.-е. (§ 236) меньше общаго члена сходящагося ряда; слѣдовательно, рядъ (B), а вмѣстѣ съ нимъ и рядъ (A)—сходящіеся.

Если  $\mu$  равно или меньше единицы, то положимъ  $a = 2$ ; тогда  $\ln a$  меньше единицы и  $v_n$  больше

$$\frac{1}{n (ln)^\mu},$$

т.-е. больше общаго члена расходящагося ряда; слѣдовательно, рядъ (B), а вмѣстѣ съ нимъ и рядъ (A) въ этомъ случаѣ расходящіеся.

Точно такимъ же образомъ увидимъ, что ряды съ общими членами  $\frac{1}{n \ln \ln (ln)^\mu}$ ,  $\frac{1}{n \ln \ln \ln (ln)^\mu}$ ,  $\dots$  будутъ сходящимися при  $\mu$ , большемъ единицы, и расходящимися въ противномъ случаѣ.

Замѣтимъ только, что такъ какъ логарифмы отрицательныхъ чиселъ — мнимые, то первые члены этихъ рядовъ перестаютъ быть вещественными, но ихъ можно замѣнить произвольными числами, не измѣняя условій сходимости.

§ 238. Изслѣдованіе предыдущихъ рядовъ приводитъ къ признакамъ, по которымъ иногда съ большою пользою можно судить о сходимости ряда съ положительными членами. Пусть данъ рядъ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Изъ предыдущаго ясно, что если существуетъ число  $\mu$ , большее единицы, такое, что при достаточно большихъ значеніяхъ  $n$  постоянно

$$u_n < \frac{1}{n^\mu}, \quad (1)$$

то рядъ—сходящійся. Наоборотъ, если существуетъ число  $\mu$ , меньшее единицы, такое, что при достаточно большихъ значеніяхъ  $n$  постоянно

$$u_n > \frac{1}{n^\mu}, \quad (2)$$

то рядъ—расходящійся.

Неравенство (1) равносильно

$$\frac{1}{u_n} > n^\mu$$

и, слѣдовательно,

$$\lg \left( \frac{1}{u_n} \right) > \mu \lg n,$$

или же

$$\frac{\lg \left( \frac{1}{u_n} \right)}{\lg n} > \mu;$$

также неравенство (2) можетъ быть замѣнено неравенствомъ:

$$\frac{\lg \frac{1}{u_n}}{\lg n} < \mu;$$

первому изъ этихъ неравенствъ, очевидно, можно удовлетворить, выбирая  $\mu$  больше еди-

ницы, лишь бы дробь  $\frac{1}{u_n}$  въ предѣлѣ была больше единицы, а второму, выбирая  $\mu$

меньше единицы, лишь бы  $\frac{1}{u_n}$  въ предѣлѣ было меньше единицы. Въ первомъ случаѣ рядъ—сходящійся, а во второмъ—расходящійся.

§ 239. Если отношение  $\frac{1}{\frac{u_n}{\ln n}}$  въ предѣлѣ точно равно единицѣ, то сходимость или расходимость ряда остается подѣ сомнѣніемъ; часто въ такихъ случаяхъ можно рассуждать слѣдующимъ образомъ. По предыдущему рядъ съ общимъ членомъ  $u_n$ , очевидно, сходящійся, если можно подобрать число  $\mu$ , большее единицы, такое, что при достаточно большихъ значеніяхъ  $n$  постоянно

$$u_n < \frac{1}{n(\ln n)^\mu}; \quad (1)$$

наоборотъ, рядъ—расходящійся, если существуетъ число  $\mu$ , меньшее единицы, такое, что при достаточно большихъ значеніяхъ  $n$  постоянно

$$u_n > \frac{1}{n(\ln n)^\mu}. \quad (2)$$

Первое изъ этихъ неравенствъ можетъ быть написано въ видѣ:

$$\frac{1}{u_n} > n(\ln n)^\mu, \quad (3)$$

т.-е.

$$1 \frac{1}{u_n} > \ln + \mu \ln n, \quad (4)$$

или, наконецъ,

$$\mu < \frac{1 \frac{1}{u_n} - \ln}{\ln n} < \frac{1 \frac{1}{nu_n}}{\ln n}; \quad (5)$$

также неравенство (2) равносильно

$$\mu > \frac{1 \frac{1}{nu_n}}{\ln n}.$$

Чтобы удовлетворить первому изъ нихъ значеніемъ  $\mu$ , большимъ единицы, достаточно,

чтобы  $\frac{1 \frac{1}{nu_n}}{\ln n}$  въ предѣлѣ было больше единицы, а чтобы можно было удовлетворить второму значеніемъ  $\mu$ , меньшимъ единицы, достаточно, чтобы то же выраженіе въ предѣлѣ было меньше единицы. Такимъ образомъ, будетъ сходимость или расходимость,

смотря по тому, больше или меньше единицы предѣлъ выраженія  $\frac{1 \frac{1}{nu_n}}{\ln n}$ .

Слѣдуетъ замѣтить, что числитель  $1 \frac{1}{nu_n}$ , будучи равенъ  $1 \frac{1}{u_n} - \ln$ , былъ бы безконечно великъ относительно  $\ln n$ , еслибы оба члена этой разности не имѣли отношенія,



безконечно-мало отличающагося отъ единицы, иначе говоря, еслибы предыдущее правило не было бы недостаточнымъ; значитъ, новое правило особенно приложимо къ рядамъ, для которыхъ предыдущее недостаточно.

Замѣтимъ, наконецъ, что  $nu_n$  непремѣнно стремится къ нулю, въ противномъ случаѣ  $u_n$  сравнимо съ  $\frac{1}{u_n}$  и рядъ былъ бы расходящимся подобно ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Итакъ, предѣлъ выраженія  $\frac{1}{nu_n}$  является вполне опредѣленнымъ въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится къ нему прибѣгать.

§ 240. Если отношеніе  $\frac{1}{nu_n}$  стремится къ единицѣ, то сходимость или расходимость ряда остается подъ сомнѣніемъ. Въ такихъ случаяхъ сравниваемъ общій членъ  $u_n$  съ

$$\frac{1}{n \ln(n)^{\mu}}. \quad (1)$$

Если при достаточно большихъ значеніяхъ  $n$  это послѣднее выраженіе превосходитъ  $u_n$ , то при  $\mu$ , большемъ единицы, будетъ сходимость; наоборотъ, если можно сдѣлать такъ, что при  $\mu$ , меньшемъ единицы,  $u_n$  превзойдетъ выраженіе (1), то будетъ расходимость.

Не трудно отсюда заключить, что рядъ — сходящійся, если выраженіе  $\frac{1}{nu_n \ln n}$  въ предѣлѣ больше единицы, и расходящійся въ противномъ случаѣ. Замѣтимъ, какъ въ пре-

дыдущемъ параграфѣ, что отношеніе  $\frac{1}{nu_n}$  въ предѣлѣ должно быть равно единицѣ, чтобы предѣлъ, о которомъ мы здѣсь говоримъ, не явился бы безконечно-огромнымъ.

Если же это такъ, то и  $\frac{1}{\ln n}$  въ предѣлѣ равно единицѣ, и, слѣдовательно, къ третьему правилу надо прибѣгать какъ разъ въ тѣхъ случаяхъ, когда два предыдущихъ ничего не даютъ.

Рядъ аналогичныхъ правилъ можетъ быть продолженъ какъ-угодно далеко, но случаи ихъ приложенія становятся все рѣже и рѣже и нѣтъ, поэтому, никакой необходимости итти далѣе въ этомъ направленіи.

§ 241. Разсмотримъ, напр., рядъ

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}},$$

въ которомъ отношеніе общаго члена къ его предыдущему въ предѣлѣ равно единицѣ.

Полагая  $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}$ , пишемъ:

$$\frac{1}{\frac{u_n}{\ln n}} = \frac{n+1}{n};$$

предѣлъ этого перваго отношенія есть единица.

Далѣе составляемъ

$$\frac{1}{\frac{nu_n}{\ln n}} = \frac{\ln n}{n \ln n},$$

что въ предѣлѣ даетъ нуль. Значитъ, рядъ—расходящійся.

#### П Р А В И Л О Г А У С С А

**§ 242.** Гауссъ далъ въ одномъ изъ своихъ мемуаровъ правило сходимости для рядовъ съ положительными членами, которое, не являясь общимъ подобно предыдущимъ, прилагается, однако, къ многочисленному и важному классу рядовъ. Кромѣ того, доказательство, данное знаменитымъ авторомъ, настолько изящно, что заслуживаетъ быть приведеннымъ уже само по себѣ.

Данъ рядъ

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (A)$$

Предположимъ, что отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  выражается раціональною функціею отъ числа  $n$  членовъ, предшествующихъ  $u_n$ , такъ что

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \dots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \dots} \quad (1)$$

Такъ какъ это отношеніе, очевидно, стремится къ единицѣ, то рядъ не изъ тѣхъ, къ которымъ приложимо правило § 230-го. Теорема Гаусса состоитъ въ слѣдующемъ:

*Если первая изъ разностей:  $A-a$ ,  $B-b$ , ..., не обращающаяся въ нуль, положительна, то члены возрастаютъ одновременно съ  $n$ , и рядъ—сходящійся.*

*Если первая изъ этихъ разностей, не обращающаяся въ нуль, отрицательна, то члены ряда убываютъ съ возрастаніемъ  $n$ .*

*Если коэффициенты  $A$  и  $a$  не равны, то члены возрастаютъ безпредѣльно или стремятся неопредѣленно къ нулю; если, наоборотъ,  $A-a$  равно нулю, то члены ряда стремятся къ конечному предѣлу, отличному отъ нуля.*

*Только въ одномъ случаѣ возможна сходимость, когда разность  $A-a$  отлична отъ нуля и отрицательна; въ этомъ случаѣ, если  $A+1-a$  положительно или равно нулю, то рядъ—расходящійся, а если  $A+1-a$  отрицательно, то рядъ—сходящійся.*

Докажемъ эти теоремы въ послѣдовательномъ порядкѣ.

1. Если первая изъ разностей:  $A-a$ ,  $B-b$ , ..., не обращающаяся въ нуль, положительна, то отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  для достаточно большихъ значеній  $n$  будетъ, судя по выраженію (1), постоянно больше единицы и, слѣдовательно, члены ряда будутъ идти, увеличиваясь.

2. Если первая изъ разностей:  $A-a$ ,  $B-b$ , ..., не обращающаяся въ нуль, отрицательна, то отношеніе  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  для достаточно большихъ значеній  $n$  меньше единицы и, слѣдовательно, члены ряда идутъ, уменьшаясь.

3. Если первые коэффиціенты  $A$  и  $a$  не равны, то члены ряда растутъ безпредѣльно, когда  $A-a$  положительно, и стремятся къ нулю, когда  $A-a$  отрицательно.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что  $A-a$  положительно; пусть будетъ  $h$  такое цѣлое число, что

$$h(A-a) > 1;$$

вводимъ обозначенія:

$$\frac{u_1^h}{1} = v_1, \quad \frac{u_2^h}{2} = v_2, \quad \dots, \quad \frac{u_n^h}{n} = v_n. \quad (2)$$

Въ рядѣ

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots$$

отношеніе общаго члена къ его предыдущему есть

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)^h \frac{n}{n+1},$$

т.-е., послѣ замѣны  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  его значеніемъ,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^{h+1} + hAn^h + \dots}{n^{h+1} + (ha+1)n^h + \dots},$$

и такъ какъ мы предположили  $hA > ha+1$ , то отношеніе  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  больше единицы при

$n$  очень большомъ; такимъ образомъ,  $\frac{u_n^h}{n}$  увеличивается вмѣстѣ съ  $n$  и, слѣдовательно,  $u_n$  бесконечно-велико одновременно съ  $n$ .

Когда  $A-a$  отрицательно, то для доказательства, что  $u_n$  стремится къ нулю, достаточно разсмотрѣть рядъ

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} + \dots;$$

отношеніе общаго члена къ его предыдущему будетъ

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + \dots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + \dots},$$

откуда заключаемъ, что  $\frac{1}{u_n}$ , по предыдущему, растеть безпредѣльно и, слѣдовательно,  $u_n$  стремится къ нулю.

4. Если  $A = a$ , то члены ряда стремятся къ определенному предѣлу, отличному и отъ нуля, и отъ безконечности.

Предположимъ сначала, что при  $A$ , равномъ  $a$ , первая изъ разностей:  $A - a$ ,  $B - b$ , ..., не равная нулю, положительна; пусть  $h$  будетъ такое цѣлое число, что

$$h + b - B > 1;$$

вводимъ обозначенія:

$$u_n \left( \frac{n}{n-1} \right)^h = v_n, \quad u_{n+1} \left( \frac{n+1}{n} \right)^h = v_{n+1}, \quad u_{n+2} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^h = v_{n+2}, \dots \quad (3)$$

Въ рядѣ съ общимъ членомъ  $v_n$  отношеніе всякаго члена къ предыдущему выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{(n^2 - 1)^h}{n^{2h}} = \frac{n^{\lambda+2h} + An^{\lambda+2h-1} + (B-h)n^{\lambda+2h-2}}{n^{\lambda+2h} + An^{\lambda+2h-1} + bn^{\lambda+2h-2} + \dots};$$

по предположенію же

$$B - h < b,$$

значитъ, общій членъ  $v_n$  уменьшается съ увеличеніемъ  $n$ ; въ силу же равенствъ (3)  $u_n$  меньше  $v_n$  по абсолютной величинѣ, и такъ какъ  $v_n$  уменьшается, то невозможно, чтобы  $u_n$  увеличивалось безпредѣльно; зная же, что этотъ послѣдній членъ растеть одновременно съ  $n$ , заключаемъ, что онъ необходимо стремится къ конечному предѣлу.

Если первая, не обращающаяся въ нуль, разность отрицательна, то можно приложить предыдущее разсужденіе къ ряду:

$$\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} + \dots;$$

члены этого ряда стремятся къ конечному предѣлу, — слѣдовательно, то же будетъ и съ обратными имъ величинами  $u_1, u_2, \dots, u_n$ .

5. Если  $A - a + 1$  положительно или равно нулю, то рядъ — расходящійся.

Пусть  $h$  будетъ достаточно большое цѣлое положительное число; полагаемъ

$$v_n = u_n (n - h), \quad v_{n+1} = u_{n+1} (n - h + 1), \quad v_{n+2} = u_{n+2} (n - h + 2), \dots; \quad (4)$$



въ такомъ случаѣ

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{n-h+1}{n-h} = \frac{n^{\lambda+1} + (A-h+1)n^{\lambda} + [B-A(h-1)]n^{\lambda-1} + \dots}{n^{\lambda+1} + (a-h)n^{\lambda} + (b-ah)n^{\lambda-1} + \dots}.$$

Если  $A+1-a$  положительно, то  $v_n$  увеличивается вмѣстѣ съ  $n$  при достаточно большомъ  $n$ , потому что коэффициентъ при  $n^{\lambda}$  въ числитель больше, чѣмъ въ знаменателѣ.

Если  $A+1-a$  равно нулю, то  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  все же больше единицы, не смотря на равенство коэффициентовъ при  $n^{\lambda}$ , такъ какъ далѣе коэффициентъ при  $n^{\lambda-1}$  больше въ числитель, если  $h$  предположено достаточно большимъ; такимъ образомъ, въ обоихъ случаяхъ при достаточно большомъ  $n$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1.$$

Слѣдовательно, замѣняя  $v_n$  и  $v_{n+1}$  ихъ значеніями и вмѣсто  $n$  вставляя  $n+1, n+2, \dots$ , можемъ написать:

$$u_{n+1} > u_n \frac{n-h}{n-h+1}, \quad u_{n+2} > u_{n+1} \frac{n-h+1}{n-h+2}, \quad u_{n+3} > u_{n+2} \frac{n-h+2}{n-h+3}, \dots,$$

откуда безъ труда выводимъ:

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots > (n-h) u_n \left( \frac{1}{n-h} + \frac{1}{n-h+1} + \frac{1}{n-h+2} + \dots \right), \quad (5)$$

и такъ какъ рядъ во второй части этого неравенства расходящійся, то и подавно расходящійся данный рядъ, образующій первую часть того же неравенства.

6. Если  $A-a+1$  отрицательно, то рядъ—сходящійся.

Пусть въ этомъ случаѣ  $h$  будетъ положительное число, меньшее  $a-A-1$ ; можно утверждать, что при достаточно большомъ  $n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{n-h-1}{n}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, это неравенство приводится къ

$$\frac{nu_{n+1}}{(n-h-1)u_n} < 1;$$

съ другой же стороны,

$$\frac{nu_{n+1}}{(n-h-1)u_n} = \frac{n^{\lambda+1} + An^{\lambda} + Bn^{\lambda-1} + \dots}{n^{\lambda+1} + (a-h-1)n^{\lambda} + [b-(h+1)a]n^{\lambda-1} + \dots}.$$

А такъ какъ  $A - a + 1 + h < 0$ , то эта дробь, для большихъ значеній  $n$ , постоянно меньше единицы. Поэтому

$$u_{n+1} < u_n \frac{n-h-1}{n}, \quad u_{n+2} < u_{n+1} \frac{n-h}{n+1} < u_n \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)},$$

$$u_{n+3} < u_{n+2} \frac{n-h+1}{n+2} < u_n \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

и, слѣдовательно,

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < u_n \left[ 1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \dots \right]. \quad (6)$$

Сумму членовъ въ скобкахъ во второй части этого неравенства легко вычислить. Для какого-угодно значенія  $n$  имѣемъ:

$$1 = \frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{nh},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{h n (n+1)},$$

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \dots + \frac{(n-h-1)(n-h)\dots(n-h+p)}{n(n+1)\dots(n+p+1)} =$$

$$= \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)\dots(n-h+p+1)}{h n (n+1)\dots(n+p+1)}.$$

Послѣдняя дробь стремится къ нулю съ увеличеніемъ  $p$ ; дѣйствительно, если назвать черезъ  $v_p$  общую ея величину, то

$$\frac{v_{p+1}}{v_p} = \frac{n-h+p+2}{n+p+2} = \frac{p+(n-h+2)}{p+(n+2)};$$

слѣдовательно, разность, обозначенная выше черезъ  $A - a$ , отрицательна, и  $v_p$  стремится къ нулю. Такимъ образомъ, рядъ во второй части неравенства (6)—сходящійся, и, значитъ, невозможно, чтобы первая часть  $u_n + u_{n+1} + \dots$  увеличивалась безпредѣльно. Итакъ, рядъ съ общимъ членомъ  $u_n$ —сходящійся.

#### Методъ Куммера

**§ 243.** Куммеръ далъ методъ, съ помощью котораго во многихъ случаяхъ можно судить о сходимости рядовъ съ положительными членами. Этотъ методъ отличается отъ предыдущихъ признаковъ большою неопредѣленностью въ способѣ приложенія, что даетъ большой просторъ тѣмъ, кто искусно умѣетъ пользоваться такимъ преимуществомъ.

Данъ рядъ съ положительными членами

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

Пусть  $\varphi(n)$  какая-нибудь функція отъ  $n$  и  $a$  — произвольная постоянная; полагаемъ

$$\psi(n) = \frac{\varphi(n)u_n}{a} - \left[ \frac{\varphi(n+1)}{a} + 1 \right] u_{n+1} \quad (2)$$

и пишемъ тождество:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+k} = \frac{\varphi(n)u_n}{a} - [\psi(n) + \psi(n+1) + \dots + \psi(n+k-1)] - \frac{\varphi(n+k)u_{n+k}}{a},$$

въ справедливости котораго не трудно убѣдиться, подставляя на мѣсто  $\psi(n)$ ,  $\psi(n+1)$ , ... ихъ значенія изъ уравненія (2).

Предположимъ теперь, что  $\varphi(n)u_n$  для очень большихъ значеній  $n$  стремится къ нулю и что, кромѣ того,  $\psi(n)$ ,  $\psi(n+1)$ , ... всѣ положительны; ясно, что первая часть послѣдняго равенства, будучи положительною, стремится сама къ нулю, каково бы ни было  $k$ , и что, слѣдовательно, рядъ — сходящійся; такимъ образомъ, мы имѣемъ слѣдующую теорему:

*Если  $\varphi(n)$  такая функція отъ  $n$ , что  $\varphi(n)u_n$  стремится къ нулю съ увеличеніемъ  $n$  и если, кромѣ того, разность:*

$$\frac{\varphi(n)u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)u_{n+1}}{a} - u_{n+1}$$

*положительна при  $n$  бесконечно-огромномъ, то рядъ — сходящійся.*

Предполагая  $a$  положительнымъ, мы можемъ условіе:

$$\frac{\varphi(n)u_n}{a} - \frac{\varphi(n+1)u_{n+1}}{a} - u_{n+1} > 0$$

переписать въ видѣ:

$$\frac{\varphi(n)u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1) > a;$$

такъ какъ  $a$  — произвольно, то это условіе всегда будетъ выполнено, если  $\frac{\varphi(n)u_n}{u_{n+1}} - \varphi(n+1)$  въ предѣлѣ больше нуля.

**§ 244.** Куммеръ далъ вторую теорему, которая во множествѣ случаевъ даетъ возможность утверждать, что рядъ съ положительными членами — расходящійся.

Сохранимъ обозначенія предыдущаго параграфа и, кромѣ того, положимъ

$$\varphi(n)u_n - \varphi(n+1)u_{n+1} = u_{n+1}f(n). \quad (3)$$

Замѣняемъ послѣдовательно  $n$  черезъ  $n+1$ ,  $n+2$ ,  $n+3$ , ... и складываемъ по-членно полученные уравненія; тогда, такъ какъ  $u_n \varphi(n)$  равно нулю при  $n$  бесконечно-огромномъ,

$$\varphi(n)u_n = u_{n+1}f(n) + u_{n+2}f(n+1) + u_{n+3}f(n+2) + \dots,$$

или, по раздѣленіи на  $f(n)$ ,

$$\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)} = u_{n+1} + u_{n+2} \frac{f(n+1)}{f(n)} + u_{n+3} \frac{f(n+2)}{f(n)} + \dots$$

Если теперь  $f(n)$  стремится къ нулю съ увеличеніемъ  $n$ , то коэффициенты во второй части при членахъ первоначальнаго ряда всѣ меньше единицы и, слѣдовательно,

$$\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)} < u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$$

Поэтому, если  $\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)}$  не нуль при  $n$  бесконечно-огромномъ, то сумма членовъ, слѣдующихъ за какимъ-угодно членомъ, не равна въ предѣлѣ нулю, когда порядокъ этого члена безпредѣльно увеличивается, и рядъ, очевидно, расходящійся; итакъ, мы можемъ высказать слѣдующую теорему:

*Если  $\varphi(n)$  есть такая функція отъ значка  $n$ , что произведение  $\varphi(n)u_n$  равно нулю при  $n$  бесконечно-огромномъ и если, кромѣ того, изъ двухъ выраженій:*

$$f(n) = \frac{u_n \varphi(n)}{u_{n+1}} - \varphi(n+1)$$

*и*

$$\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)}$$

*первое обращается въ нуль при  $n$  бесконечно-огромномъ, а второе—положительно, то рядъ—расходящійся.*

**§ 245.** Для примѣра рассмотримъ рядъ

$$\frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \dots + \frac{1}{n!n} + \dots,$$

расходимость котораго доказана въ § 236-мъ. Беремъ  $\varphi(n) = n$ , тогда

$$\varphi(n)u_n = \frac{1}{n!}.$$

Это произведение стремится къ нулю. Кромѣ того, имѣемъ:

$$f(n) = \frac{(n+1)! (n+1)}{n!} - (n+1) = \frac{n+1}{n!} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$



Безъ труда замѣчаемъ, что  $f(n)$  равно нулю при  $n$  бесконечно-огромномъ. Имѣемъ, наконецъ,

$$\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)} = \frac{1}{(n+1)l\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

что въ предѣлѣ равно единицѣ и, слѣдовательно, рядъ (1) — расходящійся.

Пусть будетъ данъ еще такой рядъ:

$$\frac{1}{(2!2)^2} + \frac{1}{(3!3)^2} + \dots + \frac{1}{(n!n)^2} + \dots$$

Беремъ  $\varphi(n) = n!n$ , тогда

$$\varphi(n)u_n = \frac{1}{ln}.$$

Это произведение стремится къ нулю. Кромѣ того, имѣемъ:

$$\frac{\varphi(n)u_n}{u_{n+1}} = \varphi(n+1) = \frac{(n+1)[l(n+1)]^2}{ln} = (n+1)l(n+1) = \frac{(n+1)l(n+1)}{ln} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Не трудно замѣтить, что при  $n$  бесконечно-огромномъ это выраженіе обращается въ единицу и, слѣдовательно, рядъ — сходящійся.

Ряды съ членами попеременно положительными и отрицательными

**§ 246.** Для рядовъ, члены которыхъ не всѣ положительны, повидимому, трудно дать общіе признаки сходимости. Мы ограничимся нѣсколькими простыми, но очень важными, замѣчаніями.

**Теорема I.**—*Если члены ряда таковы, что послѣ замѣны каждаго изъ нихъ положительнымъ членомъ съ тою же абсолютною величиною рядъ явится сходящимся, то и первоначальный — также сходящійся, каковы бы ни были порядокъ и знаки его членовъ.*

Дѣйствительно, можно разсматривать отдѣльно положительные и отдѣльно отрицательные члены, какъ образующіе два различныхъ ряда, оба сходящихся; въ самомъ дѣлѣ, сумма и тѣхъ, и другихъ, взятыхъ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, остается, по предположенію, менѣе нѣкотораго предѣла, а слѣдовательно, и подавно сумма какого-угодно одного изъ нихъ меньше того же предѣла, иначе говоря, каждый изъ нихъ представляетъ сходящійся рядъ.

Пусть теперь число членовъ ряда растетъ безгранично; число членовъ отдѣльно положительныхъ и отдѣльно отрицательныхъ станетъ безпредѣльно увеличиваться и, слѣдовательно, ихъ сумма все ближе и ближе будетъ подходить къ разности предѣловъ обоихъ рядовъ.

Это заключеніе не зависитъ отъ порядка членовъ; значитъ, мы можемъ его выбрать по своему желанію, лишь бы только ихъ абсолютныя значенія, взятые съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, образовали, согласно нашему предположенію, сходящійся рядъ.

§ 247. Теорема, обратная предыдущей, не всегда справедлива: рядъ можетъ быть сходящимся и въ томъ случаѣ, когда сумма абсолютныхъ значеній его членовъ безконечно огромна. Мы докажемъ только слѣдующую теорему:

**Теорема II.**—*Если члены ряда попеременно положительны и отрицательны и идутъ, безпредѣльно уменьшаясь такъ, что каждый изъ нихъ меньше своего предыдущаго, то рядъ—сходящійся.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть данъ рядъ съ вещественными членами

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_n - u_{n+1} + \dots,$$

попеременно положительными и отрицательными, безпредѣльно уменьшающимися.

Остановимся послѣдовательно на членахъ  $u_n$  и  $u_{n+1}$  и положимъ:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 - u_1 + u_2 - \dots + u_n, \\ S_{n+1} &= u_0 - u_1 + u_2 - \dots + u_n - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Какъ бы далеко мы ни продолжали рядъ за  $u_n$  и на какомъ бы членѣ ни остановились, сумма будетъ больше  $S_n$  и меньше  $S_{n+1}$ . Дѣйствительно, сумма членовъ, прибавляемыхъ къ  $S_n$ , есть вида:

$$-(u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - (u_{n+5} - u_{n+6}) - \dots$$

и, слѣдовательно, отрицательна; сумма же членовъ, прибавляемыхъ къ  $S_{n+1}$ , наоборотъ, положительна, такъ какъ можетъ быть представлена въ видѣ:

$$(u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) + \dots$$

Отсюда заключаемъ, что рядъ, продолженный какъ угодно далеко, постоянно содержится между двумя числами  $S_n$  и  $S_{n+1}$ , разность между которыми  $u_{n+1}$  можетъ быть сдѣлана сколь угодно малою. Слѣдовательно, сходимостъ—очевидна.

§ 248. Когда члены ряда по своему абсолютному значенію не образуютъ сходящагося ряда и, значитъ, сходимостъ зависитъ отъ ихъ знаковъ, то нельзя измѣнять порядокъ, въ которомъ они выписаны; въ противномъ случаѣ, рядъ можетъ не только измѣнить свою величину, но даже потерять и сходимостъ.

Дирихле первый обратилъ вниманіе геометровъ на это обстоятельство, приведя слѣдующій примѣръ:

Ряды:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots, \\ &1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots, \end{aligned}$$

состоящіе изъ однихъ и тѣхъ же членовъ съ одними и тѣми же знаками, не стремятся, однако, къ общему предѣлу; не трудно доказать, что если первый изъ нихъ представить буквою  $S$ , то второй будетъ  $\frac{3}{2} S$ .

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots = \sum \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right),$$

гдѣ знакъ  $\sum$  распространяется на всѣ цѣлыя значенія  $n$ . Также, называя  $S'$  вторую сумму, имѣемъ:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \dots$$

и, слѣдовательно,

$$S' = \sum \left( \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

А такъ какъ, далѣе, сумма  $S$ , очевидно, можетъ быть написана въ видѣ:

$$S = \sum \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right),$$

то

$$\begin{aligned} S' - S &= \sum \left( \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} \right) = \sum \left( \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} S, \end{aligned}$$

откуда  $S' = \frac{3}{2} S$ , при чемъ самое значеніе  $S$  мы можемъ и не знать.

#### Мнимые ряды

**§ 249.** Ряды съ мнимыми членами считаются сходящимися, если отдѣльно вещественныя части и отдѣльно коэффициенты при  $\sqrt{-1}$ , въ каждомъ членѣ, образуютъ сходящіеся ряды.

Мнимому выраженію  $a + b\sqrt{-1}$  очень часто бываетъ выгодно придавать видъ:

$$\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

при чемъ  $\rho$  положительно; не трудно доказать, что это всегда возможно. Коэффициентъ  $\rho$ , равный  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , называется *модулемъ* мнимаго выраженія, а уголъ  $\varphi$ —его *аргументомъ*.  
Слѣдовательно, мнимый рядъ,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

можетъ быть написанъ слѣдующимъ образомъ:

$$\rho_1 (\cos \varphi_1 + \sqrt{-1} \sin \varphi_1) + \rho_2 (\cos \varphi_2 + \sqrt{-1} \sin \varphi_2) + \dots + \rho_n (\cos \varphi_n + \sqrt{-1} \sin \varphi_n) + \dots$$

и, чтобы онъ былъ сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы каждый изъ двухъ рядовъ:

$$\begin{aligned} \rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2 + \dots + \rho_n \cos \varphi_n + \dots, \\ \rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2 + \dots + \rho_n \sin \varphi_n + \dots \end{aligned}$$

былъ сходящимся.

Это условіе, очевидно, будетъ выполнено, если рядъ

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n + \dots$$

самъ по себѣ—сходящійся; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ, такъ какъ всѣ его члены положительны, всякій рядъ съ членами соотвѣтственно меньшими по абсолютной величинѣ необходимо сходящійся. Обратное предложеніе не всегда справедливо, но общій признакъ сходимости дать трудно. Мы ограничимся доказательствомъ слѣдующей теоремы, которая прилагается къ одному весьма важному классу мнимыхъ рядовъ:

*Если въ рядѣ*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

*коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  уменьшаются и стремятся къ нулю, такъ что каждый изъ нихъ меньше предыдущаго, то можно утверждать, что рядъ—сходящійся при всякомъ значеніи  $x$ , модуль котораго есть единица, исключая лишь одного значенія  $x = 1$ , при которомъ является сомнѣніе.*

Обозначимъ черезъ  $P_n$  сумму  $n + 1$  первыхъ членовъ ряда, т.-е. положимъ

$$P_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n; \quad (2)$$

отсюда выводимъ:

$$(1 - x)P_n = a_0 - a_n x^{n+1} + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots + (a_n - a_{n-1})x^n. \quad (3)$$

Если дать  $x$  значеніе, модуль котораго единица, т.-е. значеніе вида:

$$\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

то  $a_n x^{n+1}$  при безпредѣльномъ возрастаніи  $n$  будетъ стремиться къ нулю, потому что имѣетъ множителемъ  $a_n$ , и рядъ съ общимъ членомъ

$$(a_n - a_{n-1})x^n \quad (4)$$

сходящійся. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$x^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi,$$

откуда заключаемъ, что какъ вещественная, такъ и мнимая часть  $x^n$  меньше единицы по абсолютной величинѣ; значитъ, у такого члена какъ (4) и вещественная часть, и ко-



эффиціентъ при  $\sqrt{-1}$  въ мнимой части оба меньше  $a_n - a_{n-1}$ . Съ другой стороны, рядъ съ отрицательными членами, общій членъ котораго есть  $(a_n - a_{n-1})$ ,

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + \dots,$$

очевидно, сходящійся и имѣетъ предѣломъ  $-a_0$ ; слѣдовательно, и подавно будутъ сходящимися оба ряда, члены которыхъ меньше по абсолютной величинѣ. Такимъ образомъ, произведеніе  $P_n$  на  $(1 - x)$  стремится къ опредѣленному предѣлу и, за исключеніемъ случая, когда  $x = 1$ , то же относится къ  $P_n$ . Предыдущее предложеніе можно высказать въ слѣдующей формѣ: если коэффиціенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  идутъ, уменьшаясь, и стремятся къ нулю, то ряды

$$a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + \dots + a_n \cos n\varphi + \dots, \quad (5)$$

$$a_1 \sin \varphi + a_2 \sin 2\varphi + \dots + a_n \sin n\varphi + \dots \quad (6)$$

сходящіеся при всякомъ значеніи угла  $\varphi$ , исключая всякій разъ, для перваго изъ нихъ, предположенія  $\varphi = 0$ .

Предполагая же  $\varphi = \pi$ , переписываемъ первый изъ этихъ рядовъ въ видѣ:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

и находимъ, что для этого случая теорема уже доказана (§ 247).

### ПРЕОБРАЗОВАНІЕ ЭЙЛЕРА

**§ 250.** Данный рядъ можно преобразовать въ другой то посредствомъ новой группировки членовъ, то, напротивъ, посредствомъ разложенія каждаго члена на конечное или бесконечное число частей, то, наконецъ, посредствомъ прибавленія новыхъ членовъ, въ совокупности равныхъ нулю. Одно изъ извѣстнѣйшихъ преобразованій далъ Эйлеръ для ряда, расположеннаго по степенямъ перемѣнной.

Данъ рядъ

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \dots + u_n x^n + \dots \quad (1)$$

Полагая

$$x = \frac{y}{1 + y}, \quad (2)$$

пишемъ:

$$S = u_0 + u_1 \frac{y}{1 + y} + u_2 \frac{y^2}{(1 + y)^2} + u_3 \frac{y^3}{(1 + y)^3} + \dots \quad (3)$$

Но такъ какъ (§ 225)

$$\begin{aligned} \frac{y}{1 + y} &= y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots \pm y^n \mp \dots, \\ \frac{y^2}{(1 + y)^2} &= y^2 - 2y^3 + 3y^4 - 4y^5 + \dots \pm ny^{n+1} \mp \dots, \\ \frac{y^3}{(1 + y)^3} &= y^3 - 3y^4 + 6y^5 - \dots \pm \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} y^{n+2} \mp \dots, \end{aligned}$$

то, замѣняя каждый членъ ряда (3) его разложеніемъ и соединяя коэффициенты при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ  $y$ , находимъ:

$$S = u_0 + u_1 y + (u_2 - u_1) y^2 + (u_3 - 2u_2 + u_1) y^3 + (u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1) y^4 + \dots,$$

или, по извѣстнымъ формуламъ изъ теоріи разностей,

$$S = u_0 + y u_1 + y^2 \Delta u_1 + y^3 \Delta^2 u_1 + y^4 \Delta^3 u_1 + \dots + y^n \Delta^{n-1} u_1 + \dots;$$

подставляя же изъ уравненія (2) значеніе  $y$ ,

$$y = \frac{x}{1-x},$$

можемъ написать:

$$S = u_0 + u_1 \frac{x}{1-x} + \Delta u_1 \frac{x^2}{(1-x)^2} + \dots + \Delta^{n-1} u_1 \frac{x^n}{(1-x)^n} + \dots$$

Если положить  $x = -1$ , то  $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$ ; рядъ  $S$  будетъ:

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots$$

и въ преобразованномъ видѣ:

$$S = u_0 - \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 - \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_1 - \dots$$

§ 251. Какъ мы увидимъ, предыдущее преобразование замѣчательно и очень полезно при числовомъ исчисленіи рядовъ; но прежде чѣмъ перейти къ приложеніямъ, замѣтимъ, что оно не имѣетъ мѣста, если какой-нибудь изъ рассматриваемыхъ рядовъ перестаетъ быть сходящимся. Трудно понять, напр., почему нашли возможнымъ примѣнить его къ рядамъ:

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots, \\ S &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots \end{aligned}$$

и вывели для перваго значеніе  $\frac{1}{2}$ , а для втораго  $\frac{1}{4}$ , думая этимъ оправдать употребленіе рядовъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \\ \frac{1}{(1+x)^2} &= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \end{aligned}$$

въ томъ случаѣ, когда  $x$  равно единицѣ и когда они перестаютъ быть сходящимися. Полезно, однако, остановиться на этомъ обстоятельстве. Преобразованію расходящагося

ряда въ томъ даже случаѣ, когда изъ него получается сходящійся рядъ, не слѣдуетъ придавать никакого значенія, если только новое доказательство не сообщитъ ему какого-нибудь опредѣленнаго смысла; иногда этимъ доказательствомъ можно воспользоваться, такъ какъ доказано равенство обоихъ рядовъ, какъ первообразнаго, такъ и преобразованнаго, въ томъ случаѣ, когда оба они — сходящіеся и, слѣдовательно, представляютъ два разложенія одной и той же функціи. Если, затѣмъ, одинъ изъ нихъ при нѣкоторомъ предположеніи окажется расходящимся, то другой, оставаясь сходящимся, еще будетъ выражать собою функцію, что, повидимому, оправдываетъ тѣхъ, по ученію которыхъ другой рядъ также ее представляетъ, хотя самъ уже сталъ расходящимся, и которые, на самомъ дѣлѣ, сдѣлали бы лишь двойную ошибку, а именно, получили бы незаконное преобразование и ничего не выражающій расходящійся рядъ.

Разсмотримъ, напр., рядъ

$$2x + \frac{2^2}{2} x^2 + \frac{2^3}{3} x^3 + \frac{2^4}{4} x^4 + \dots \quad (1)$$

При

$$x = \frac{y}{1+y} \quad (2)$$

онъ переходитъ въ рядъ

$$2y + \frac{2}{3} y^3 + \frac{2}{5} y^5 + \frac{2}{7} y^7 + \dots + \frac{2}{2n+1} y^{2n+1} + \dots \quad (3)$$

Не трудно убѣдиться, что числовое вычисленіе первыхъ членовъ послѣдняго ряда позволяетъ замѣтить законъ, а затѣмъ можно доказать \*), что, полагая

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = \frac{2^2}{2}, \quad u_3 = \frac{2^3}{3}, \quad u_4 = \frac{2^4}{4}, \dots, u_n = \frac{2^n}{n}, \dots,$$

---

\*) Равносильное обратное предложеніе доказать еще легче. Если даны значенія  $\Delta u_1, \Delta^2 u_1, \dots, \Delta^n u_1, \dots$ , то по извѣстной формулѣ изъ теоріи разностей

$$u_{n+1} = u_1 + n\Delta u_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_1 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} \Delta^p u_1 + \dots + \Delta^n u_1.$$

Послѣ же замѣны  $u_1$  и его разностей указанными значеніями вторая часть приметъ видъ:

$$2 + \frac{2}{3} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2}{5} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots,$$

т.-е. будетъ равна  $\frac{2^{n+1}}{n+1}$ , потому что это послѣднее выраженіе точно представляетъ  $\frac{(1+x)^{n+1} - (1-x)^{n+1}}{n+1}$  при  $x=1$ .

будемъ имѣть:

$$\Delta u_1 = 0, \quad \Delta^2 u_1 = \frac{2}{3}, \quad \Delta^3 u_1 = 0, \quad \Delta^4 u_1 = \frac{2}{5}, \dots, \quad \Delta^{2n} u_1 = \frac{2}{2n+1};$$

при  $x = -1$  имѣемъ  $y = -\frac{1}{2}$ , и рядъ

$$2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \dots \quad (4)$$

преобразовывается, такимъ образомъ, въ рядъ

$$1 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots \quad (5)$$

Но первый рядъ—расходящійся, а второй—сходящійся,—значить, равенство между ними невозможно. Однако, рядъ (4), какъ мы увидимъ, представляетъ  $1(1-2x)$  при  $x = -1$ . Поборники расходящихся рядовъ должны, поэтому, сказать, что онъ равенъ 13; рядъ же (5), сходящійся, можно получить, развертывая выраженіе  $1\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$ , которое является въ этомъ случаѣ сходящимся и, дѣйствительно, представляетъ 13. Преобразование Эйлера приводитъ, такимъ образомъ, къ парадоксальному результату, что расходящійся рядъ можетъ служить для числового вычисленія функціи, которую онъ долженъ былъ бы выражать, еслибы формулы были общими.

**§ 252.** Изъ способа, съ помощью котораго мы получили формулу преобразованія Эйлера, никоимъ образомъ еще не видно, въ какихъ случаяхъ онъ выгоденъ, и нельзя также указать предѣла допускаемой ошибки, когда останавливаемся на какомъ-нибудь опредѣленномъ членѣ преобразованнаго ряда. Поэтому мы снова займемся этой важной формулой и дадимъ другое доказательство, свободное отъ замѣченныхъ нами неудобствъ.

Пусть данъ рядъ

$$S = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \dots, \quad (1)$$

въ которомъ  $u_0, u_1, \dots, u_n$  — положительные убывающія числа. Пусть  $S$  будетъ предѣломъ этого ряда, а  $s_n$  — суммою  $n$  первыхъ его членовъ. Если ввести обычное обозначеніе разности  $u_{n+1} - u_n$  черезъ  $\Delta u_n$ , то рядъ можно представить подъ двумя слѣдующими видами:

$$\left. \begin{aligned} S &= s_n - \Delta u_n - \Delta u_{n+2} - \Delta u_{n+4} - \dots, \\ S &= s_n + u_n + \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+3} + \Delta u_{n+5} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и такъ какъ сумма  $S$ , будучи равна каждому изъ этихъ двухъ выраженій, равна ихъ полусуммѣ, то

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} (\Delta u_n - \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+2} - \Delta u_{n+3} + \dots). \quad (3)$$



Если разности  $\Delta u_n, \Delta u_{n+1}, \Delta u_{n+2}, \dots$ , которые всё отрицательны, идутъ уменьшаясь по абсолютной величинѣ, что обыкновенно и бываетъ въ большинствѣ случаевъ, то рядъ въ скобкахъ такого же характера, какъ и заданный, и его полное значеніе меньше его перваго члена, такъ что, принимая

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n, \quad (4)$$

мы допустимъ ошибку меньше  $\frac{1}{2} \Delta u_n$ . Если бы мы приняли

$$S = s_n + u_n, \quad (5)$$

то допущенная ошибка была бы меньше  $u_{n+1}$ . Такъ какъ  $\Delta u_n$  отрицательно, то нужно предпочесть формулу (4) формулѣ (5), всякій разъ какъ

$$-\frac{1}{2} \Delta u_n < u_{n+1},$$

т.-е.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &< 2u_{n+1}, \\ u_n &< 3u_{n+1}. \end{aligned}$$

Это соотношеніе всегда будетъ имѣть мѣсто для медленно сходящихся рядовъ, члены которыхъ убываютъ также медленно.

Равенство:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} (\Delta u_n - \Delta u_{n+1} + \Delta u_{n+2} - \dots) \quad (6)$$

можетъ быть написано въ слѣдующемъ видѣ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} \Delta u_n + \frac{1}{2} (\Delta u_{n+1} - \Delta u_{n+2} + \Delta u_{n+3} - \dots); \quad (7)$$

въ силу же соотношенія  $\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$  мы можемъ формулы (6) и (7) переписать такъ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} (\Delta^2 u_n + \Delta^2 u_{n+2} + \Delta^2 u_{n+4} + \dots), \quad (8)$$

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} \Delta u_n - \frac{1}{2} (\Delta^3 u_{n+1} + \Delta^3 u_{n+3} + \dots), \quad (9)$$

откуда, беря полусумму этихъ равенствъ, находимъ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{4} (\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+2} - \Delta^2 u_{n+3} + \dots).$$

Если разности  $\Delta^2 u_n, \Delta^2 u_{n+1}, \Delta^2 u_{n+2}, \dots$  — одного знака и идутъ уменьшаясь, то рядъ въ скобкахъ будетъ того же характера, что и данный, и отбрасывая его цѣликомъ, мы сдѣлаемъ ошибку меньше его перваго члена. Поэтому можно принять

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n$$

съ ошибкою меньше  $\frac{1}{4} \Delta^2 u_n$ . Далѣе, формула

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{4} (\Delta^2 u_n - \Delta^2 u_{n+1} + \Delta^2 u_{n+2} - \dots)$$

можетъ быть написана такъ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{4} (\Delta^3 u_n + \Delta^3 u_{n+2} + \dots)$$

и равенство (9) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{4} \Delta^2 u_n + \frac{1}{4} (\Delta^3 u_{n+1} + \Delta^3 u_{n+2} + \dots);$$

беря полусумму этихъ значеній  $S$ , находимъ:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{8} \Delta^2 u_n - \frac{1}{4} (\Delta^3 u_n - \Delta^3 u_{n+1} + \Delta^3 u_{n+2} - \dots).$$

Если разности  $\Delta^3 u_n, \Delta^3 u_{n+1}, \dots$  — одного знака и притомъ убывающія, то рядъ въ скобкахъ, подобно предыдущимъ, будетъ меньше своего перваго члена, и, принимая

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{8} \Delta^2 u_n,$$

мы сдѣлаемъ ошибку меньше  $\frac{1}{8} \Delta^3 u_n$ .

Подобное разсужденіе можно продолжить какъ угодно далеко и написать:

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{8} \Delta^2 u_n - \frac{1}{16} \Delta^3 u_n + \dots - \frac{(-1)^p}{2^p} \Delta^{p-1} u_n,$$

при чемъ ошибка будетъ менѣе  $\frac{1}{2^p} \Delta^p u_n$ , лишь бы только для абсолютныхъ значеній членовъ ряда разности порядка ниже  $p$  были одного знака и притомъ убывающія.

Пусть, напр.,

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots;$$

въ этомъ случаѣ

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}, \quad \Delta u_n = \frac{-1}{n(n+1)}, \quad \Delta^2 u_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}, \\ \Delta^3 u_n &= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}, \\ \Delta^4 u_n &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \\ \Delta^5 u_n &= -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}; \end{aligned}$$

такимъ образомъ, условія предыдущаго доказательства выполнены. Полагая  $n=11$ , находимъ:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}, \\ u_n &= \frac{1}{11}, \quad \Delta u_n = -\frac{1}{11 \cdot 12}, \quad \Delta^2 u_n = \frac{2}{11 \cdot 12 \cdot 13}, \quad \Delta^3 u_n = -\frac{6}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}, \\ \Delta^4 u_n &= \frac{24}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}, \quad \Delta^5 u_n = -\frac{120}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}, \end{aligned}$$

и формула

$$S = s_n + \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{4} \Delta u_n + \frac{1}{8} \Delta^2 u_n - \frac{1}{16} \Delta^3 u_n + \frac{1}{32} \Delta^4 u_n - \frac{1}{64} \Delta^5 u_n$$

даетъ:

$$\begin{array}{r} S = 0,64563492 \\ + \quad 4545455 \\ + \quad 189394 \\ + \quad 14569 \\ + \quad 1561 \\ + \quad 208 \\ + \quad 33 \\ + \quad 1 \\ \hline \end{array}$$

т.-е.

$$S = 0,6931473$$

Этотъ рядъ, какъ увидимъ, представляетъ неперовъ логарифмъ 2 и семь его цифръ послѣ запятой вполне точны.

#### Методъ Стирлинга

**§ 253.** Мы должны привести еще одинъ методъ, предложенный Стирлингомъ въ 1717 г. для суммированія рядовъ и заключающійся въ преобразованіи каждого члена даннаго ряда въ бесконечный рядъ такого вида, что всѣ соотвѣтственные члены послѣ-

довательныхъ рядовъ могутъ быть легко суммированы. Часто случается, что съ помощью такого приѣма данный рядъ преобразовывается въ другой, весьма быстро сходящійся, рядъ, числовое вычисленіе котораго поэтому уже не представляетъ затрудненій.

Ряды, къ которымъ Стирлингъ старается свести всѣ другіе, суть слѣдующіе (§ 222):

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)} + \dots, \\ \frac{1}{2} \frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots, \\ \frac{1}{3} \frac{1}{z(z+1)(z+2)} &= \frac{1}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \frac{1}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \dots\end{aligned}$$

Въ большинствѣ случаевъ удастся достигъ этой цѣли, не прибѣгая всякій разъ къ общему правилу.

Слѣдующая формула есть одна изъ самыхъ замѣчательныхъ и только ее мы здѣсь приведемъ:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2 + nz} &= \frac{1}{z(z+1)} + \frac{1-n}{z(z+1)(z+2)} + \frac{(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \\ &+ \frac{(3-n)(2-n)(1-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)} + \dots;\end{aligned}$$

вторая часть представляетъ безконечный рядъ при  $n$  не цѣломъ. Доказательство, при этомъ, весьма легко; вычитая изъ первой части первый членъ второй, затѣмъ сумму двухъ первыхъ, далѣе—трехъ первыхъ, получаемъ послѣдовательно:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z+n)} - \frac{1}{z(z+1)} &= \frac{1-n}{z(z+1)(z+n)}, \\ \frac{1}{z(z+n)} - \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1-n}{z(z+1)(z+2)} &= \frac{(1-n)(2-n)}{z(z+1)(z+2)(z+n)}, \\ \frac{1}{z(z+n)} - \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1-n}{z(z+1)(z+2)} - \frac{(1-n)(2-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} &= \\ &= \frac{(1-n)(2-n)(3-n)}{z(z+1)(z+2)(z+3)(z+n)};\end{aligned}$$

значить, останавливая сумму на членѣ порядка  $p$ , мы дѣлаемъ ошибку

$$\frac{(1-n)(2-n)\dots(p-n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+p)(z+n)},$$

стремящуюся къ нулю (§ 242), лишь бы только  $z+n$  было положительнымъ.

**§ 254.** Пусть требуется суммировать рядъ

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$







ВЫВОДИМЪ:

$$\frac{\varphi(n)u_n}{f(n)} = u_{n+1} + \frac{f(n+1)}{f(n)} u_{n+2} + \frac{f(n+2)}{f(n)} u_{n+3} + \dots; \quad (3)$$

замѣчая же, что функціи  $f(n)$ ,  $f(n+1)$ ,  $f(n+2)$ , ... стремятся къ единицѣ, можемъ сказать, что, вообще, онѣ будутъ или всѣ больше единицы и убывающія, или всѣ меньше единицы и возрастающія. Въ первомъ случаѣ множители при  $u_{n+1}$ ,  $u_{n+2}$ , ... больше единицы въ уравненіи (2) и меньше единицы въ уравненіи (3); значитъ,

$$\begin{aligned} R &< \varphi(n)u_n, \\ R &> \frac{\varphi(n)u_n}{f(n)}. \end{aligned}$$

Во второмъ случаѣ  $f(n)$ ,  $f(n+1)$ , ... меньше единицы, — поэтому будетъ наоборотъ:

$$\begin{aligned} R &> \varphi(n)u_n, \\ R &< \frac{\varphi(n)u_n}{f(n)}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно,  $R$  въ обоихъ случаяхъ содержится между двумя извѣстными и весьма близкими между собою предѣлами, такъ какъ  $f(n)$  очень мало отличается отъ единицы.

Такимъ образомъ, вся трудность сводится къ опредѣленію функцій  $\varphi$  и  $f$  и понятно, что условія, которымъ онѣ подчинены, дадутъ мѣсто большой неопредѣленности.

Выберемъ для  $\varphi(n)$  алгебраическую функцію вида:

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{a'n^{p-1} + a''n^{p-2} + \dots + a^{(p)}}{n^p + b'n^{p-1} + b''n^{p-2} + \dots + b^{(p)}}.$$

Развернувъ дробь по нисходящимъ степенямъ  $n$ , получимъ для  $\varphi(n)$  рядъ вида:

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{iv}}{n^3} + \frac{c^v}{n^4} + \dots \quad (4)$$

Разсматривая  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ , ..., какъ извѣстныя, изъ уравненія (4) находимъ  $f(n)$ ; въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$f(n) = \varphi(n) \frac{u_n}{u_{n+1}} = \varphi(n+1). \quad (5)$$

Предположимъ, что отношеніе  $\frac{u_n}{u_{n+1}}$  выражается рядомъ вида:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\theta'}{n} + \frac{\theta''}{n^2} + \frac{\theta'''}{n^3} + \dots \quad (6)$$

Измѣняя  $n$  на  $n+1$  въ (4), пишемъ:

$$\varphi(n+1) = c(n+1) + c' + \frac{c''}{n+1} + \frac{c'''}{(n+1)^2} + \frac{c^{IV}}{(n+1)^3} + \frac{c^V}{(n+1)^4} + \dots,$$

по по § 225-му

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots \right), \\ \frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3} + \dots \right), \\ \frac{1}{(n+1)^3} &= \frac{1}{n^3} \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{10}{n^3} + \dots \right), \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= cn + c + c' + \frac{c''}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \dots \right) + \frac{c'''}{n^2} \left( 1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \dots \right) + \\ &\quad + \frac{c^{IV}}{n^3} \left( 1 - \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2} - \dots \right). \end{aligned} \quad (7)$$

На основаніи уравненій (4), (6) и (7) формула (5) переходитъ въ

$$\begin{aligned} f(n) &= c(\theta' - 1) + \frac{1}{n} [c'\theta' + c\theta''] + \frac{1}{n^2} [c''(\theta' + 1) + c'\theta'' + c\theta'''] + \\ &\quad + \frac{1}{n^3} [c'''(\theta' + 2) + c''(\theta'' - 1) + c'\theta''' + c\theta^{IV}] + \\ &\quad + \frac{1}{n^4} [c^{IV}(\theta' + 3) + c'''(\theta'' - 3) + c''(\theta''' + 1) + c'\theta^{IV} + c\theta^V] + \\ &\quad + \frac{1}{n^5} [c^V(\theta' + 4) + c^{IV}(\theta'' - 6) + c'''(\theta''' + 4) + c''(\theta^{IV} - 1) + c'\theta^V + c\theta^{VI}] + \\ &\quad + \frac{1}{n^6} [c^{VI}(\theta' + 5) + c^V(\theta'' - 10) + c^{IV}(\theta''' + 10) + c'''(\theta^{IV} - 5) + c''(\theta^V + 1) + \\ &\quad \quad + c'\theta^{VI} + c\theta^{VII}] + \\ &\quad + \frac{1}{n^7} [c^{VII}(\theta' + 6) + c^{VI}(\theta'' - 15) + c^V(\theta''' - 20) + c^{IV}(\theta^{IV} - 15) + \\ &\quad \quad + c'''(\theta^V + 6) + c''(\theta^{VI} + 1) + c'\theta^{VII} + c\theta^{VIII}] + \\ &\quad + \frac{1}{n^8} [c^{VIII}(\theta' + 7) + c^{VII}(\theta'' - 21) + c^{VI}(\theta''' + 35) + c^V(\theta^{IV} - 35) + \\ &\quad \quad + c^{IV}(\theta^V + 21) + c'''(\theta^{VI} - 7) + c''(\theta^{VII} + 1) + c'\theta^{VIII} + c\theta^{IX}] + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

Но при бесконечно-огромномъ значеніи  $n$  мы должны имѣть  $f(n) = 1$ , — значить, необходимо, чтобы постоянный членъ величины  $f(n)$  равнялся  $+1$ ; слѣдовательно,

$$1 = c(\theta' - 1).$$

Далѣ, намъ извѣстны  $\theta, \theta', \theta'', \dots$ , потому что отношеніе  $\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}$  извѣстно въ функціи отъ  $n$ , — поэтому можно подобрать  $c, c', c'', \dots$  такъ, чтобы исчезло возможно большее число членовъ выраженія  $f(n)$ ; тогда разность  $f(n) - 1$  будетъ возможно меньшею. Опредѣливъ такимъ образомъ  $2p + 1$  коэффициентовъ ряда

$$\frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{iv}}{n^3} + \dots,$$

составимъ дробь

$$\frac{a'n^{p-1} + a''n^{p-2} + a'''n^{p-3} + \dots + n^{(p)}}{n^p + b'n^{p-1} + \dots + b^{(p)}},$$

которая, будучи развернута въ рядъ, дастъ выраженіе (4); для этого достаточно приравнять другъ другу оба выраженія и написать тождества между членами обѣихъ частей равенства, изгнавъ предварительно знаменателя и положивъ равнымъ нулю коэффициенты при отрицательныхъ степеняхъ  $n$  во второй части, въ числѣ, достаточномъ для опредѣленія  $b'', b''', \dots, b^{(p)}$ .

§ 256. Пояснимъ предыдущій методъ на примѣрѣ.

Пусть данъ рядъ

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots;$$

имѣемъ:

$$\theta_n = \frac{1}{n^4}, \quad \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{(n+1)^4}{n^4} = 1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \frac{1}{n^4}.$$

Слѣдовательно,

$$\theta' = 4, \quad \theta'' = 6, \quad \theta''' = 4, \quad \theta^{iv} = 1, \quad \theta^v = 0, \quad \theta^{vi} = 0, \dots$$

Составляемъ сначала рядъ

$$\varphi(n) = cn + c' + \frac{c''}{n} + \frac{c'''}{n^2} + \frac{c^{iv}}{n^3} + \dots;$$

$c, c', c'', \dots$  опредѣлятся изъ уравненій:

$$\begin{array}{ll} 0 = 3c - 1, & \text{откуда } c = \frac{1}{3}, \\ 0 = 4c' + 6c, & c' = -\frac{1}{2}, \\ 0 = 5c'' + 6c' + 4c, & c'' = +\frac{1}{3}, \\ 0 = 6c''' + 5c'' + 4c' + c, & c''' = 0, \\ 0 = 7c^{iv} + 5c'' + c', & c^{iv} = -\frac{1}{6}, \\ 0 = 8c^v, & c^v = 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 9c^{\text{vi}} + 14c^{\text{iv}} + c'', & c^{\text{vi}} &= +\frac{2}{9}, \\
0 &= 10c^{\text{vii}} - 9c^{\text{vi}} - 14c^{\text{iv}} - c'', & c^{\text{vii}} &= 0, \\
0 &= 11c^{\text{viii}} + 39c^{\text{vi}} + 21c^{\text{iv}} + c'', & c^{\text{viii}} &= -\frac{1}{2}, \\
0 &= 22c^{\text{ix}} - 22c^{\text{viii}} - 69c^{\text{vi}} - 28c^{\text{iv}} - c'', & c^{\text{ix}} &= 0,
\end{aligned}$$

и

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{9n^5} - \frac{1}{9n^7} + \dots$$

Опредѣляемъ теперь дробь:

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{a''n^2 + a^{\text{iv}}}{n^4 + b''n^2 + b^4},$$

которая, будучи развернута въ рядъ, даетъ первые члены, только-что нами выписанные. Посредствомъ метода неопредѣленныхъ коэффициентовъ находимъ:

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} - \frac{1}{2} + \frac{10n^3 + 23n}{30n^4 + 84n^2 + 22}.$$

При  $n = 10$  вычисляемъ непосредственно:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{10^4} = 1,08203\ 65834\ 937565;$$

кроме того,

$$\frac{\varphi(10)}{10^4} = 0,00028\ 66502\ 173419;$$

значить, сумма ряда приблизительно

$$S = 1,08232\ 32337\ 110984.$$

Вычисляя  $\varphi(11)$ , находимъ:

$$\varphi(11) = 3,19684\ 58325\ 175;$$

слѣдовательно,

$$f(10) = \varphi(10) \frac{u_{10}}{u_{11}} - \varphi(11) = 1 - 0,00000\ 00004\ 147,$$

и второй предѣлъ, между которымъ и  $S$  содержится величина ряда, будетъ

$$\frac{\varphi(10)}{10^4 f(10)} = 1,08232\ 32337\ 11217\ 3;$$



среднее арифметическое между этими двумя числами есть

$$1,18232\ 32337\ 11158.$$

Позднѣе мы узнаемъ, что рассматриваемый рядъ равенъ  $\frac{\pi^4}{90}$ ; известно же, что

$$1\pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 127,$$

$$1\pi^4 = 1,98859\ 94907\ 76535\ 41741,$$

$$\pi^4 = 97,40909\ 10340\ 02437\ 233,$$

и

$$\frac{\pi^4}{90} = 1,08232\ 32337\ 11138\ 19148.$$

Такимъ образомъ, найденное значеніе имѣетъ точныхъ 13 цифръ.

§ 257. Можно поставить себѣ вопросъ, сколько нужно вычислить членовъ, чтобы получить столь большое приближеніе. Пусть  $x$  будетъ число членовъ, отбрасываемый остатокъ при  $x$  членахъ долженъ быть меньше  $\frac{2}{10^{14}}$ . Ошибка же, приблизительно, есть  $\frac{\varphi(x)}{x^4}$ , и мы находимъ, что эта дробь будетъ меньше  $\frac{2}{10^{14}}$  лишь при значеніи  $x$  выше 25500.

Итакъ, мы получили съ десятью членами результатъ, который при непосредственномъ вычисленіи потребовалъ бы 25500.

#### Ряды, расположенные по степенямъ переменн ой

§ 258. Часто прибѣгаютъ къ рядамъ, расположеннымъ по возрастающимъ степенямъ переменн ой буквы. Пусть

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (A)$$

будетъ такой рядъ.

Изученіе сходимости рядовъ этого вида приводитъ къ слѣдующей замѣчательной и важной теоремѣ:

*Если въ рядѣ (A) коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — постоянныя данныя, а  $x$  — переменная, могущая принимать всевозможныя значенія, вещественныя или мнимыя, то рядъ, будучи сходящимся при значеніи переменн ой  $x = x_1$ , и подавно сходящійся при всякомъ другомъ значеніи  $x$ , модуль котораго меньше модуля  $x_1$ .*

Въ самомъ дѣлѣ, если рядъ — сходящійся при  $x = x_1$ , то членъ порядка  $n$ ,

$$a_nx_1^n,$$

очевидно, долженъ стремиться къ нулю съ увеличеніемъ  $n$ . Поэтому, пусть  $M$  будетъ наибольшимъ модулемъ членовъ ряда

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + \dots \quad (1)$$

Если подставить на мѣсто  $x$  новое значеніе  $x_2$ , то рядъ приметъ видъ

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots, \quad (2)$$

или

$$a_0 + a_1 x_1 \left( \frac{x_2}{x_1} \right) + a_2 x_1^2 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + \dots + a_n x_1^n \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^n + \dots \quad (3)$$

Если  $r$  есть модуль отношенія  $\frac{x_2}{x_1}$ , то члены ряда (3) имѣютъ модули соотвѣтственно меньше модулей ряда съ положительными членами

$$M + Mr + Mr^2 + Mr^3 + \dots + Mr^n + \dots,$$

ряда, очевидно сходящагося, такъ какъ это — убывающая прогрессія. Значитъ, рядъ (3) и подавно сходящійся.

Предыдущее доказательство, безъ всякихъ измѣненій, даетъ намъ слѣдующую теорему:

*Если при значеніи  $x = x_1$  главной буквы члены ряда*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

*имѣютъ модули меньше постоянного числа  $M$ , то при всякомъ значеніи  $x$ , модуль котораго меньше модуля  $x_1$ , рядъ — сходящійся.*

**§ 259.** Если рядъ, расположенный по степенямъ  $x$ , — расходящійся при значеніи  $x_1$  переменнй  $x$ , то онъ будетъ и подавно расходящимся при значеніи  $x_2$  переменнй  $x$ , модуль котораго выше модуля  $x_1$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если при  $x = x_2$  рядъ — сходящійся, то онъ будетъ также (§ 258) сходящимся при значеніи  $x = x_1$ , модуль котораго меньше.

Такимъ образомъ значенія  $x$ , при которыхъ рядъ разсматриваемаго вида сходящійся, всегда таковы, что модуль ихъ ниже нѣкотораго предѣла.

Разсмотримъ для примѣра рядъ

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots; \quad (1)$$

онъ — сходящійся при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , модуль которыхъ меньше единицы, и расходящійся при значеніяхъ, модуль которыхъ больше единицы.

Вообще, сомнѣніе является при значеніяхъ  $x$ , модуль которыхъ точно равенъ предѣлу. Въ случаѣ прогрессіи (1), если  $x$  дать значеніе, модуль котораго есть единица, т.-е. положить

$$x = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

то рядъ приметъ видъ

$$1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi + \dots + \sqrt{-1} (\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi + \dots),$$

онъ не будетъ сходящимся, потому что члены вещественной части и члены мнимой не стремятся къ нулю съ возрастаніемъ  $n$ .

**§ 260.** Много теоремъ, относящихся къ мнимымъ выраженіямъ, формулируется и доказывается съ большею простотою и изяществомъ при извѣстномъ способѣ ихъ представленія, которымъ мы будемъ часто пользоваться. Выраженіе  $a + b\sqrt{-1}$  принято считать соотвѣтственнымъ точкѣ на плоскости, прямоугольныя координаты которой суть  $a$  и  $b$ . Разстояніе этой точки до начала равно модулю мнимаго выраженія, а уголъ, образуемый этимъ разстояніемъ съ осью  $x$ -овъ, есть *аргументъ*.

Сумму двухъ мнимыхъ выраженій, соотвѣтственныхъ точкамъ  $B$  и  $C$ , очевидно, представить конецъ прямой, проведенной черезъ одну изъ точекъ параллельно радіусу-вектору, соединяющему другую точку съ началомъ координатъ, и равной этому послѣднему. Одинъ взглядъ на чертежъ позволяетъ заключить, что модуль суммы двухъ мнимыхъ выраженій меньше суммы модулей и что, очевидно, эта теорема распространяется на какое-угодно число мнимыхъ выраженій.

**§ 261.** Рядъ, расположенный по возрастающимъ степенямъ переменнѣй  $x$ , — сходящійся, по **§ 259**-му, для значеній  $x$ , соотвѣтствующихъ точкамъ внутри нѣкотораго круга, описаннаго изъ начала, какъ центра. Такой кругъ называется *кругомъ сходимости*: его радіусъ можетъ быть нулемъ и тогда рядъ никогда не бываетъ сходящимся; также можетъ случиться, что онъ выйдетъ безконечно-огромнымъ, и тогда рядъ никогда не будетъ расходящимся.

**§ 262.** Рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

имѣетъ тотъ же кругъ сходимости, что и рядъ

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \quad (2)$$

составленный изъ производныхъ отъ членовъ перваго ряда.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $R$  есть радіусъ круга сходимости. Рядъ (1), по предположенію, расходящійся при всякомъ значеніи  $x$ , модуль котораго превышаетъ  $R$ , и мы знаемъ (**§ 259**), что для такихъ значеній модули его членовъ возрастаютъ безпредѣльно. Поэтому, если мы приписываемъ  $x$  значеніе, модуль котораго  $\rho_1$  превышаетъ  $R$ , а  $A_n$  есть модуль  $a_n$ , то членъ  $a_nx^n$  будетъ имѣть модулемъ

$$A_n\rho_1^n,$$

который, по предположенію, возрастаетъ безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$ . Соотвѣтственный членъ ряда (2) имѣетъ модулемъ

$$nA_n\rho_1^{n-1} = \frac{n}{\rho_1} A_n\rho_1^n, \quad (3)$$

и очевидно, что такъ какъ  $\frac{n}{\rho_1}$  увеличивается безпредѣльно, то этотъ новый модуль растеть безконечно вмѣстѣ съ  $n$ , подобно предыдущему. Значить, рядъ (2) — расходящійся для значеній  $x$ , соотвѣтствующихъ точкамъ внѣ круга сходимости перваго ряда.

Припишемъ, во-вторыхъ, переменной  $x$  значеніе, модуль котораго  $\rho_2$  былъ бы ниже  $R$ ; тогда модуль члена  $a_n x^n$  будетъ

$$A_n \rho_2^n,$$

и рядъ, для котораго этотъ модуль является общимъ членомъ, есть сходящійся и всѣ его члены положительны.

Модуль соответственнаго члена ряда (2) есть

$$n A_n \rho_2^{n-1} = n \left( \frac{\rho_2}{R} \right)^{n-1} A_n R^{n-1}. \quad (4)$$

Но рядъ съ общимъ членомъ  $n \left( \frac{\rho_2}{R} \right)^{n-1}$ , очевидно, сходящійся, потому что отношеніе въ немъ члена къ предыдущему въ предѣлѣ даетъ дробь  $\frac{\rho_2}{R}$  меньше единицы, а множитель  $A_n R^{n-1}$ , на который нужно умножать  $n \left( \frac{\rho_2}{R} \right)^{n-1}$ , чтобы получить выраженіе (4), не увеличивается безпредѣльно. Отсюда ясно, что рядъ съ общимъ членомъ  $n A_n \rho_2^{n-1}$  сходящійся и, слѣдовательно, рядъ (2) — сходящійся для всѣхъ значеній переменной, соответствующихъ точкамъ внутри круга сходимости ряда (1).

### НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЯДОВЪ

**§ 263.** Когда члены ряда — непрерывныя функціи отъ переменной  $x$ , то съ перваго пачала кажется очевиднымъ, что рядъ, если онъ остается сходящимся, есть также непрерывная функція отъ  $x$ ; однако, такое разсужденіе не всегда было бы справедливымъ. Дѣйствительно, если члены сходящагося ряда

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

непрерывныя функціи отъ  $x$ , то ясно, что при бесконечно-маломъ измѣненіи  $x$  каждый членъ измѣнится бесконечно-мало, но будетъ ли то же самое съ суммою? Такъ какъ она составляется изъ бесконечно-большого числа членовъ, то утверждать этого нельзя.

Разсмотримъ, напр., рядъ

$$x(1-x) + x^2(1-x^2) + x^3(1-x^3) + \dots; \quad (1)$$

пока  $x$  меньше единицы, этотъ рядъ — сходящійся. Можно его написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} & x + x^2 + x^3 + \dots \\ & - x^2 - x^4 - x^6 - \dots, \end{aligned}$$

и его сумма, очевидно, будетъ:

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^3}.$$

Такимъ образомъ, если  $x$  приближается къ единицѣ, рядъ (1) всегда сходящійся и пріобрѣтаетъ все большія и большія значенія, но при  $x=1$  сумма этого ряда равна нулю, такъ какъ всѣ его члены обращаются въ нули, хотя самъ онъ остается все еще сходящимся.

Этотъ примѣръ, къ которому мы будемъ имѣть случай прибавить еще много другихъ, показываетъ, какія предосторожности необходимо вносить въ разсужденія, относящіеся до рядовъ.

**§ 264.** Не трудно доказать слѣдующую теорему:

Когда рядъ

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

всѣ члены котораго вещественны и представляютъ функции отъ одной и той же переменной  $x$ , сходящійся для всѣхъ значеній  $x$  между двумя предѣлами  $x_1$  и  $x_2$  и является расходящимся для некотораго частнаго значенія  $x=a$ , такъ что при  $x=a-\varepsilon$  и  $x=a+\varepsilon$  разность значеній, пріобрѣтаемыхъ имъ остается конечною при  $\varepsilon$  бесконечно-маломъ, рядъ производныхъ

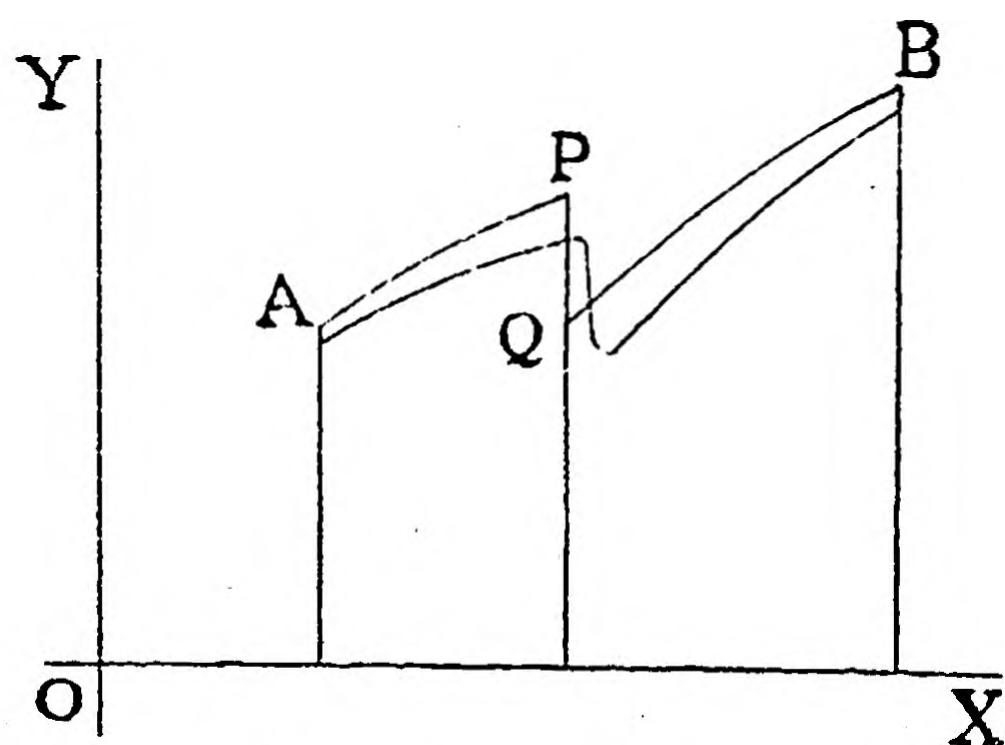
$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx} + \dots$$

расходящійся при  $x=a$ .

Дѣйствительно, разсматривая уравненіе:

$$y = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

находимъ, что  $y$  опредѣленно при всякомъ значеніи  $x$ , и такъ какъ при  $x=a$  наступаетъ разрывъ непрерывности, то кривая, для точекъ которой абсциссою служитъ  $x$ , а ординатою  $y$ , состоитъ изъ двухъ различныхъ вѣтвей  $AP$  и  $QB$  (черт. 26). Если взять



Черт. 26.

во второй части только  $n$  членовъ, то кривая, ординатами точекъ которой служить сумма этихъ  $n$  членовъ, непремѣнно представитъ собою непрерывную линію, которая по своей природѣ всякою параллельною оси  $y$ -овъ пересѣкается только въ одной точкѣ. Но такая линія не можетъ имѣть предѣломъ кривую изъ двухъ вѣтвей  $AP$  и  $QB$ , не приближаясь въ то же время къ прямой  $PQ$ , соединяющей ихъ; угловой коэффициентъ касательной, т.-е.

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx},$$

долженъ быть, такимъ образомъ, бесконечно-огромнымъ при  $x=a$ .



§ 265. Предыдущее замѣчаніе, впервые ясно выраженное Дюгамелемъ (Duhamel), даетъ возможность доказать просто одну теорему Абеля, ставшей весьма важною въ дѣлѣ развитіи науки.

Рядъ вида:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

непрерывенъ для всѣхъ значеній  $x$ , вещественныхъ или мнимыхъ, соотвѣствующихъ внутреннимъ точкамъ его круга сходимости.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x = \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi), \quad (1)$$

переносимъ нашъ рядъ въ видѣ:

$$a_0 + a_1\rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + a_2\rho^2 (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \dots \\ + a_n\rho^n (\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi) + \dots \quad (2)$$

Этотъ рядъ—сходящійся для всѣхъ значеній  $\rho$  ниже радіуса  $R$  круга сходимости. Его члены можно разсматривать или какъ функціи отъ переменнѣй  $\rho$ , или какъ функціи отъ переменнѣй  $\varphi$ ; прилагая предыдущую теорему, увидимъ, что сумма есть непрерывная функція отъ  $\varphi$ , пока рядъ

$$a_1 (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + 2a_2\rho (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \dots \\ + na_n\rho^{n-1} (\cos n\varphi + \sqrt{-1} \sin n\varphi) + \dots \quad (3)$$

не является безконечно-огромнымъ, но такой рядъ есть не что иное, какъ рядъ изъ производныхъ отъ членовъ (1) при томъ же значеніи  $x$ , отличающійся только множителемъ  $(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)$ ; значить, онъ—сходящійся (§ 262) для значеній, соотвѣствующихъ точкамъ внутри круга сходимости (1).

Сумма (2) есть также непрерывная функція отъ  $\varphi$ , пока рядъ

$$a_1\rho (-\sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi) + 2a_2\rho^2 (-\sin 2\varphi + \sqrt{-1} \cos 2\varphi) + \dots \\ + na_n\rho^n (-\sin n\varphi + \sqrt{-1} \cos n\varphi) + \dots \quad (4)$$

остается сходящимся, а такъ какъ каждый членъ ряда (4) равенъ соотвѣстственному члену ряда (3), умноженному на  $\rho \sqrt{-1}$ , то оба они—одновременно сходящіеся, и рядъ (1)—непрерывная функція отъ двухъ переменныхъ  $\rho$  и  $\varphi$  для значеній  $x$ , соотвѣствующихъ внутреннимъ точкамъ его круга сходимости.

§ 266. Когда члены сходящагося ряда суть функціи отъ переменнѣй  $x$ , а ихъ производныя образуютъ также сходящійся рядъ, то функція, представляемая рядомъ, есть, по только-что сказанному, непрерывная функція отъ переменнѣй, но не слѣдуетъ утверждать, что всякій разъ какъ функція развертывается въ сходящійся рядъ, производныя его членовъ по переменнѣй, отъ которой они зависятъ, представляютъ разложеніе въ рядъ этой функціи.

Пусть, напр., данъ рядъ

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots,$$

очевидно, сходящійся при всякомъ вещественномъ значеніи  $x$ ; еслибы высказанное предположеніе было справедливо, то не только первыя производныя его членовъ, но и вторыя, и третьи, дали бы сходящіеся ряды, выражая собою послѣдовательныя производныя отъ функціи, представленной даннымъ рядомъ.

Но вторыя производныя образуютъ рядъ

$$-\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \dots - \cos nx - \dots$$

очевидно, не сходящійся, такъ какъ его члены не стремятся къ нулю.

**§ 267.** Предыдущее замѣчаніе показываетъ ясно, что слѣдующая теорема, хотя бы она была и справедлива, не можетъ быть принята безъ доказательства.

Если рядъ, расположенный по степенямъ переменнѣй  $x$ , сходящійся и, слѣдовательно, непрерывный для значеній этой переменнѣй, модуль которыхъ ниже даннаго числа  $R$ , то производныя его членовъ образуютъ для тѣхъ же значеній переменнѣй сходящійся рядъ, сумма котораго представляетъ производную отъ первой суммы.

Первая часть этой теоремы вытекаетъ изъ предыдущаго. Поэтому мы ограничимся доказательствомъ того, что рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (1)$$

будучи сходящимся для значеній  $x$ , модуль которыхъ меньше  $R$ , имѣетъ производную, равную ряду

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

который, какъ мы видѣли (§ 262) есть также сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ  $\varphi(x)$  рядъ (1); замѣняя въ немъ  $x$  черезъ  $x+h$  и предполагая  $h$  выбраннымъ такъ, что модуль  $x+h$  меньше  $R$  и, слѣдовательно, рядъ остается сходящимся, будемъ имѣть:

$$\varphi(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \dots + a_n(x+h)^n + \dots \quad (2)$$

Вторую часть этого уравненія располагаемъ по степенямъ  $h$ , послѣ чего она приметъ видъ:

$$P_1h + P_2h^2 + P_3h^3 + \dots + P_nh^n + \dots, \quad (3)$$

при чемъ каждый изъ коэффициентовъ  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  представляетъ весьма легкій для своего составленія рядъ. Напр.,  $P_1$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

а это есть не что иное, какъ рядъ изъ производныхъ отъ членовъ (1). Далѣе,  $P_2$  есть рядъ, составленный изъ вторыхъ производныхъ отъ тѣхъ же членовъ, раздѣленныхъ соответственно на 2. Коэффициентъ  $P_3$  есть рядъ изъ третьихъ производныхъ, раздѣленныхъ на 1.2.3, и т. д. Всѣ эти ряды — сходящіеся (§ 262), но тѣмъ не менѣе нужно доказать, что, измѣняя порядокъ членовъ, мы не измѣнили предѣла ихъ суммы и что рядъ (3) представляетъ  $\varphi(x+h)$ . Для этого рассмотримъ сумму  $n$  первыхъ членовъ ряда (3) и вычтемъ изъ нея сумму  $n$  первыхъ членовъ разложенія  $\varphi(x+h)$ : разность  $\Delta$  есть рядъ, составленный изъ всѣхъ членовъ, получаемыхъ отъ степеней  $(x+h)$  выше  $n$ -ой и вошедшихъ въ  $n$  первыхъ членовъ ряда (3). Можно утверждать, что сумма этихъ членовъ имѣетъ предѣломъ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что въ рядѣ (2) одновременно на мѣсто какъ  $x$ ,  $h$ , такъ и коэффициентовъ  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ , поставлены ихъ модули  $X, H, A_0, A_1, \dots, A_n$ . Рядъ останется сходящимся, лишь бы только  $X+H$ , большій (§ 260) модуля  $x+h$ , былъ бы ниже  $R$ . Но послѣ всѣхъ этихъ подстановокъ можно расположить по степенямъ  $H$ , не боясь измѣнить суммы ряда, такъ какъ всѣ члены стали положительными. Итакъ, разность между суммами  $n$  первыхъ членовъ въ рядахъ, замѣняющихъ такимъ образомъ (2) и (3), будетъ имѣть предѣломъ нуль. Замѣчая же, что эта разность есть сумма модулей членовъ, образующихъ разность между  $n$  первыми членами (2) и  $n$  первыми членами (3), выводимъ, что эта послѣдняя и подавно стремится къ нулю, потому что модуль суммы меньше (§ 260) суммы модулей; значитъ, рядъ (3) представляетъ  $\varphi(x+h)$  и мы можемъ писать:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = P_1h + P_2h^2 + \dots + P_nh^n + \dots$$

Этотъ рядъ, будучи сходящимся для малыхъ значеній  $h$ , есть (§ 265) непрерывная функція отъ этой переменнѣй и мы имѣемъ:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = P_1 + P_2h + \dots + P_nh^{n-1} + \dots$$

Переходя къ предѣлу, при  $h$  стремящемся къ нулю, получаемъ:

$$\varphi'(x) = P_1 = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + \dots,$$

что и требовалось доказать.

§ 268. По предыдущему, если рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

сходящійся для всѣхъ значеній  $x$ , модуль которыхъ ниже  $R$ , то, называя сумму его черезъ  $\varphi(x)$  и придавая  $x$  приращеніе  $h$  такое, чтобы модуль  $x+h$  былъ также меньше  $R$ , мы можемъ развернуть  $\varphi(x+h)$  въ рядъ по степенямъ  $h$  и написать:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + P_1h + P_2h^2 + \dots + P_nh^n + \dots,$$

гдѣ  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  представляютъ функціи отъ  $x$ , данныя въ предыдущемъ доказательствѣ. Изъ этой теоремы можно вывести весьма важную слѣдующую.

Если два ряда, расположенные оба по восходящимъ степенямъ одной и той же переменнѣй  $x$ , равны при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , модули которыхъ содержатся между двумя данными предѣлами  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , то оба эти ряда состоятъ изъ однихъ и тѣхъ же членовъ и, слѣдовательно, равны тождественно при всѣхъ значеніяхъ  $x$ .

Предположимъ сначала, что одинъ изъ данныхъ модулей, напр.  $\rho_1$ , равенъ нулю. Ряды:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будучи равными при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , модуль которыхъ ниже  $\rho_2$ , должны принять одно и то же значеніе при  $x = 0$ . Поэтому

$$a_0 = b_0.$$

Опускаемъ этотъ общій членъ въ обоихъ рядахъ и дѣлимъ ихъ затѣмъ на  $x$ . Получаемъ два новыхъ ряда:

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} + \dots, \\ b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

очевидно, сходящихся и равныхъ при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , модуль которыхъ меньше  $\rho_2$ , за исключеніемъ развѣ  $x = 0$ , потому что тогда нельзя уже допустить дѣленія всѣхъ членовъ на  $x$ , но и въ этомъ случаѣ, хотя доказательство наше болѣе не примѣнимо, ряды (2), будучи непрерывными функциями отъ  $x$ , не могутъ быть равными при сколь угодно малыхъ значеніяхъ этой переменнѣй, не являясь въ то же время равными при  $x = 0$ . Поэтому

$$a_1 = b_1.$$

Это разсужденіе можно продолжить неопредѣленно далеко и доказать, что коэффиціенты  $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  равны соответственно  $b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ .

Предположимъ теперь, что ряды равны при значеніяхъ  $x$ , модуль которыхъ содержится между  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .

Примемъ указанное въ § 260-мъ соглашеніе, по которому всякое мнимое выраженіе изображается точкою на плоскости. Оба ряда, по предположенію, имѣютъ одну и ту же сумму, когда значеніе  $x$  соответствуетъ точкамъ между двумя концентрическими окружностями радіусовъ  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Пусть будетъ  $x$  какое-нибудь одно изъ такихъ значеній, соответствующее точкѣ  $M$ , взятой между двумя окружностями. Если въ рядахъ измѣнить  $x$  на  $x + h$ , они останутся сходящимися и могутъ, какъ уже сказано, быть представлены въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} P_0 + P_1h + P_2h^2 + \dots + P_nh^n + \dots, \\ Q_0 + Q_1h + Q_2h^2 + \dots + Q_nh^n + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

лишь бы только модуль  $x + h$  не превышалъ предѣла  $\rho_2$ , такъ какъ для значеній модуля, удовлетворяющихъ этому условію, оба ряда навѣрное остаются сходящимися. Ряды (3), равносильные даннымъ рядамъ, равны между собою для всѣхъ такихъ значеній  $h$ , при которыхъ  $x + h$  соответствуетъ точкѣ между двумя кругами.

Этотъ результатъ обозначаетъ, что ряды (3) равносильны даннымъ при значеніяхъ  $x$ , соответствующихъ точкамъ круга, описаннаго изъ  $M$ , какъ центра, и касательнаго къ окружности радіуса  $\rho_2$ , и, слѣдовательно, равны между собою для всѣхъ точекъ этого круга, расположенныхъ въ поясѣ между двумя окружностями. Но если два ряда, расположенные по степенямъ буквы  $h$ , равны при всѣхъ значеніяхъ  $h$ , модуль которыхъ ниже нѣкотораго предѣла, то они тождественны. Итакъ, ряды (3), а значитъ, и данные равны при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , соответствующихъ внутренней части малаго круга, центръ котораго находится въ  $M$ . Способъ, которымъ этотъ кругъ опредѣляется, даетъ возможность выбрать центръ и радіусъ такимъ образомъ, чтобы внутри его находилась какая-нибудь точка пояса, содержащагося между кругомъ радіуса  $\rho_2$  и кругомъ радіуса  $\rho_1 - (\rho_2 - \rho_1) = 2\rho_1 - \rho_2$ , и имѣющаго ширину, или, что одно и то же, разность радіусовъ предѣльныхъ круговъ, равную удвоенной первоначальной разности  $\rho_2 - \rho_1$ . Подобными разсужденіями будетъ доказано равенство обоихъ рядовъ для значеній  $x$ , соответствующихъ внутренней части пояса, имѣющаго еще вдвое бѣльшую ширину; такимъ образомъ мы приходимъ къ доказательству, что этотъ поясъ простирается до центра данныхъ окружностей; отсюда слѣдуетъ, что ряды, равные при  $x=0$  и при очень малыхъ значеніяхъ этой переменнѣй, тождественны.

#### ПЕРЕМНОЖЕНІЕ ДВУХЪ РЯДОВЪ

§ 269. Сначала мы изложимъ, какъ можно перемножить два сходящихся ряда съ вещественными и положительными членами.

Пусть будутъ даны ряды:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2)$$

Можно утверждать, что рядъ

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \dots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \dots + u_nv_0) + \dots \quad (3)$$

сходящійся и имѣетъ предѣломъ произведеніе  $SS'$ .

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $S_n$  и  $S'_n$  будутъ суммы  $n$  первыхъ членовъ рядовъ (1) и (2), а  $S''_n$  — сумма  $n$  первыхъ членовъ ряда (3). Если  $m$  есть наибольшее цѣлое число, содержащееся въ  $\frac{n-1}{2}$ , то произведеніе

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \dots + (u_0v_n + \dots + u_nv_0)$$

заключается, очевидно, между

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n),$$



которое содержитъ въ себѣ всѣ тѣ же члены и сверхъ того другіе, и

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_m)(v_0 + v_1 + \dots + v_m),$$

всѣ члены котораго, наоборотъ, содержатся среди членовъ (3); такимъ образомъ, зная, что, по предположенію, всѣ члены положительны, можемъ написать:

$$\begin{aligned} S''_{n+1} &< S_{n+1} S'_{n+1}, \\ S''_{n+1} &> S_{m+1} S'_{m+1}. \end{aligned}$$

Далѣе, вмѣстѣ съ  $n$  растеть безпредѣльно и  $m$ ; слѣдовательно,  $S_{n+1}$  и  $S_{m+1}$  стремятся къ  $S$ ,  $S'_{n+1}$  и  $S'_{m+1}$  къ  $S'$ , такъ что  $S''_{n+1}$  содержится между двумя произведеніями, которыя оба стремятся къ  $SS'$ , а это значитъ, что оно имѣетъ предѣломъ  $SS'$ .

§ 270. Разсмотримъ теперь два какихъ-нибудь ряда:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots, \quad (2)$$

члены которыхъ положительны или отрицательны, вещественны или мнимы, но модули ихъ образуютъ два сходящихся ряда. Предыдущая теорема къ нимъ приложима.

Пусть всегда  $S_n$  и  $S'_n$  обозначаютъ суммы  $n$  первыхъ членовъ обоихъ рядовъ и, кромѣ того,  $S''_n$  — сумму  $n$  первыхъ членовъ выведеннаго изъ нихъ ряда; находимъ:

$$S_n S'_n - S''_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots$$

Имѣя же въ виду, что теорема доказана для случая, когда всѣ члены вещественны и положительны, заключаемъ, что при такомъ предположеніи разность  $S_n S'_n - S''_n$ , а слѣдовательно, и сумма

$$u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \dots \quad (3)$$

стремится къ нулю.

Обозначимъ теперь черезъ  $\rho, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho', \rho'_1, \rho'_2, \dots$  модули различныхъ членовъ рядовъ (1) и (2). Ряды, составленные изъ этихъ модулей, по предположенію, сходящіеся; въ такомъ случаѣ изъ предыдущаго вытекаетъ, что сумма

$$\rho_{n-1} \rho'_{n-1} + (\rho_{n-1} \rho'_{n-2} + \rho_{n-2} \rho'_{n-1}) + \dots \quad (4)$$

стремится къ нулю съ возрастаніемъ  $n$ , а такъ какъ эта сумма превышаетъ модуль выраженія (3), то этотъ послѣдній и вмѣстѣ съ нимъ разность  $S_n S'_n - S''_n$  стремятся также къ нулю.

§ 271. Предыдущая теорема предполагаетъ, что не только данные ряды сходящіеся, но и что модули ихъ членовъ образуютъ сходящіеся ряды. Можно показать, напр., что если это не такъ, то теорема не всегда имѣетъ мѣсто.

Разсмотримъ два равныхъ и сходящихся ряда:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

и составимъ ихъ произведение, представляющее квадратъ одного изъ нихъ; согласно же данному правилу имѣемъ:

$$1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \dots$$

Но этотъ рядъ — расходящійся, потому что общій членъ

$$\pm \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

больше  $n$  разъ взятаго наименьшаго изъ его членовъ, т.-е. больше

$$\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

при  $n$  четномъ и больше

$$\sqrt{\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2n}{n+1}$$

при  $n$  нечетномъ. Итакъ, членъ ряда всегда больше единицы и рядъ не будетъ сходящимся.

#### УПРАЖНЕНІЯ

1. Имѣемъ:

$$2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} + \dots,$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n(n+1)(n+2)} + \dots,$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

2. Имѣемъ:

$$1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

3. Доказать формулу:

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} + \frac{3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots + \frac{A_n}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)},$$

гдѣ  $A_n$  — коэффициентъ при  $z^2$  въ произведеніи  $z(z+1)(z+2)\dots(z+n)$ .

4. Зная сумму ряда

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

найти

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots$$

5. Имѣемъ:

$$\frac{5}{36} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{9}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \dots;$$

доказательство этой формулы поконится на тождествѣ:

$$\frac{(n-1)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{7}{n(n+1)(n+2)} + \frac{16}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$


---

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### Теорема Тэйлора

#### Доказательство Тэйлора

§ 272. Теорема Тэйлора (Taylor) даетъ возможность развернуть любую функцію отъ одной переменнѣй въ рядъ по степенямъ этой переменнѣй или приращенія, которое придается къ произвольно выбранному значенію этой послѣдней. Общность формулы, правда, ограничена, неизбѣжными условіями сходимости, за изученіе которыхъ геометры принялись, однако, долго спустя послѣ открытія теоремы. Это существенное условіе, на которое Тэйлоръ не обратилъ никакого вниманія, дѣлаетъ непріемлемымъ для насъ доказательство, приведшее его къ замѣчательному открытію; начнемъ, однако, съ него.

Пусть  $\varphi(x)$  есть функція отъ переменнѣй  $x$ ; измѣняемъ въ ней послѣдовательно  $x$  на  $x + \Delta x$ ,  $x + 2\Delta x$ ,  $x + 3\Delta x$ , ...,  $x + n\Delta x$  и рассматриваемъ рядъ

$$\varphi(x), \quad \varphi(x + \Delta x), \quad \varphi(x + 2\Delta x), \dots, \varphi(x + n\Delta x),$$

который будемъ писать для сокращенія слѣдующимъ образомъ:

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_n.$$

Полагаемъ, какъ въ § 134-мъ,

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \Delta y, & y_2 - y_1 &= \Delta y_1, \dots, & y_n - y_{n-1} &= \Delta y_{n-1}, \\ \Delta y_1 - \Delta y &= \Delta^2 y, & \Delta y_2 - \Delta y_1 &= \Delta^2 y_1, \dots, & \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} &= \Delta^2 y_{n-2}, \\ \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y &= \Delta^3 y, & \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 &= \Delta^3 y_1, \dots, & \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3} &= \Delta^3 y_{n-3}, \\ & \dots & & & & \\ \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y &= \Delta^n y; \end{aligned}$$

$y_n$  можетъ выражаться, какъ мы знаемъ, въ функціи отъ  $y$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta^2 y$ , ...,  $\Delta^n y$  и мы имѣемъ тождество:

$$y_n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \dots + \Delta^n y. \quad (1)$$

Не трудно проверить эту формулу при  $n = 2, n = 3, \dots$  и можно весьма легко доказать, что если она справедлива при некотором значении  $n$ , то она будет в силу этого справедлива и при значении на единицу выше.

Послѣ этого въ тождествѣ (1) полагаемъ  $n\Delta x = h$  и замѣняемъ  $n$  его значеніемъ  $\frac{h}{\Delta x}$ ; тогда  $y_n$  перейдетъ въ  $\varphi(x + h)$  и у насъ будетъ:

$$\varphi(x + h) = y + h \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h - \Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{h(h - \Delta x)(h - 2\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \dots, \quad (2)$$

а если, теперь, при  $h$  постоянномъ  $n$  станетъ расти безпредѣльно, то  $\Delta x$  сдѣлается безконечно-малымъ, и уравненіе, вторая часть котораго продолжается въ этомъ случаѣ безпредѣльно, будетъ:

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(x) + \dots \quad (3)$$

Это доказательство не строго, потому что мы въ немъ не останавливаемся достаточно на принципѣ, а приводимъ его лишь вскользь; въ самомъ дѣлѣ, когда мы предполагаемъ, что  $n$  увеличивается безпредѣльно, то всегда во второй части уравненія (2) существуютъ члены — и ихъ становится все больше и больше, — для которыхъ не служатъ предѣлами соотвѣтственные члены уравненія (3). Дѣйствительно, общій членъ есть

$$\frac{h(h - \Delta x)(h - 2\Delta x) \dots [h - (p - 1)\Delta x]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \frac{\Delta^p y}{\Delta x^p},$$

предѣломъ онъ долженъ имѣть:

$$\frac{h^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \frac{d^p y}{dx^p}.$$

Неявно допускается, что  $(p - 1)\Delta x$  стремится къ нулю, т.-е. что  $p$  не сравнимо съ  $n$ , но, вѣдь, число членовъ, для которыхъ это условіе не выполняется, увеличивается безпредѣльно вмѣстѣ съ  $n$ .

Доказательство Тэйлора можетъ, однако, быть полнымъ и дать строгій выводъ теоремы, — стоитъ только принять совершенно другой путь, приводящій къ выраженію ошибки, которую мы допускаемъ, прерывая рядъ на какомъ-угодно изъ его членовъ.

#### ВЫРАЖЕНІЕ ОСТАТКА РЯДА

**§ 273.** Докажемъ сначала одну очень простую лемму, которою мы будемъ пользоваться.

Когда непрерывная функція  $\varphi(x)$  обращается въ нуль при двухъ значеніяхъ  $a$  и  $b$  переменнѣй, отъ которой она зависитъ, то производная  $\varphi'(x)$  этой функціи, если только она непрерывна, обращается въ нуль при некоторомъ значеніи  $x$ , лежащемъ между  $a$  и  $b$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если производная  $\varphi'(x)$  не обращалась бы въ нуль, то она всегда была бы одного и того же знака между предѣлами  $a$  и  $b$  и, слѣдовательно, функція  $\varphi(x)$



была бы постоянно возрастающею или постоянно убывающею, въ то время какъ  $x$  измѣнялось бы отъ значенія  $a$  до значенія  $b$ , и не могла бы, поэтому, обращаться въ нуль на двухъ предѣлахъ.

Послѣ этого рассмотримъ формулу:

$$\varphi(X) = \varphi(x) + \frac{X-x}{1} \varphi'(x) + \frac{(X-x)^2}{1.2} \varphi''(x) + \dots + \frac{(X-x)^n}{1.2.3\dots n} \varphi^n(x) + R, \quad (1)$$

гдѣ  $X$  и  $x$  обозначаютъ два какихъ-угодно данныхъ числа.

Постараемся опредѣлить выраженіе для числа  $R$  при условіи, чтобы эта формула была точною; полагаемъ для этого

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)} P,$$

гдѣ  $P$  — неизвѣстное число, которое нужно опредѣлить. Если замѣнить  $x$  переменною буквою  $z$ , принимающею всевозможныя значенія, то разность обѣихъ частей (1) будетъ

$$\varphi(X) - \varphi(z) - (X-z) \varphi'(z) - \frac{(X-z)^2}{1.2} \varphi''(z) - \dots - \frac{(X-z)^n}{1.2.3\dots n} \varphi^n(z) - \frac{(X-z)^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} P$$

и эта разность обращается, по предположенію, въ нуль при  $z=x$ ; кромѣ того, по самому своему виду она обращается въ нуль при  $z=X$ . Слѣдовательно, производная по  $z$  равна нулю при нѣкоторомъ значеніи  $z$ , лежащемъ между  $x$  и  $X$ . Съ другой же стороны, эта производная, когда мы опустимъ взаимно-уничтожающіеся члены, приведется къ

$$-\frac{(X-z)^n}{1.2\dots n} \varphi^{n+1}(z) + \frac{(X-z)^n}{1.2\dots n} P,$$

а значеніе  $z$ , при которомъ она обращается въ нуль, лежащее между  $x$  и  $X$ , можетъ быть выражено посредствомъ  $x + \theta(X-x)$ , гдѣ  $\theta$  меньше единицы. Значить,

$$P = \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)]$$

и потому

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)].$$

Наконецъ, полагая  $X-x=h$  и замѣняя  $R$  этимъ значеніемъ въ уравненіи (1), имѣемъ:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n} \varphi^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} \varphi^{n+1}(x + \theta h).$$

Когда мы въ этой формулѣ произвольному  $n$  припишемъ безконечно-возрастающее значеніе, то вторая часть, если не принимать во вниманіе послѣдняго члена, представитъ

рядъ, найденный Тэйлоромъ, который, слѣдовательно, точенъ, всякій разъ какъ послѣдній членъ

$$\frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \varphi^{n+1}(x + \theta h)$$

стремится къ нулю съ увеличеніемъ  $n$ .

Относительно остатка, заключающаго въ своемъ выраженіи неопредѣленное число  $\theta$ , иногда трудно бываетъ рѣшить, стремится ли онъ къ нулю, или нѣтъ. Но все же можно замѣтить, что множитель  $\frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}$  имѣетъ всегда предѣломъ нуль, потому что при измѣненіи  $n$  на  $n+1$  онъ умножается на дробь  $\frac{h}{n+2}$ , которая, каково бы ни было  $h$ , стремится къ нулю. Что касается другого множителя,  $\varphi^{n+1}(x + \theta h)$ , то онъ, вообще говоря, очень сложенъ, и присутствіе неопредѣленнаго числа  $\theta$  дѣлаетъ его изслѣдованіе часто весьма затруднительнымъ; мы вернемся къ нему не разъ въ отдѣльныхъ случаяхъ.

#### Второй видъ остатка

§ 274. Только-что найденное нами выраженіе для остатка принадлежитъ Лагранжу (Lagrange); мы можемъ придать ему другой видъ, иногда болѣе предпочтительный, измѣнивъ слегка доказательство.

Если въ уравненіи:

$$\varphi(X) = \varphi(x) + (X-x)\varphi'(x) + \frac{(X-x)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{(X-x)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^n(x) + R \quad (1)$$

положить

$$R = (X-x)P,$$

гдѣ  $P$  такое неизвѣстное число, при которомъ уравненіе является точнымъ, то, очевидно, разность

$$\varphi(X) - \varphi(z) - (X-z)\varphi'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(z) - \dots - \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(z) - (X-z)P$$

обращается въ нуль при  $z = x$ . А такъ какъ она обращается въ нуль еще и при  $z = X$ , то производная отъ этого выраженія по  $z$ ,

$$-\frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{n+1}(z) + P,$$

обращается въ нуль при нѣкоторомъ значеніи  $z$  между  $X$  и  $x$ , т.-е. при

$$z = x + \theta(X-x),$$

гдѣ  $\theta$  — надлежащимъ образомъ выбранное между 0 и 1 число. Отсюда заключаемъ, что

$$P = \frac{(X-x)^n(1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)],$$

и, значитъ,

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (1-\theta)^n \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)]. \quad (2)$$

Полагая теперь  $X - x = h$  въ уравненіи (1), имѣемъ:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{n+1}(x+\theta h).$$

Этотъ второй видъ остатка, данный Коши (Cauchy), иногда удобнѣе предыдущаго.

### ТРЕТІЙ ВИДЪ ОСТАТКА

§ 27. Такъ же, какъ и въ предыдущихъ разсужденіяхъ, положивъ предварительно

$$\varphi(X) = \varphi(x) + (X-x)\varphi'(x) + \frac{(X-x)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{(X-x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(x) + R, \quad (1)$$

полагаемъ

$$R = \frac{(X-x)^{p+1}}{p+1} P,$$

гдѣ  $P$  — неизвѣстное число. Функція отъ  $z$ ,

$$\varphi(X) - \varphi(z) - (X-z)\varphi'(z) - \frac{(X-z)^2}{1 \cdot 2} \varphi''(z) - \dots - \frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(z) = \frac{(X-z)^{p+1}}{p+1} P,$$

очевидно, обращается въ нуль при  $z = X$  и  $z = x$ ; слѣдовательно, производная отъ этого выраженія по  $z$ ,

$$-\frac{(X-z)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{n+1}(z) + (X-z)^p P,$$

обращается въ нуль при нѣкоторомъ значеніи  $z$  между  $x$  и  $X$ , т.-е. при

$$z = x + \theta(X-x),$$

гдѣ  $\theta$  меньше единицы. Отсюда заключаемъ, что

$$P = \frac{(X-x)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)],$$

и, значитъ,

$$R = \frac{(X-x)^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(p+1)} \varphi^{n+1}[x + \theta(X-x)]. \quad (2)$$

Полагая  $X - x = h$  въ формулѣ (1), находимъ:

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2\dots n}\varphi^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}{1.2\dots n(n+1)}\varphi^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Этотъ третій видъ остатка найденъ Шлёмилхомъ (Schlömlich) и Рошемъ (Roche).

#### БЕЗКОНЕЧНО-МАЛОЕ ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ

**§ 276.** Когда  $h$  въ разложеніи  $\varphi(x+h)$  предполагается бесконечно-малою, то послѣдовательные члены разложенія представляютъ бесконечно-малыя въ возрастающемъ порядкѣ, и на какомъ бы членѣ мы ни остановились, происшедшая отъ этого ошибка будетъ бесконечно-малою порядка высшаго, чѣмъ послѣдній изъ сохраненныхъ членовъ. Это важное предложеніе легко выводится изъ разсмотрѣнія одного изъ найденныхъ видовъ остатка. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}\varphi^{(n)}(x),$$

находимъ для происходящей при этомъ ошибки выраженіе (§ 273)

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)}\varphi^{(n+1)}(x+\theta h),$$

т.-е. бесконечно-малую порядка  $n+1$ , если  $h$  — бесконечно-малая первого порядка, и наше предложеніе теряетъ смыслъ только въ томъ исключительномъ случаѣ, когда  $\varphi^{(n+1)}(x) = \infty$ . Представляя  $h$  черезъ  $dx$  и  $\varphi(x)$  черезъ  $y$ , пишемъ формулу Тэйлора въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi(x+h) = y + dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}d^ny + \dots;$$

этотъ видъ очень употребителенъ, и нужно помнить, что при бесконечно-малой  $dx$  ошибка, происходящая отъ прерыванія ряда на какомъ-нибудь членѣ, будетъ бесконечно-малою высшаго порядка, чѣмъ послѣдній сохраненный членъ.

#### Замѣчаніе относительно ряда Тэйлора

**§ 277.** Формула Тэйлора, ограниченная случаемъ бесконечно-малаго приращенія переменнѣй, равносильна ряду достойныхъ вниманія теоремъ, которыя въ сущности выражаютъ ни что иное, какъ непрерывность функціи и ея производныхъ:

1. Какова бы ни была функція  $\varphi(x)$ , разность  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ , гдѣ  $h$  — бесконечно-малая, можно считать пропорціональною  $h$  и представить ее подъ видомъ  $h\varphi'(x)$ ,

такъ какъ происходящая при этомъ ошибка является бесконечно-малою по отношенію къ вычисляемой разности.

2. Избытокъ разности  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  надъ приближеннымъ значеніемъ  $h\varphi'(x)$  можно считать пропорціональнымъ  $h^2$  и разность  $\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)$  представить подъ видомъ  $\frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x)$ , такъ какъ происходящая при этомъ ошибка является бесконечно-малою по отношенію къ вычисляемому количеству.

3. Ошибку, допускаемую при этомъ новомъ приближеніи, можно считать пропорціональною  $h^3$  и разность

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x) - \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x)$$

представить подъ видомъ  $\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(x)$ , такъ какъ происходящая при этомъ ошибка является бесконечно-малою по отношенію къ вычисляемому количеству.

И такъ далѣе, до бесконечности.

Такъ какъ функція совершенно произвольна, то ее, очевидно, можно такъ подобрать, чтобы предыдущія теоремы потеряли смыслъ для даннаго значенія  $x$ ; но это можетъ имѣть мѣсто только при особенныхъ значеніяхъ переменнѣй, и въ такомъ случаѣ одна изъ производныхъ обратится въ бесконечность.

Предыдущія предложенія легко доказать непосредственно. Прежде всего полагаемъ:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + F(x, h), \quad (1)$$

гдѣ  $F(x, h)$  бесконечно-мало (§ 276), при бесконечно-маломъ значеніи  $h$ , по отношенію къ  $h\varphi'(x)$ . Беремъ производныя по  $h$  отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\varphi'(x+h) - \varphi'(x) = \frac{dF(x, h)}{dh}.$$

Въ силу же принципа, доказаннаго для какой-угодно функціи (§ 45), выраженіе  $\varphi'(x+h) - \varphi'(x)$  можетъ быть приведено къ  $h\varphi''(x)$ , если пренебrecь бесконечно-малою частью его значенія.

Поэтому, если построить прямую, ордината которой есть  $h\varphi''(x)$ , а  $h$  — абсцисса, то функція  $F(x, h)$  представитъ площадь между осью  $X$ -овъ и кривою, ордината которой отличается отъ ординаты этой прямой на бесконечно-малую часть своего значенія; слѣдовательно,  $F(x, h)$  равна  $\frac{h^2}{2} \varphi''(x)$ , если пренебrecь бесконечно-малою частью ея значенія. Полагая

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) - h\varphi'(x) - \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) = F_1(x, h)$$

и беря производныя по  $h$ , находимъ:

$$\varphi'(x+h) - \varphi'(x) - h\varphi''(x) = \frac{dF_1(x, h)}{dh};$$



прилагая же къ функціи  $\varphi'(x)$  доказанную передъ этимъ общую теорему, заключаемъ, что выраженіе  $\frac{dF_1(x, h)}{dx}$  приводится къ  $\frac{h^2}{2} \varphi'''(x)$ , если пренебречь безконечно-малою частью его значенія, и что функція  $F_1(x, h)$ , равная нулю при  $h = 0$ , отличается отъ  $\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(x)$  на безконечно-малую часть своего значенія.

Способъ разсужденія можетъ быть продолженъ какъ-угодно далеко и показываетъ, что члены ряда Тэйлора образуютъ рядъ приближеній къ значенію  $\varphi(x + h)$  все болѣе и болѣе высшаго порядка, при чемъ ошибка, происходящая послѣ прибавленія каждаго изъ членовъ, безконечно-мала по отношенію къ самому члену.

#### ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА

##### § 278. Полагая въ формулѣ

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} \varphi^{n+1}(x + \theta h)$$

$x = 0$  и затѣмъ замѣняя букву  $h$  буквою  $x$ , пишемъ:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^n(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \varphi^{n+1}(\theta h);$$

заставляя  $n$  расти безпредѣльно, получаемъ безконечный рядъ, расположенный по степенямъ  $x$  и имѣющій предѣломъ  $\varphi(x)$ , всякій разъ какъ остатокъ стремится къ нулю.

Этотъ рядъ извѣстенъ подъ именемъ *ряда Маклорена* (Maclaurin), хотя онъ не болѣе, какъ частный случай ряда Тэйлора; самъ Маклоренъ, опубликовавъ его въ своемъ *Трактатѣ о Флюксіяхъ*, тутъ же прибавляетъ: *This theorem was given by Taylor.*

§ 279. Не трудно замѣтить, что единственное возможное разложеніе функціи въ рядъ по степенямъ перемѣнной есть именно то, которое вытекаетъ изъ теоремы Маклорена. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\varphi(x) = A + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots$$

будетъ разложеніе, сходящееся, какъ извѣстно (§ 258), для значеній  $x$  ниже нѣкотораго предѣла; послѣдовательныя его производныя мы получимъ, беря производныя (§ 267) отъ его членовъ отдѣльно. Поэтому, составляя  $\varphi'(x)$ ,  $\varphi''(x)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi^n(x)$  и полагая затѣмъ  $x = 0$ , будемъ, очевидно, имѣть:

$$A = \varphi(0), \quad A_1 = \varphi'(0), \quad 2A_2 = \varphi''(0), \quad 2 \cdot 3A_3 = \varphi'''(0), \dots, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots nA_n = \varphi^n(0),$$

т.-е. коэффициентами будутъ коэффициенты ряда Маклорена.

## НѢКОТОРЫЯ РАЗЛОЖЕНІЯ ВЪ РЯДЫ

§ 280. Теорема Тэйлора приложима ко всѣмъ функціямъ, и число рядовъ, которые можно изъ нея вывести, безпредѣльно. Мы здѣсь ограничимся приложеніемъ ея къ доказательству наиболѣе знаменитыхъ и наиболѣе часто употребляемыхъ разложеній.

Разложеніе  $a^x$ . — Формула

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \varphi^{(n+1)}(\theta x)$$

даетъ:

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{1 \cdot 2} (la)^2 + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} (la)^n + \frac{x^{n+1} (la)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} a^{\theta x}.$$

При всякомъ значеніи  $x$  дополнительный членъ

$$\frac{x^{n+1} (la)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} a^{\theta x}$$

стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи  $n$ . Въ самомъ дѣлѣ, его можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$a^{\theta x} \cdot \frac{xla}{1} \cdot \frac{xla}{2} \dots \frac{xla}{n} \cdot \frac{xla}{n+1}.$$

Ясно, что, начиная съ нѣкотораго мѣста, всѣ множители этого произведенія будутъ сколь-угодно малы; слѣдовательно, ихъ произведеніе стремится къ нулю, и мы имѣемъ, при всякомъ  $x$ ,

$$a^x = 1 + xla + \frac{x^2}{1 \cdot 2} (la)^2 + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (la)^n + \dots$$

При  $a = e$  формула переходитъ въ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

Ограничиваясь первымъ членомъ, имѣемъ

$$a^x = 1 + xla a^{\theta x}.$$

Полагая  $a = \frac{1}{z}$ ,  $x = \frac{1}{n}$ , выводимъ отсюда, для логарифма числа  $\frac{1}{z}$ , выраженіе, которымъ воспользуемся ниже,

$$1 \frac{1}{z} = n \left[ \left( \frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right] z^{\frac{\theta}{n}}.$$

§ 281. Разложене  $1(1+x)$ . — Формула Маклорена даетъ непосредственно:

$$1(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} (1+\theta x)^{-n}.$$

При  $x$  бѣльшемъ единицы по абсолютному значенію рядъ, къ которому приводится вторая часть при  $n$  безконечно-большомъ, не будетъ сходящимся, потому что отношеніе общаго члена къ его предыдущему въ предѣлѣ равно  $x$ , а такъ какъ этотъ предѣлъ больше единицы, то члены идутъ возрастаю. Слѣдовательно, только для тѣхъ значеній  $x$ , которыя содержатся между  $-1$  и  $+1$ , нужно искать, стремится ли дополнительный членъ къ нулю.

Если  $x$  положительно и меньше единицы, то дополнительный членъ

$$\frac{x^n}{n} (1+\theta x)^{-n},$$

очевидно, стремится къ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, его можно писать въ видѣ:

$$\frac{1}{n} \left( \frac{x}{1+\theta x} \right)^n,$$

и такъ какъ дробь  $\frac{x}{1+\theta x}$  меньше  $x$ , то  $n$ -ая ея степень стремится къ нулю, а, значитъ, произведеніе этой степени на  $\frac{1}{n}$  и подавно стремится къ нулю. Такимъ образомъ, для значеній  $x$ , заключающихся между  $0$  и  $1$ , имѣемъ рядъ:

$$1(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

справедливый для предѣльнаго случая, когда  $x=1$ , потому что въ этомъ случаѣ дополнительный членъ, имѣя множителемъ дробь  $\frac{1}{n}$ , умноженную на количество, очевидно, меньшее единицы, стремится къ нулю.

Если  $x$  отрицательно и обозначено для ясности черезъ  $-x'$ , то сразу не видно, къ какому предѣлу, при возрастающихъ значеніяхъ  $n$ , стремится дополнительный членъ ряда

$$\frac{x'^n}{n(1-\theta x')^n},$$

и второй видъ этого члена здѣсь будетъ весьма полезенъ.

Этотъ второй видъ даетъ (§ 274) въ настоящемъ случаѣ для выраженія остатка ряда

$$\left( \frac{x' - \theta x'}{1 - \theta x'} \right)^{n+1} x'.$$

Но дробь  $\frac{x' - \theta x'}{1 - \theta x'}$  меньше единицы и отличается отъ нея, каково бы ни было  $\theta$ , на

конечное количество. Поэтому  $(n + 1)$ -ая степень  $e$  стремится къ нулю и, значить, остатокъ имѣетъ предѣломъ также нуль; такимъ образомъ, рядъ Тэйлора въ этомъ случаѣ—сходящійся и выражаетъ  $l(1 - x')$ .

Итакъ, имѣемъ наконецъ

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

для всѣхъ значеній  $x$  между  $-1$  и  $+1$ . Мы замѣтили, что эта формула справедлива для предѣльнаго случая, когда  $x = +1$ ; она, равнымъ образомъ, справедлива для  $x = -1$ , потому что тогда первая часть равна  $-\infty$ , а вторая переходитъ въ расходящійся рядъ:

$$-\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right).$$

**§ 282.** Рядъ, выражающій  $l(1 + x)$ , можетъ быть написанъ, очевидно, слѣдующимъ образомъ:

$$l(1 + x) = x(1 - x) + \frac{x^2}{2}(1 - x^2) + \frac{x^3}{3}(1 - x^3) + \dots + \frac{x^n}{n}(1 - x^n) + \dots \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, здѣсь по раскрытіи скобокъ члены съ четными степенями будутъ парно подобны; соединяя ихъ, приходимъ къ прежней формулѣ. Однако, при  $x = 1$ , формула (1) не точна, потому что даетъ  $l2 = 0$ . Это отступленіе происходитъ отъ того, что при  $x = 1$  разложеніе  $l(1 + x)$  не представляетъ сходящагося ряда независимо отъ знаковъ его членовъ, и, значить, мы не имѣемъ, въ данномъ случаѣ, права объяснять это порядкомъ положительныхъ и отрицательныхъ членовъ.

**§ 283.** Разложеніе  $(1 + x)^m$ . — Прилагая общую формулу, находимъ:

$$\begin{aligned} (1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} x^{n-1} + \\ + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n (1 + \theta x)^{m-n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Чтобы безконечный рядъ

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} x^{n-1} + \dots$$

былъ сходящимся, необходимо, чтобы  $x$  по абсолютному значенію не превосходило 1; дѣйствительно, отношеніе какого-нибудь общаго члена къ предыдущему есть

$$\frac{m-n+1}{n} x$$

и въ предѣлѣ даетъ  $-x$ , при  $n$  безконечно-возрастающемъ. Поэтому сходимость будетъ

только для значений  $x$ , содержащихся между  $-1$  и  $+1$ , и только въ этомъ случаѣ можно испытывать, стремится ли дополнительный членъ къ нулю. Этотъ членъ

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n} x^n (1+\theta x)^{m-n}$$

стремится къ нулю, если  $x$  положительно. Въ самомъ дѣлѣ, написавъ его въ видѣ

$$\left[ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n \right] \left[ \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m}} \right], \quad (2)$$

замѣчаемъ, что второй множитель меньше единицы, а первый стремится къ нулю. Это—потому, что при увеличеніи  $n$  на единицу, онъ умножается на

$$\frac{m-n}{n+1} x,$$

мало отличающееся отъ  $-x$  при  $n$  большомъ; когда же  $n$  возрастаетъ безпредѣльно, произведение въ первыхъ скобкахъ выраженія (2) умножается послѣдовательно на сколько угодно большое число множителей, мало отличающихся отъ  $-x$  и въ произведеніи, очевидно, стремящихся къ нулю.

Итакъ, для положительныхъ значений  $x$ , меньшихъ единицы, имѣемъ:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n} x^n + \dots$$

При  $x$  отрицательномъ предыдущее разсужденіе не годится, и нужно прибѣгнуть ко второму виду остатка, который, въ данномъ случаѣ, будетъ

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)} x^n (1-\theta)^{n-1} (1+\theta x)^{m-n}.$$

Множитель

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots(n-1)} x^n$$

стремится, по предыдущему, къ нулю; второй же множитель

$$(1-\theta)^{n-1} (1+\theta x)^{m-n}$$

при замѣнѣ отрицательнаго  $x$  на  $-x'$  явится въ видѣ:

$$(1-\theta x')^{m-1} \left( \frac{1-\theta}{1-\theta x'} \right)^{n-1}.$$

Но дробь  $\frac{1-\theta}{1-\theta x'}$  меньше единицы, также какъ и разность  $1-\theta x'$ ; слѣдовательно,



это выражение меньше единицы и его произведение на множитель, стремящийся къ нулю, имѣетъ предѣломъ непремѣнно нуль. Итакъ, наконецъ, для всѣхъ значеній  $x$  между  $-1$  и  $+1$  имѣемъ:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots$$

Изъ предыдущаго разложенія выводимъ безъ труда разложеніе  $(x+h)^m$ , потому что

$$(x+h)^m = h^m \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m,$$

только бы  $x$  было больше  $h$ ; имѣемъ:

$$(x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{m-2} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} h^n x^{m-n} + \dots$$

§ 284. Такъ какъ рядъ, только-что нами полученный, весьма извѣстенъ и весьма часто употребляется, то мы рассмотримъ также и случай  $x = \pm 1$ , къ которому предыдущія разсужденія не приложимы.

Рядъ  $(1+x)^m$  въ случаѣ  $x = 1$  будетъ

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots, \quad (1)$$

а въ случаѣ  $x = -1$

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \pm \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \pm \dots \quad (2)$$

Ищемъ сначала, будутъ ли члены этихъ рядовъ стремиться къ нулю, такъ какъ это — необходимое условіе сходимости. Отношеніе какого-нибудь члена къ предыдущему, по абсолютному значенію, равно

$$\frac{n-m}{n+1}.$$

Если  $m$  содержится между  $-1$  и  $-\infty$ , то каждый членъ превзойдетъ по абсолютному значенію предыдущій, и сходимостъ невозможна. Въ предѣльномъ случаѣ, когда  $m = -1$ , всѣ члены рядовъ (1) и (2) имѣютъ одну и ту же абсолютную величину, и сходимости нѣтъ.

Итакъ, рассмотримъ случай, когда  $m$  содержится между  $-1$  и  $+\infty$ .

Отношеніе  $\frac{m-n}{n+1}$  отрицательно, члены ряда (1) попеременно положительны и отрицательны, и такъ какъ они идутъ уменьшаясь, то будетъ сходимостъ.

Правило Гаусса (§ 242), примѣненное къ ряду (2), показываетъ, что онъ — сходящійся при  $m$  положительномъ и расходящійся въ противномъ случаѣ.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что рядъ, который даетъ  $(1 + 1)^m$ , т.-е.

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

расходящійся, если  $m$  содержится между  $-1$  и  $-\infty$ , и въ этомъ случаѣ члены не стремятся къ нулю. Если же  $m$  содержится между  $-1$  и  $+\infty$ , члены стремятся къ нулю и попеременно положительны и отрицательны, самый же рядъ — сходящійся.

Въ случаѣ, когда  $m = -1$ , всѣ члены равны по абсолютному значенію, и нельзя утверждать о существованіи сходимости.

При  $x = -1$  рядъ является въ видѣ:

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots;$$

онъ — сходящійся для всѣхъ положительныхъ значеній  $m$  и расходящійся для отрицательныхъ значеній. Кромѣ того, изъ сказаннаго (§ 265) вытекаетъ, что рядъ представляетъ въ первомъ случаѣ  $(1 - 1)^m$ , и такъ какъ при  $m$  отрицательномъ это выраженіе является безконечно-огромнымъ, то расходящійся рядъ можетъ быть рассматриваемъ, какъ дающій также нѣкоторый пріемлемый результатъ.

#### § 285. Формула

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots, \quad (1)$$

объ условіяхъ сходимости и вѣрности которой мы только-что рассуждали, важна по своимъ многочисленнымъ приложеніямъ и имѣетъ большое значеніе въ исторіи науки: ее первую открылъ Ньютонъ, и хотя опубликовалъ позднѣе, но она предшествовала открытію ряда Меркатора (Mercator'a) и ряда Брункера (Brounker'a).

Эта формула замѣчательна еще по легкости, съ которою выводятся изъ нея другіе, весьма извѣстные и весьма важные, ряды.

Уравненіе (1) можно представить подъ видомъ:

$$\frac{(1 + x)^m - 1}{m} = x + \frac{m-1}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Если  $m$  будетъ стремиться къ нулю, то первая часть, которая можетъ быть написана слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{(1 + x)^m - (1 + x)^0}{m - 0},$$

очевидно, въ предѣлѣ будетъ имѣть производную отъ  $(1 + x)^m$  по  $m$ , при частномъ значеніи  $m = 0$ , т.-е.  $1(1 + x)$ . Поэтому, полагая во второй части  $m = 0$ , имѣемъ разложеніе  $1(1 + x)$ ,

$$1(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

§ 286. Та же самая формула даетъ

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots,$$

откуда заключаемъ, что функція  $\arcsin x$  и рядъ

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

имѣютъ одну и ту же производную, и такъ какъ они одновременно обращаются въ 0 при  $x = 0$ , то можно писать:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots$$

§ 287. Упомянемъ еще, не входя въ дальнѣйшія подробности, о возможности вывести изъ формулы бинома разложеніе показательной функціи  $e^x$ , рассматривая ее какъ предѣлъ  $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ , когда  $m$  увеличивается безпредѣльно.

§ 288. Какъ послѣднее приложеніе формулы бинома, составимъ разложеніе функціи  $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$  въ рядъ по степенямъ  $\alpha$ . Очевидно, имѣемъ:

$$\begin{aligned} (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\alpha(2x - \alpha) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\alpha^2(2x - \alpha)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\alpha^3(2x - \alpha)^3 + \dots \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\alpha^n(2x - \alpha)^n + \dots; \end{aligned}$$

раскрывая различныя степени  $(2x - \alpha)$  и располагая по степенямъ  $\alpha$ , безъ труда замѣчаемъ, что коэффиціентъ при  $\alpha^n$  есть

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{n(n-1) \dots (n-2m+1)}{2 \cdot 4 \dots 2m(2n-1)(2n-3)(2n-2m+1)}x^{n-2m} \mp \dots \right]. \end{aligned}$$

Но, какъ легко доказать,

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (n+1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

слѣдовательно, произведеніе  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n \cdot X_n$  имѣетъ общимъ членомъ

$$\pm \frac{2n(2n-1) \dots (n-2m+1)}{2 \cdot 4 \dots 2m(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2m+1)}x^{n-2m},$$

т.-е., по сокращеніи на общихъ множителей,

$$\pm \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m} (2n-2m)(2n-2m-1)\dots(n-2m+1)x^{n-2m},$$

или наконецъ

$$\pm \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots m} \frac{d^m(x^{2n-2m})}{dx^m},$$

откуда заключаемъ, что произведение  $1\cdot 2\cdot 3\dots n\cdot 2^n\cdot X_n$  есть  $n$ -ая производная по  $x$  отъ многочлена

$$x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{2n-4} - \dots = (x^2 - 1)^n.$$

Итакъ,

$$X_n = \frac{1}{2^n \cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

и

$$(1 - 2\alpha x + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1\alpha + X_2\alpha^2 + \dots + X_n\alpha^n + \dots$$

Эта формула весьма извѣстна и мы еще вновь ее получимъ нѣсколькими способами.

**§ 289. Разложеніе  $\sin x$ .** — Формула Маклорена даетъ непосредственно:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots - \frac{x^{4n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\dots(4n-1)} + \frac{x^{4n+1} \sin \theta x}{1\cdot 2\cdot 3\dots(4n+1)}.$$

При всякомъ значеніи  $x$  дополнительный членъ стремится къ нулю, такъ что всегда имѣемъ:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \dots$$

**§ 290. Разложеніе  $\cos x$ .** — Формула Маклорена даетъ непосредственно:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots + \frac{x^{4n} \cos \theta x}{1\cdot 2\cdot 3\dots 4n};$$

Здѣсь, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, дополнительный членъ стремится къ нулю при возрастаніи  $n$ , и, значитъ, при всякомъ значеніи  $x$  имѣемъ:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots$$

**§ 291. Разложеніе  $\cos mx$  въ рядъ по степенямъ  $\sin x$ .** — Если формула Маклорена даетъ возможность развернуть функцію по степенямъ перемѣнной, то она тѣмъ самымъ даетъ возможность развернуть ее по степенямъ другой, произвольно выбранной, функціи, стоитъ только эту вторую функцію принять за перемѣнную.

Пусть, напимѣрь, требуется развернуть  $\cos mx$  въ рядъ по степенямъ  $\sin x$ ; положивъ  $\sin x = y$ , имѣемъ  $\cos mx = \cos m(\arcsin y)$ . Но мы нашли (§ 151), при  $x = 0$ ,

$$\frac{d^{2n+2} \cos m \arcsin x}{dx^{2n}} = (-1)^{n+1} m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16) \dots (m^2 - 4n^2) \cos mk\pi,$$

$$\frac{d^{2n+1} \cos m \arcsin x}{dx^{2n+1}} = \mp (-1)^n (m^2 - 1)(m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] \sin mk\pi,$$

гдѣ  $k$  обозначаетъ цѣлое произвольное число, а знакъ  $\mp$  во второй формулѣ соответствуетъ случаю, когда это число — четное; слѣдовательно, формула Маклорена даетъ:

$$\cos m(\arcsin y) = \cos mk\pi \left[ 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} y^2 + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^4 - \frac{m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} y^6 + \dots \right] \mp$$

$$\mp m \sin mk\pi \left[ y - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 - \dots \right],$$

при чемъ  $\mp$  долженъ быть взятъ при  $k$  четномъ.

Замѣняя  $y$  его значеніемъ, пишемъ:

$$\cos mx = \cos mk\pi \left[ 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \right] \mp$$

$$\mp m \sin mk\pi \left[ \sin x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right].$$

Не слѣдуетъ удивляться появленію во второй части равенства неопредѣленнаго числа  $k$ . Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что если  $\sin x$  дано, то  $\cos mx$  еще не опредѣлено, и можетъ имѣть безчисленное множество значеній при  $m$  несоизмѣримомъ; слѣдовательно, и разложеніе этой функціи, чтобы быть общимъ, должно быть подобно функціи неопредѣленнымъ.

Относительно выбора значенія  $x$ , для опредѣленія цѣлаго числа  $k$ , которое ему соответствуетъ и которое придаетъ предыдущей формулѣ точность, слѣдуетъ обратиться къ тому, что уже сказано въ § 151-мъ. Значеніе  $\cos mk\pi$  принимаетъ функція  $\cos mx$ , когда  $\sin x$  равенъ нулю, и, слѣдовательно, предположеніе  $\sin x = 0$  отвѣчаетъ  $x = k\pi$ . Если  $\sin x$  возрастаетъ отъ 0 до 1, то  $x$  измѣняется отъ  $k\pi$  до  $k\pi + \frac{\pi}{2}$  при  $k$  четномъ, и отъ  $k\pi$  до  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  при  $k$  нечетномъ.

Если  $x$  обозначаетъ наименьшую изъ дугъ, соответствующую данному синусу, то  $k = 0$  и

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2 - 4)(m^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots;$$

эта формула, данная Эйлеромъ и Лагранжемъ, отвѣчаетъ, какъ мы видимъ, только частному случаю.



§ 292. При  $m$  цѣломъ имѣемъ  $\sin mk\pi = 0$  и  $\cos mk\pi = \pm 1$ . Если притомъ  $m$  — четное, то рядъ приводится къ опредѣленному числу членовъ. Напримѣръ, полагая  $m = 2, m = 4, m = 6$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x, \\ \cos 4x &= 1 - 8 \sin^2 x + 8 \sin^4 x, \\ \cos 6x &= 1 - 18 \sin^2 x + 48 \sin^4 x - 32 \sin^6 x.\end{aligned}$$

§ 293. Разложение  $\sin mx$  по степенямъ  $\sin x$ . — Полагая  $\sin x = y$ , имѣемъ  $\sin mx = \sin(m \arcsin y)$ ; а такъ какъ по § 153-му, при  $y = 0$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d^{2n+2} \sin m \arcsin y}{dy^{2n+2}} &= (-1)^n m^2 (m^2 - 4) \dots (m^2 - 4n^2) \sin mk\pi, \\ \frac{d^{2n+1} \sin m \arcsin y}{dy^{2n+1}} &= \pm (-1)^n (m^2 - 1) (m^2 - 9) \dots [m^2 - (2n - 1)^2] m \cos mk\pi,\end{aligned}$$

то, слѣдовательно, теорема Маклорена даетъ, при замѣнѣ  $y$  на  $\sin x$ ,

$$\begin{aligned}\sin mx &= \sin mk\pi \left[ 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2 (m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{m^2 (m^2 - 4) (m^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \right] \\ &\pm m \cos mk\pi \left[ \sin x - \frac{(m^2 - 1) \sin^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(m^2 - 1) (m^2 - 9) \sin^5 x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right],\end{aligned}$$

гдѣ  $k$  — цѣлое число и притомъ произвольное, пока дуга  $x$  задается только по синусу. Во второмъ членѣ знакъ  $+$  берется при  $k$  четномъ и знакъ  $-$  при  $k$  нечетномъ.

Формула предполагаетъ, при  $\sin x = 0$ ,  $\sin mx = \sin mk\pi$ ; когда  $\sin x$  увеличивается отъ нуля, уголъ  $x$ , равный сначала  $k\pi$ , увеличивается до  $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ , если  $k$  — четное, и уменьшается до  $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$ , если  $k$  — нечетное. Въ первомъ случаѣ нужно брать знакъ  $+$  при второмъ членѣ, а во второмъ случаѣ знакъ  $-$ .

Когда  $x$  — наименьшая дуга, соотвѣтствующая данному синусу, то

$$\sin mx = m \sin x - \frac{m(m^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{m(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots$$

Эта формула дана сначала Эйлеромъ и затѣмъ Лагранжемъ.

Когда  $m$  — цѣлое,  $\sin mk\pi$  приводится къ нулю, и если при этомъ  $m$  — нечетное, члены съ нѣкотораго мѣста обращаются въ нуль и рядъ приводится къ опредѣленному числу членовъ. Такъ, напр.,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \\ \sin 5x &= 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x, \\ \sin 7x &= 7 \sin x - 56 \sin^3 x + 112 \sin^5 x - 64 \sin^7 x, \\ \sin 9x &= 9 \sin x - 120 \sin^3 x + 432 \sin^5 x - 576 \sin^7 x + 256 \sin^9 x, \\ \sin 11x &= 11 \sin x - 220 \sin^3 x + 1232 \sin^5 x - 2816 \sin^7 x + 2816 \sin^9 x - 1024 \sin^{11} x.\end{aligned}$$

§ 294. Если раздѣлить на  $m$  обѣ части формулы

$$\sin mx = m \left[ \sin x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right]$$

и затѣмъ положить  $m = 0$ , то первая часть  $\frac{\sin mx}{m}$  обратится въ  $x$ , и мы получимъ:

$$x = \sin x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x + \dots$$

Это — весьма извѣстная формула; мы ее снова выведемъ болѣе прямымъ путемъ.

§ 295. Изъ формулъ:

$$\left. \begin{aligned} \sin mx &= m \left[ \sin x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right], \\ \cos mx &= 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно также получить разложенія  $\sin z$  и  $\cos z$  по степенямъ  $z$ . Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ  $mx = z$ ; пусть затѣмъ  $m$  увеличивается безпредѣльно, а  $x$  стремится къ нулю; такъ какъ отношеніе  $\frac{\sin x}{x}$  въ предѣлѣ равно единицѣ, то можно замѣнить  $\sin x$  черезъ  $x$ , или, что одно и то же, черезъ  $\frac{z}{m}$ ; кромѣ того,

$$\begin{aligned} \lim \frac{m(m^2 - 1)}{m^3} &= 1, \\ \lim \frac{m(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{m^5} &= 1, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Слѣдовательно, уравненія (1) въ предѣлѣ будутъ:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \end{aligned}$$

§ 296. Разложеніе  $\cos mx$  по степенямъ  $\cos x$ . — Принимая во вниманіе полученныя въ § 154-мъ значенія производныхъ отъ  $\cos m(\arccos x)$ , находимъ непосредственно по теоремѣ Маклорена:

$$\begin{aligned} \cos mx &= \cos(2k + 1) \frac{m\pi}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots \right) \pm \\ &\pm m \sin(2k + 1) \frac{m\pi}{2} \left[ \cos x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 x - \dots \right], \end{aligned}$$

гдѣ  $k$  — произвольное цѣлое число и знаки соотвѣтствуютъ:  $+$  случаю, когда  $k$  — четное, и  $-$  случаю, когда  $k$  — нечетное. Формула (1) предполагаетъ, что, при  $\cos x = 0$ ,  $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ . Если  $\cos x$  измѣняется отъ 0 до 1, то  $x$  измѣняется отъ  $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$  до  $k\pi$ , когда  $k$  — четное, и отъ  $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$  до  $(k + 1)\pi$ , когда  $k$  — нечетное.

Если  $x$  должно выражать наименьшую дугу, косинусъ которой есть  $\cos x$ , то  $k = 0$  и

$$\begin{aligned} \cos mx &= \cos \frac{m\pi}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots \right) + \\ &+ m \sin \frac{m\pi}{2} \left( \cos x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \dots \right). \end{aligned}$$

Полагая  $m = 2$ ,  $m = 3$ ,  $m = 4$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1, \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \cos 4x &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1, \\ \cos 5x &= 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x, \\ \cos 6x &= 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

Вообще,  $\cos mx$  будетъ состоятъ изъ конечнаго числа членовъ, всякій разъ какъ  $m$  является цѣлымъ числомъ. Члены — четной или нечетной степени, смотря по тому, какое  $m$ , четное или нечетное.

**§ 297. Разложене  $\sin mx$  по степенямъ  $\cos x$ .** — Принимая во вниманіе полученные въ § 155-мъ значенія производныхъ отъ  $\sin(m \arccos x)$  при  $x = 0$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \sin mx &= \sin(2k + 1) \frac{m\pi}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots \right) \mp \\ &\mp m \cos(2k + 1) \frac{m\pi}{2} \left[ \cos x - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 x - \dots \right], \end{aligned}$$

гдѣ  $k$  — цѣлое произвольное число, а знакъ  $-$  при второмъ членѣ соотвѣтствуетъ случаю, когда  $k$  — четное. Формула предполагаетъ, что, при  $\cos x = 0$ ,  $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ , и когда  $\cos x$  измѣняется отъ 0 до  $+1$ , то  $x$  измѣняется отъ  $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$  до  $k\pi$  при  $k$  четномъ и отъ  $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$  до  $(k + 1)\pi$  при  $k$  нечетномъ. Ни при какомъ значеніи  $m$  этотъ рядъ не приводится къ опредѣленному числу членовъ.

§ 298. Замѣчаніе относительно предыдущихъ четырехъ рядовъ. — Разсматриваемъ только-что полученные четыре ряда:

$$\begin{aligned} \cos mx &= \cos mk\pi \left[ 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \right] \mp \\ &\mp m \sin mk\pi \left[ \sin x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin mx &= \sin mk\pi \left[ 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \sin^6 x + \dots \right] \pm \\ &\pm m \cos mk\pi \left[ \sin x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos mx &= \cos (2k+1) \frac{m\pi}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots \right) \mp \\ &\pm m \sin (2k+1) \frac{m\pi}{2} \left[ \cos x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 x - \dots \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin mx &= \sin (2k+1) \frac{m\pi}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots \right) \mp \\ &\mp m \cos (2k+1) \frac{m\pi}{2} \left[ \cos x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^5 x - \dots \right]. \end{aligned}$$

Не мѣшаетъ замѣтить, что самый видъ этихъ рядовъ можетъ служить ихъ повѣркою. Выше было объяснено, какъ надо понимать первую часть при данномъ значеніи  $k$ ; называя, поэтому, черезъ  $\alpha$  наименьшую дугу, положительную или отрицательную, принимаемъ за синусъ  $\sin x$  и пишемъ:

$$\begin{aligned} \cos m\alpha &= 1 - m^2 \sin^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x - \dots, \\ \sin m\alpha &= m \left[ \sin x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right]; \end{aligned}$$

также, называя черезъ  $\alpha'$  наименьшую дугу, имѣющую синусомъ  $\cos x$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} \cos m\alpha' &= 1 - \frac{m^2}{1 \cdot 2} \cos^2 x + \frac{m^2(m^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^4 x - \dots, \\ \sin m\alpha' &= m \left( \cos x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^3 x + \dots \right). \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, четыре предыдущихъ формулы примутъ видъ:

$$\cos mx = \cos mk\pi \cos m\alpha \pm \sin mk\pi \sin m\alpha = \cos (mk\pi \pm m\alpha),$$

$$\sin mx = \sin mk\pi \cos m\alpha \pm \cos mk\pi \sin m\alpha = \sin (mk\pi \pm m\alpha),$$

$$\cos mx = \cos (2k+1) \frac{m\pi}{2} \cos m\alpha' \pm \sin (2k+1) \frac{m\pi}{2} \sin m\alpha' = \cos \left[ (2k+1) \frac{m\pi}{2} \pm m\alpha' \right],$$

$$\sin mx = \sin (2k+1) \frac{m\pi}{2} \cos m\alpha' \mp \cos (2k+1) \frac{m\pi}{2} \sin m\alpha' = \sin \left[ (2k+1) \frac{m\pi}{2} \mp m\alpha' \right],$$

при чемъ верхніе знаки соотвѣтствуютъ случаю, когда цѣлое число  $k$  — четное, а нижніе — случаю, когда оно — нечетное. Точность этихъ послѣднихъ формулъ очевидна; въ самомъ дѣлѣ, если  $\alpha$  — наименьшая дуга, синусъ которой есть  $\sin x$ , то дуга  $x$  выразится черезъ  $k\pi \pm \alpha$ , гдѣ знакъ  $+$  соотвѣтствуетъ случаю  $k$  четнаго, а знакъ  $-$  случаю  $k$  нечетнаго. Также, если  $\alpha$  — наименьшая дуга, синусъ которой есть  $\cos x$ , то общая величина дуги, косинусъ которой есть  $\cos x$ , будетъ  $(2k+1)\frac{\pi}{2} \mp \alpha'$ . Очевидно, что предыдущія формулы могутъ быть написаны а priori и что частныя формулы Эйлера содержатъ неявно общее разложене, данное позднѣе Пуансо (Poinso).

§ 299. Разложене  $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$  по степенямъ  $\tan x$ . — Полагая  $\tan x = y$ , имѣемъ  $\frac{\sin mx}{\cos^m x} = \sin (\arctan y) (1 + y^2)^{\frac{m}{2}}$ . Но по § 156-му при  $x = 0$

$$\frac{d^{2n} \sin (m \arctan x) (1 + x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{2n}} = 0,$$

$$\frac{d^{2n+1} \sin (m \arctan x) (1 + x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{2n+1}} = (-1)^n m (m-1) (m-2) \dots (m-2n+1) (m-2n);$$

слѣдовательно, по теоремѣ Маклорена,

$$\sin (m \arctan y) (1 + y^2)^{\frac{m}{2}} = my - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^5 - \dots,$$

т.-е.

$$\sin mx = \cos^m x \left[ m \tan x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \tan^3 x + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \tan^5 x - \dots \right].$$

Въ этой формулѣ  $x$  обозначаетъ наименьшую дугу, тангенсъ которой есть  $\tan x$ .



Также найдемъ, съ помощью вычисленныхъ производныхъ (§ 157), что

$$\cos mx = \cos^m x \left[ 1 - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \tan^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \tan^4 x - \dots \right].$$

Общія формулы, для случая, когда  $x$  — какая-угодно изъ дугъ, имѣющихъ тангенсомъ  $\tan x$ , могутъ быть получены изъ этихъ послѣднихъ. Въ самомъ дѣлѣ, если  $\alpha$  — наименьшая изъ дугъ, имѣющихъ тангенсомъ  $\tan x$ , то всѣ, вообще, примутъ видъ  $k\pi + \alpha$ , и, слѣдовательно, общія значенія  $\sin mx$  и  $\cos mx$  будутъ:

$$\begin{aligned} \sin mx &= \sin m\alpha \cos mk\pi + \sin mk\pi \cos m\alpha, \\ \cos mx &= \cos m\alpha \cos mk\pi - \sin m\alpha \sin mk\pi. \end{aligned}$$

§ 300. Разложене  $\arctang x$ . — Мы нашли (§ 146), что при  $x = 0$  вообще:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n} \arctang x}{dx^{2n}} &= 0, \\ \frac{d^{2n+1} \arctang x}{dx^{2n+1}} &= (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n) (-1)^n; \end{aligned}$$

отсюда, по формулѣ Маклорена,

$$\arctang x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad (1)$$

и такъ какъ мы также нашли (§ 144), положивъ  $\arctang x = u$ ,  $\frac{\pi}{2} - u = y$ , что

$$\frac{d^{n+1} \arctang x}{dx^{n+1}} = \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) (-1)^n}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1)y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n (-1)^n \sin(n+1)y \sin^{n+1}y,$$

то дополнительный членъ будетъ

$$\frac{x^n}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1) \left( \frac{\pi}{2} - \arctang \theta x \right).$$

Для значеній же  $x$ , взятыхъ между  $-1$  и  $+1$ ,  $\frac{x^n}{(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ , очевидно, стремится къ нулю при возрастаніи  $n$ , и, слѣдовательно, рядъ (1) справедливъ для всѣхъ значеній перемѣнной въ этихъ предѣлахъ.

§ 301. Разложене  $\arctang(x+h)$ . — Прилагая формулу Тейлора и пользуясь выраженіемъ производной, только-что приведенной въ предыдущемъ параграфѣ, находимъ:

$$\arctang(x+h) = \arctang x + h \sin^2 y - \frac{h^2}{2} \sin^2 y \sin 2y + \frac{h^3}{3} \sin^3 y \sin 3y - \frac{h^4}{4} \sin^4 y \sin 4y + \dots (1)$$

Изъ этой формулы вытекаетъ нѣсколько замѣчательныхъ слѣдствій. Полагая въ ней  $h = -x$ , получаемъ:

$$0 = \operatorname{arctang} x - x \sin^2 y - \frac{x^2}{2} \sin^2 y \sin 2y - \frac{x^3}{3} \sin^3 y \sin 3y - \dots,$$

а такъ какъ изъ уравненія  $\operatorname{arctang} x = \frac{\pi}{2} - y$  слѣдуетъ, что

$$x = \cot y, \text{ и, значитъ, } h = -\cot y,$$

то предыдущее уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{\pi}{2} - y = \sin y \cos y + \frac{\cos^2 y \sin 2y}{2} + \frac{\cos^3 y \sin 3y}{3} + \frac{\cos^4 y \sin 4y}{4} + \dots \quad (2)$$

Если въ той же формулѣ (1) положить  $h = -x - \frac{1}{x} = -\operatorname{tang} u - \cot u = -\frac{1}{\sin y \cos y}$ , то будемъ имѣть:

$$\operatorname{arctang} (x + h) = \operatorname{arctang} \left( -\frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctang} x = -y,$$

и, слѣдовательно, формула (1) приметъ видъ:

$$-y = \frac{\pi}{2} - y - \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{1}{2} \frac{\sin 2y}{\cos^2 y} - \frac{1}{3} \frac{\sin 3y}{\cos^3 y} - \dots,$$

откуда находимъ

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2y}{\cos^2 y} + \frac{1}{3} \frac{\sin 3y}{\cos^3 y} + \dots$$

Наконецъ, полагая

$$h = -\sqrt{1+x^2} = -\frac{1}{\cos u} = -\frac{1}{\sin y},$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctang} (x + h) &= \operatorname{arctang} (x - \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arctang} [\sqrt{1+x^2} (\sin u - 1)] = \\ &= \operatorname{arctang} \frac{\sin u - 1}{\cos u} = -\operatorname{arctang} \frac{1 - \cos y}{\sin y} = \\ &= -\operatorname{arctang} . \operatorname{tang} \frac{1}{2} y = -\frac{1}{2} y, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$-\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} - y - \sin y - \frac{1}{2} \sin 2y - \frac{1}{3} \sin 3y - \dots$$

откуда

$$\frac{\pi - y}{2} = \sin y + \frac{1}{2} \sin 2y + \frac{1}{3} \sin 3y + \dots$$

Всѣ эти ряды очень извѣстны и мы сочли нужнымъ привести ихъ здѣсь; кромѣ того, они представляютъ первый примѣръ преобразованій, какимъ можно подвергнуть результаты, непосредственно получаемые изъ формулъ Тэйлора. Къ большинству изъ нихъ мы еще возвратимся другими путями, которые дадутъ намъ возможность судить, въ какихъ случаяхъ они приложимы.

§ 302. Разложеніе  $\arcsin x$ . — Мы нашли (§ 147), что при  $x = 0$

$$\frac{d^{2n} \arcsin x}{dx^{2n}} = 0,$$

$$\frac{d^{2n+1} \arcsin x}{dx^{2n+1}} = (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1))^2;$$

отсюда

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5 \cdot (1 \cdot 3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^7 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

Этотъ рядъ, очевидно, тождественный съ тѣмъ, который данъ въ § 294-мъ, будетъ сходящимся для значеній  $x$ , меньшихъ единицы. Мы не станемъ разсматривать здѣсь величины остатка, потому что мы сможемъ другимъ путемъ доказать, что этотъ рядъ дѣйствительно представляетъ  $\arcsin x$ .

§ 303. Разложеніе  $(\arcsin x)^2$ . — Мы нашли (§ 148), что

$$\frac{d^{2n} (\arcsin x)^2}{dx^{2n}} = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \dots (2n - 2)^2,$$

$$\frac{d^{2n+1} (\arcsin x)^2}{dx^{2n+1}} = 0;$$

отсюда

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{2}{3} \frac{x^4}{2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{x^6}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \frac{x^8}{4} + \dots$$

Конечно, въ этой формулѣ, какъ и въ предыдущей,  $\arcsin x$  обозначаетъ наименьшую изъ дугъ, синусъ которыхъ есть  $x$ , т.-е. ту дугу, которая обращается въ нуль при  $x = 0$ , остатокъ же заключается между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ .

§ 304. Разложеніе  $x \cot x$ . — По значеніямъ производныхъ отъ  $x \cot x$ , найденнымъ выше, при  $x = 0$ , разложеніе  $x \cot x$  будетъ:

$$x \cot x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \frac{2x^{10}}{93555} - \dots$$

Законъ составленія коэффициентовъ вытекаетъ изъ формулъ (§ 147), по которымъ можно вычислять ихъ въ послѣдовательномъ порядкѣ; но ихъ выраженіе тѣсно связано, по закону, съ которымъ мы познакомимся далѣе, съ рядомъ весьма важныхъ чиселъ, извѣстныхъ подъ именемъ чиселъ Бернулли.

§ 305. Разложене  $\frac{x}{e^x - 1}$ . — Пользуясь результатами, данными въ § 150-мъ, находимъ непосредственно:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{30} \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{1}{42} \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$

Коэффициенты при  $\frac{x^2}{1.2}$ ,  $-\frac{x^4}{1.2.3.4}$ ,  $\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$ , ... называются *числами Бернулли*; мы рассмотримъ ихъ въ отдѣльной главѣ. Обозначая ихъ черезъ  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , пишемъ:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1.2} x^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4} x^4 + \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6} x^6 - \dots$$

Замѣтимъ, что разложене  $\frac{x}{e^x - 1}$  приводитъ къ разложенію также  $\frac{x}{e^x + 1}$  и  $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ . Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

и, слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x + 1} &= 1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{2} - B_2 \frac{x^4}{1.2.3.4} + B_3 \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots \\ &= 1 + x - B_1 \frac{(2x)^2}{1.2} + B_2 \frac{(2x)^4}{1.2.3.4} - \dots, \end{aligned}$$

т.-е.

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{2} - \frac{B_1 x^2}{2} (2^2 - 1) + \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} (2^4 - 1) - B_3 x^6 \frac{2^6 - 1}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

Такъ же

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{x} \cdot \frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^5}{240} - \frac{17x^7}{40320} + \dots$$

§ 306. Разложене  $x \cot x$  приводитъ къ разложенію, безъ какихъ-либо новыхъ вычисленій, нѣкоторыхъ другихъ функцій, связанныхъ съ  $x \cot x$  простыми соотношеніями. Имѣемъ:

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2 \cot 2x,$$

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \cot x;$$

слѣдовательно, полагая

$$x \cot x = 1 - A_2 x^2 - A_4 x^4 - A_6 x^6 - A_8 x^8 - \dots,$$

выводимъ:

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} x &= A_2(2^2 - 1)x + A_4(2^4 - 1)x^3 + A_6(2^6 - 1)x^5 + \dots, \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x} + A_2(2 - 1)\frac{x}{2} + A_4(2^3 - 1)\frac{x^3}{8} + A_6(2^5 - 1)\frac{x^5}{32} + \dots\end{aligned}$$

Имѣемъ, наконецъ,

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x.$$

Такъ какъ функція  $\frac{\sin x}{x}$  — четная и равна нулю при  $x = 0$ , то можно положить

$$\frac{\sin x}{x} = C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \dots;$$

беря производныя отъ обѣихъ частей, находимъ:

$$\cos x - \frac{1}{x} = 2C_2 x + 4C_4 x^3 + 6C_6 x^5 + \dots;$$

замѣняя же  $\cos x$  его рядомъ, заключаемъ, что

$$C_2 = -\frac{A_2}{2}, \quad C_4 = -\frac{A_4}{4}, \quad C_6 = -\frac{A_6}{6}, \dots,$$

и, значитъ,

$$\frac{\sin x}{x} = -\frac{A_2}{2}x^2 - \frac{A_4}{4}x^4 - \frac{A_6}{6}x^6 - \dots$$

Подставляя на мѣсто коэффициентовъ  $A_2, A_4, A_6, \dots$  соотвѣтственные числа, получаемъ:

$$\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{45}\frac{x^4}{4} - \frac{2}{945}\frac{x^6}{6} - \frac{1}{4725}\frac{x^8}{8} - \frac{2}{93555}\frac{x^{10}}{10} - \dots$$

#### Нѣкоторыя приложенія теоремы Тэйлора

**§ 307.** Приложеніе теоремы Тэйлора къ разложенію функціи требуетъ вычисленія производныхъ отъ этой функціи; но иногда случается, что, благодаря частнымъ соображеніямъ, приводящимъ прямо къ разложенію, теорема Тэйлора даетъ, наоборотъ, средство для вычисленія производныхъ высшаго порядка, непосредственное составленіе которыхъ было бы болѣе затруднительно. Слѣдующій примѣръ, заимствованный у англійскаго геометра Мёрфея (Murphy), весьма замѣчателенъ.

Разсмотримъ выраженіе

$$x^{n+\alpha} = x^n e^{\alpha \ln x} = x^n \left[ 1 + \alpha \ln x + \frac{\alpha^2 (\ln x)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\alpha^n (\ln x)^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots \right].$$



Коэффициентъ при  $x^n$  въ этомъ разложеніи есть  $\frac{x^n (lx)^n}{1 \cdot 2 \dots n}$ ; слѣдовательно, въ разложеніи  $\frac{d^n x^{n+\alpha}}{dx^n}$  коэффициентъ при  $x^n$ , очевидно, равенъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n x^n (lx)^n}{dx^n}.$$

Но

$$\frac{d^n x^{n+\alpha}}{dx^n} = x^\alpha (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n),$$

а это послѣднее выраженіе равно произведенію ряда

$$x^\alpha = e^{\alpha lx} = 1 + \alpha lx + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} (lx)^2 + \frac{\alpha^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (lx)^3 + \dots + \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \dots n} (lx)^n + \dots$$

на многочленъ

$$(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n) = \alpha^n + S_1 \alpha^{n-1} + S_2 \alpha^{n-2} + \dots + S_n,$$

гдѣ  $S_p$  есть сумма всевозможныхъ произведеній, по  $p$  множителей въ каждомъ, изъ первыхъ  $n$  цѣлыхъ чиселъ. Составляя произведеніе по обычному методу умноженія, замѣчаемъ, что коэффициентъ при  $x^n$  есть

$$1 + S_1 lx + \frac{S_2}{1 \cdot 2} (lx)^2 + \dots + \frac{S_n}{1 \cdot 2 \dots n} (lx)^n.$$

Итакъ, это есть значеніе  $\frac{d^n x^n (lx)^n}{dx^n}$ ; гораздо труднѣе получить его непосредственно.

**§ 308.** Теорема Тэйлора даетъ намъ, наконецъ, изящную формулу для выраженія производной какого-угодно порядка функціи отъ функціи. Пусть  $y = \varphi(u)$  такая функція, гдѣ  $u$  — данная функція отъ  $x$ . Приписывая  $x$  приращеніе  $h$ , соотвѣтственное приращеніе  $y$  представимъ, по формулѣ Тэйлора, черезъ

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} h + \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{d^n y}{dx^n} \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

Если  $k$  — соотвѣтственное приращеніе  $u$ , то приращеніе  $y$ , т.-е. приращеніе  $\varphi(u)$  представится также черезъ

$$\Delta y = \frac{d\varphi}{du} k + \frac{d^2 \varphi}{du^2} \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{d^n \varphi}{du^n} \frac{k^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

Кромѣ того, по той же теоремѣ,

$$k = \frac{du}{dx} h + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{d^n u}{dx^n} \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots$$

Подставляя это значеніе  $h$  въ предыдущій рядъ и приравнивая другъ другу оба найденныхъ значенія  $\Delta y$ , пишемъ:

$$\sum \frac{d^n y}{dx^n} \frac{h^n}{1.2 \dots n} = \sum \frac{d^p \varphi}{du^p} \frac{\left( \frac{du}{dx} h + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + \dots \right)^p}{1.2 \dots p}.$$

Если во второй части развернуть  $p$ -ую степень по извѣстной формулѣ для степени многочлена, то, приравнивая другъ другу коэффициенты при  $h^n$  въ обѣихъ частяхъ, будемъ имѣть, наконецъ,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum 1.2.3 \dots n \frac{d^p \varphi(u)}{du^p} \frac{\left( \frac{du}{dx} \right)^{h_1}}{1.2 \dots h_1} \frac{\left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^{h_2}}{1.2 \dots h_2} \dots \frac{\left( \frac{d^m u}{dx^m} \right)^{h_m}}{1.2.3 \dots h_m},$$

гдѣ  $h_1, h_2, \dots, h_m$  должны принимать такія значенія, чтобы

$$h_1 + 2h_2 + \dots + mh_m = n,$$

а  $p$  было бы равно  $h_1 + h_2 + \dots + h_m$ .

Если въ этой формулѣ предположить  $u = x^2$ , то будемъ имѣть  $\frac{du}{dx} = 2x$ ,  $\frac{d^2 u}{dx^2} = 2$ , а всѣ слѣдующія производныя, будучи нулями, должны имѣть показателемъ нуль; формула тогда приводится къ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum 1.2.3 \dots n \cdot \varphi^p(x^2) \frac{2x^{h_1}}{1.2.3 \dots h_1} \frac{1}{1.2.3 \dots h_2}.$$

При этомъ суммированіи  $h_2$  произвольно,  $h_1$  равно  $n - 2h_2$  и  $p$  равно  $h_1 + h_2$ , т.-е.  $n - h_2$ ; суммированіе же должно распространяться на всѣ значенія  $h_2$ , меньшихъ  $\frac{n}{2}$ .

#### УПРАЖНЕНІЯ

Если положить, какъ сдѣлалъ Гауссъ въ одномъ изъ своихъ Мемуаровъ,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots,$$

то

1.  $\sin nx = n \sin x \cos x F\left(\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right).$
2.  $\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x F\left(-\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\tan^2 x\right).$
3.  $\sin nx = n \sin x \cos^{-n-1} x F\left(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\tan^2 x\right).$
4.  $\frac{x}{\cos x} = \sin x F\left(1, 1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right).$

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### Нѣкоторые разложенія въ ряды

#### Рядъ Бернулли

§ 309. Яковъ Бернулли (Jacques Bernoulli) указалъ, вскорѣ послѣ открытія дифференціального исчисленія, на одинъ рядъ, пригодный, подобно ряду Тэйлора, для разложенія какой-угодно функціи; онъ безъ всякаго труда выводится изъ ряда Тэйлора. Если въ формулѣ:

$$F(x + h) = F(x) + h F'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} F''(x) + \dots$$

положить  $h = -x$  и перенести  $F(x)$  въ первую часть, а  $F(x + h)$  во вторую, то получимъ:

$$F(x) = F(0) + x F'(0) - \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \dots \quad (1)$$

Такъ какъ коэффициенты при различныхъ степеняхъ  $x$  являются здѣсь функціями отъ самой переменнѣй  $x$ , то этотъ рядъ весьма отличенъ отъ ряда Тэйлора и, вообще, гораздо менѣе его полезенъ.

Укажемъ здѣсь на одно приложеніе этой формулы. Пусть

$$F(x) = (x + a)^n,$$

формула Бернулли даетъ:

$$(x + a)^n = a^n + nx(x + a)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2(x + a)^{n-2} + \dots \quad (2)$$

Этотъ рядъ можетъ быть полученъ также и при помощи бинѳма Ньютона: въ самомъ дѣлѣ,

$$a^n = (a + x - x)^n = (a + x)^n - nx(a + x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2(a + x)^{n-2} - \dots \quad (3)$$

§ 310. Мы выбрали предыдущий примѣръ, потому что найденная формула даетъ довольно удобный способъ для вычисленія съ большою степенью точности численнаго значенія нѣкоторыхъ корней. Дѣйствительно, дѣля уравненіе (3) предыдущаго параграфа на  $(a + x)^n a^n$ , получаемъ:

$$(a + x)^{-n} = \frac{1}{a^n} \left[ 1 - \frac{nx}{a + x} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{x^2}{(a + x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \frac{x^3}{(a + x)^3} + \dots \right].$$

Этотъ рядъ можетъ быть съ выгодною употребленъ для вычисленія ирраціональных корней какого-угодно порядка.

Разлагаемъ число  $(a + x)$ , или его произведеніе на нѣкоторую степень того же порядка, на двѣ весьма неравныя части, изъ которыхъ  $a$  есть  $n$ -ая степень цѣлаго числа.

Такъ, напр., для вычисленія  $\sqrt{2}$  беремъ

$$50 = 5^2 \cdot 2 = 49 + 1 = 7^2 + 1,$$

откуда

$$5 \sqrt{2} = \sqrt{49 + 1}.$$

Поэтому полагаемъ

$$a = 49, x = 1, n = -\frac{1}{2}$$

и пишемъ:

$$5 \sqrt{2} = 7 \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot 50} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 50^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 50^3} + \dots \right);$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left( 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 10^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 10^6} + \dots \right),$$

что представляетъ быстро сходящійся и легко вычисляемый рядъ.

Въ самомъ дѣлѣ, обращая члены въ скобкахъ въ десятичныя дроби, находимъ:

$$\sqrt{2} = 1,41421 \ 35623 \ 73095 \ 04880,$$

съ двадцатью точными цифрами послѣ запятой.

Желая вывести изъ той же формулы кубическій корень изъ 3, замѣчаемъ, что

$$2 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 - 3},$$

и, слѣдовательно, полагая  $a = 27$ ,  $x = 3$ ,  $n = -\frac{1}{3}$ , имѣемъ:

$$2 \sqrt[3]{3} = 3 \left( 1 - \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 24} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 3^2}{3 \cdot 6 \cdot 24^2} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 24^3} + \dots \right).$$

откуда

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{24} + \frac{4}{24 \cdot 48} - \frac{4 \cdot 7}{24 \cdot 48 \cdot 72} + \dots \right).$$

Можно получить ряды, еще болѣе сходящіеся, напр.,

$$9 \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{13^3 - 10},$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{13}{9} \left( 1 - \frac{10}{3 \cdot 2187} + \frac{4 \cdot 10^2}{3 \cdot 6 \cdot 2187^2} - \frac{4 \cdot 7 \cdot 10^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 2187^3} + \dots \right),$$

сильно сходящийся рядъ, въ которомъ отношеніе всякаго его члена къ предыдущему  $< \frac{1}{200}$ .

Численное вычисленіе этихъ членовъ даетъ

$$\frac{9}{13} \sqrt[3]{3} = 0,99848 \ 04717 \ 513,$$

откуда

$$\sqrt[3]{3} = 1,44224 \ 95703 \ 074 \text{ съ точностью до 13 знаковъ послѣ запятой.}$$

#### ФОРМУЛА ЛАГРАНЖА

§ 311. Пусть  $z$  есть функція отъ  $a$  и  $x$ , опредѣляемая уравненіемъ

$$z = a + x\varphi(z). \quad (1)$$

Эту функцію можно развернуть въ рядъ, расположенный по степенямъ  $x$ , и формула Маклорена дастъ, какъ и для всякой другой функціи, послѣдовательные члены разложенія. Задача поэтому не отличается ничѣмъ существеннымъ отъ задачъ, уже прежде рѣшенныхъ нами, но она замѣчательна по изяществу результата, который можно получить нѣсколькими способами. Замѣтимъ сначала, что если  $u$  обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ двухъ переменныхъ  $x$  и  $a$ , то какова бы ни была функція  $F$ , имѣемъ:

$$\frac{d}{da} \left[ F(u) \frac{du}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[ F(u) \frac{du}{da} \right]; \quad (2)$$

дѣйствительно, по выполненіи указанныхъ дифференцированій каждая часть равенства приводится къ

$$F''(u) \frac{du}{dx} \frac{da}{da} + F'(u) \frac{d^2u}{da dx}.$$



Можно было бы еще и иначе доказать формулу (2), замѣтивъ, что  $F(u) \frac{du}{dx}$  и  $F(u) \frac{du}{da}$  соответственно производныя по  $x$  и по  $a$  отъ одной и той же функціи  $\varphi(u)$  такой, что  $\varphi'(u) = F(u)$ ; тогда уравненіе (2) равносильно

$$\frac{d^2\varphi}{dxda} = \frac{d^2\varphi}{dadx}.$$

Положивъ это, возвратимся къ уравненію (1)

$$z = a + x\varphi(z)$$

и будемъ обозначать черезъ  $u$  какую-угодно функцію отъ  $z$ . По теоремѣ Маклорена

$$u = a + x \left( \frac{du}{dx} \right)_0 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)_0 + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \left( \frac{d^nu}{dx^n} \right)_0 + \dots,$$

гдѣ  $\left( \frac{du}{dx} \right)_0, \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)_0, \dots, \left( \frac{d^nu}{dx^n} \right)_0, \dots$  указываютъ на значенія, принимаемыя производными отъ  $u$  по  $x$  при замѣнѣ въ нихъ, послѣ дифференцированія,  $x$  на 0. Эти производныя должны выводиться изъ уравненія (1), опредѣляющаго функцію  $z$ , и по общему методу для всѣхъ неявныхъ функцій ихъ можно вычислить въ послѣдовательномъ порядкѣ; формула (2), однако, упрощаетъ значительно вычисленія, давая возможность, какъ мы это и увидимъ, замѣнять дифференцированія по  $x$  дифференцированіями по  $a$ : выгода этого преобразования очевидна, такъ какъ  $x$  при дифференцированіи по  $a$  принимается за постоянную и, значитъ, безразлично, полагать ли его равнымъ нулю до или послѣ операцій. А такъ какъ, полагая  $x = 0$ , мы получимъ  $z = a$ , то указанные дифференцированія будутъ относиться къ явнымъ функціямъ отъ переменнѣй  $a$ .

Изъ уравненія (1) выводимъ:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) + x\varphi'(z) \frac{dz}{dx},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(z)}{1 - x\varphi'(z)}. \quad (3)$$

Изъ того же уравненія (1) выводимъ:

$$\frac{dz}{da} = 1 + x\varphi'(z) \frac{dz}{da};$$

значитъ,

$$\frac{dz}{da} = \frac{1}{1 - x\varphi'(z)}. \quad (4)$$

Сравненіе формулъ (3) и (4) даетъ

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \frac{dz}{da}. \quad (5)$$

Обозначая черезъ  $u$  какую-угодно функцію отъ  $z$ , имѣемъ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{du}{da} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{da};$$

отсюда заключаемъ, что уравненіе (5) содержитъ въ себѣ уравненіе

$$\frac{du}{dx} = \varphi(z) \frac{du}{da}. \quad (6)$$

Вычисляемъ теперь  $\frac{d^2u}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3u}{dx^3}$ , ..., стараясь при этомъ замѣнять вездѣ, какъ мы уже говорили, дифференцированія по  $x$  дифференцированіями по  $a$ . Такъ какъ

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[ \varphi(z) \frac{du}{da} \right],$$

то, въ силу уравненія (2),

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{da} \left[ \varphi(z) \frac{du}{dx} \right]. \quad (7)$$

Изображая  $u$ , какъ функцію отъ  $z$ , черезъ  $f(z)$ , пишемъ:

$$\frac{du}{dx} = f'(z) \frac{dz}{dx};$$

уравненіе (7) приметъ въ такомъ случаѣ видъ:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{da} \left[ \varphi(z) f'(z) \frac{dz}{dx} \right] = \frac{d}{da} \left[ \varphi(z)^2 f'(z) \frac{dz}{da} \right] = \frac{d}{da} \left[ \varphi(z)^2 \frac{du}{da} \right];$$

отсюда выводимъ:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d}{da} \left[ \varphi(z)^2 \frac{du}{da} \right] = \frac{d}{da} \frac{d}{dx} \left[ \varphi(z)^2 \frac{du}{da} \right],$$

что, по уравненію (2), приметъ видъ:

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(z)^2 \frac{du}{dx} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(z)^2 f'(z) \frac{dz}{dx} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(z)^3 f''(z) \frac{dz}{da} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(z)^3 \frac{du}{da} \right].$$

Не трудно замѣтить общій законъ, по которому

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ \varphi(z)^n \frac{du}{da} \right]. \quad (8)$$

Для доказательства этой формулы предположимъ, что мы уже нашли:

$$\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}} \left[ \varphi(z)^{n-1} \frac{du}{da} \right],$$

откуда

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-2} dx} \left[ \varphi(z)^{n-1} \frac{du}{da} \right] = \frac{d^{n-2}}{da^{n-2}} \frac{d}{dx} \left[ \varphi(z)^{n-1} \frac{du}{da} \right];$$

прилагая же послѣдовательно формулы (2) и (6), получаемъ:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ \varphi(z)^n \frac{du}{da} \right].$$

Для вычисленія производныхъ  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{d^2 u}{dx^2}$ , ...,  $\frac{d^n u}{dx^n}$  при  $x = 0$  достаточно ввести это предположеніе въ только-что найденныя значенія, и такъ-какъ всѣ дифференцированія взяты по буквѣ  $a$ , не зависящей отъ  $x$ , то можно положить  $x = 0$  до выполненія операций; тогда будемъ имѣть  $z = a$ ,  $\frac{du}{da} = f'(a)$ , и формула (8) дастъ:

$$\left( \frac{d^n u}{dx^n} \right)_0 = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [\varphi(a)^n f'(a)];$$

слѣдовательно, разложеніе  $u$ , т.-е.  $f(z)$ , явится въ слѣдующемъ видѣ:

$$f(z) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [\varphi(a)^2 f'(a)] + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{da^2} [\varphi(a)^3 f'(a)] + \dots$$

Эта формула весьма изящна, дана впервые Лагранжемъ и извѣстна подъ именемъ *формулы Лагранжа*.

**§ 312.** Лапласъ, давшій это остроумное доказательство, только-что нами изложенное, представилъ теорему Лагранжа въ болѣе общемъ видѣ, но его формула такъ легко выводится изъ предыдущей, что нѣтъ надобности выдѣлять ее подъ особымъ названіемъ. Замѣнимъ уравненіе (1) предыдущаго параграфа уравненіемъ

$$z = F[a + x\varphi(z)] \quad (1)$$

и постараемся развернуть функцію  $f(z)$  въ рядъ по степенямъ  $x$ ; полагаемъ

$$a + x\varphi(z) = t; \quad (2)$$

тогда

$$z = F(t),$$

и, слѣдовательно, въ силу уравненія (2),

$$t = a + x\varphi[F(t)]. \quad (3)$$

Задача, какъ видимъ, приводится къ разложенію  $f[F(t)]$  въ рядъ по степенямъ  $x$  непосредственно по формулѣ Лагранжа; такимъ образомъ получаемъ:

$$f(z) = f[F(a)] + x\varphi[F(a)] \frac{df[F(a)]}{da} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} \left\{ \varphi[F(a)]^2 \frac{df[F(a)]}{da} \right\} + \dots$$

### § 313. Уравненіе

$$z = a + x\varphi(z) \quad (1)$$

имѣетъ, вообще, нѣсколько корней. Къ какому изъ нихъ относятся предыдущія формулы? Это вопросъ трудный и многіе знаменитые геометры не вполне согласно разбирали его. Здѣсь мы не станемъ рѣшать его окончательно: ограничимся лишь слѣдующими указаніями.

Рядъ

$$f(z) = f(a) + x\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [\varphi(a)^2 f'(a)] + \dots \quad (2)$$

представляетъ, очевидно, при  $x = 0$ , функцію  $f(a)$ , соотвѣтствующую корню  $z = a$ , и такъ какъ этотъ рядъ есть непрерывная функція отъ  $x$ , то если для каждаго значенія этой переменнѣй раздѣлимъ корни уравненія на двѣ группы, изъ которыхъ одна содержитъ корни большіе, чѣмъ  $a$ , а другая — меньшіе  $a$ , то корень, къ которому относится разложение, будетъ, очевидно, при малыхъ значеніяхъ  $x$ , наиболѣе близкимъ къ  $a$  изъ всѣхъ тѣхъ, которые находятся въ одной съ нимъ группѣ, и вся трудность состоитъ такимъ образомъ въ опредѣленіи, будетъ ли этотъ корень больше или меньше  $a$ . Но

$$z - a = x\varphi(z);$$

предполагая  $x$  бесконечно-малымъ, замѣчаемъ, что  $z$  бесконечно-мало отличается отъ  $a$ , и  $z - a$  одного знака съ  $x\varphi(a)$ . Поэтому, если  $\varphi(a)$  положительно, то  $z - a$  одного знака съ  $x$ , и наоборотъ, если  $\varphi(a)$  отрицательно.

То же самое правило прилагается и тогда, когда  $x$  принимаетъ возрастающія значенія. Корень, измѣняясь непрерывно, останется всегда въ той группѣ, гдѣ онъ находился съ самаго начала, потому что при  $\varphi(a)$  не равномъ нулю  $z$  не можетъ стать равнымъ  $a$  ни при какомъ иномъ значеніи  $x$  кромѣ нуля. Итакъ, рядъ будетъ представлять извѣстный корень, до тѣхъ поръ пока не наступитъ одно изъ двухъ слѣдующихъ обстоятельствъ.

Рядъ (2) перестаетъ быть сходящимся.

$x$  пріобрѣтаетъ такое значеніе, что оба смежные съ  $a$  корня находятся въ одной группѣ и являются, поэтому, равными между собою.

Въ первомъ случаѣ рядъ ничего не представляетъ, а во второмъ, при  $x$ , продолжающемъ расти, непрерывность недостаточна для указанія того изъ корней, который

слѣдуетъ за  $a$  по закону непрерывности. Впрочемъ, говоря вообще, каждый изъ двухъ равныхъ корней становится потомъ мнимымъ и не можетъ быть выраженъ рядомъ (2), который, какъ увидимъ ниже, является въ такомъ случаѣ расходящимся.

#### Второе доказательство формулы Лагранжа

§ 314. Приведенное нами доказательство формулы Лагранжа принадлежитъ Лапласу. Прямое и изящное, оно всё-же требуетъ послѣдовательныхъ преобразований, дѣлающихъ его менѣе простымъ, чѣмъ то, съ которымъ мы сейчасъ познакомимъ и которое принадлежитъ Якоби.

Когда функція обращается въ бесконечность при  $x = 0$ , она не развертывается по формулѣ Маклорена, но можетъ быть развернутой, вообще говоря, въ рядъ, расположенный по положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ переменнѣй, вида:

$$A + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots \\ + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \dots + \frac{B_n}{x^n} + \dots$$

При этомъ производная  $\varphi'(x)$  будетъ производною отъ предыдущаго ряда, т. е.

$$A_1 + 2A_2x + \dots + nA_nx^{n-1} + \dots \\ - \frac{B_1}{x^2} - \frac{2B_2}{x^3} - \dots - \frac{nB_n}{x^{n+1}} - \dots;$$

въ этомъ разложеніи нѣтъ члена съ  $\frac{1}{x}$ .

Итакъ, если функція развертывается въ рядъ, расположенный по положительнымъ или отрицательнымъ степенямъ переменнѣй, производная этой функціи развертывается въ рядъ того же вида, въ которомъ не достаетъ члена съ  $\frac{1}{x}$ .

Замѣтивъ это, рассмотримъ уравненіе

$$z = a + x\varphi(z). \quad (1)$$

Пусть

$$f(z) = f(a) + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots, \quad (2)$$

гдѣ  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  функціи отъ  $a$ , не зависящія отъ  $x$ ; возьмемъ производныя отъ обѣихъ частей по  $z$ , принимая  $a$  за постоянную, и, раздѣливъ обѣ части полученнаго уравненія на  $x^n$ , получимъ:

$$\frac{f'(z)}{x^n} = \frac{A_1}{x^n} \frac{dx}{dz} + \frac{2A_2}{x^{n-1}} \frac{dx}{dz} + \dots + \frac{nA_n}{x} \frac{dx}{dz} + (n+1)A_{n+1} \frac{dx}{dz} + \dots,$$



или, послѣ замены  $x$  въ первой части его значеніемъ, выведеннымъ изъ уравненія (1),

$$\frac{f'(z)\varphi(z)^n}{(z-a)^n} = \frac{A_1}{x^n} \frac{dx}{dz} + \frac{2A_2}{x^{n-1}} \frac{dx}{dz} + \dots + \frac{nA_n}{x} \frac{dx}{dz} + (n+1)A_{n+1} \frac{dx}{dz} + \dots \quad (3)$$

Развернемъ теперь обѣ части въ ряды, расположенные по положительнымъ или отрицательнымъ степенямъ  $z-a$ , и приравняемъ другъ другу коэффициенты при  $\frac{1}{z-a}$  въ обоихъ разложеніяхъ. Полагая

$$f'(z)\varphi(z)^n = F'(z),$$

имѣемъ:

$$F(z) = F(a + z - a) = F(a) + (z-a)F'(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2} F''(a) + \dots$$

Чтобы получить разложеніе первой части уравненія (3), нужно раздѣлять каждый членъ этого ряда на  $(z-a)^n$ ; слѣдовательно, коэффициентъ члена съ  $\frac{1}{z-a}$  будетъ

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} F^{n-1}(a) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f'(a)\varphi(a)^n].$$

Если развернуть различные члены второй части уравненія (3), то, по предыдущему, только одинъ изъ нихъ,  $\frac{nA_n}{x} \frac{dx}{dz}$ , дастъ членъ съ  $\frac{1}{z-a}$ . Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ общій членъ

$$\mu A_\mu \frac{\frac{dx}{dz}}{x^{n-\mu+1}} = \frac{\mu A_\mu}{\mu-n} \frac{d}{dz} x^{\mu-n},$$

гдѣ  $\mu$  обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, отличное отъ  $n$ . Вообще говоря,  $x^{\mu-n}$  развѣрывается по положительнымъ или отрицательнымъ степенямъ  $z-a$ , потому что, если  $\mu$  больше  $n$ , то это выраженіе обращается въ нуль при  $z=a$ , а если  $\mu-n$  отрицательно, то произведеніе

$$x^{\mu-n} (z-a)^{n-\mu} = \left( \frac{z-a}{x} \right)^{n-\mu}$$

при  $z=a$  имѣетъ конечный предѣлъ, равный, въ силу уравненія (1),  $\varphi(a)^{n-\mu}$ , и развѣрывается, вообще говоря, по степенямъ  $z-a$ . Дѣля всѣ члены на  $(z-a)^{n-\mu}$ , будемъ имѣть разложеніе  $x^{\mu-n}$ , заключающее положительныя и отрицательныя степени  $(z-a)$ .

Слѣдовательно, производная по  $z$  не будетъ содержать члена съ  $\frac{1}{z-a}$ .

Что касается члена

$$\frac{nA_n}{x} \frac{dx}{dz},$$

$$\frac{nA_n \frac{dx}{dz}}{x} = nA_n \frac{d \ln x}{dz}.$$

Предыдущее рассужденіе уже не приложимо. Въ силу уравненія (1) имѣемъ:

$$x = \frac{z - a}{\varphi(z)},$$

$$\ln x = \ln(z - a) - \ln \varphi(z),$$

$$\frac{d \ln x}{dz} = \frac{1}{z - a} - \frac{d \ln \varphi(z)}{dz};$$

$\ln \varphi(z)$  при  $z = a$  имѣетъ конечное значеніе. Значитъ, это выраженіе, вообще, должно разсматривать, какъ развертывающееся въ рядъ по степенямъ  $z - a$ , и производная  $\frac{d \ln \varphi(z)}{dz}$  не будетъ, слѣдовательно, содержать въ своемъ разложеніи члена съ  $\frac{1}{z - a}$ ; по-этому въ разложеніе  $\frac{d \ln x}{dz}$  войдетъ только одинъ членъ этого вида съ коэффициентомъ единица.

Приравнивая коэффициенты при  $\frac{1}{z - a}$  въ разложеніяхъ обѣихъ частей уравненія (3), на основаніи сказаннаго получаемъ:

$$nA_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1)} \frac{d^{n-1} [\varphi(a)^n f'(a)]}{da^{n-1}},$$

откуда

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^{n-1} [\varphi(a)^n f'(a)]}{da^{n-1}},$$

что и доказываетъ теорему Лагранжа.

Отсутствіе строгости слишкомъ очевидно въ предыдущемъ доказательствѣ, но мы всё-таки не могли бы пройти молчаніемъ этихъ рассужденій, изящныхъ и остроумныхъ, которыя, какъ ясно замѣчаетъ Якоби, тѣсно примыкаютъ къ *Теоріи остатковъ* (*Théorie des résidus*) Коши, излагаемой нами въ другой главѣ.

#### П Р И Л О Ж Е Н І Я   Ф О Р М У Л Ы   Л А Г Р А Н Ж А

§ 315. Дано уравненіе

$$z = a + \frac{x}{2} (z^2 - 1). \quad (1)$$

По формулѣ Лагранжа

$$= a + \frac{x}{2} (a^2 - 1) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d(a^2 - 1)^2}{da} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{2^n} \frac{d^{n-1} (a^2 - 1)^n}{da^{n-1}} + \dots; \quad (2)$$

изъ уравненія (1) выводимъ:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sqrt{1 - 2ax + x^2},$$

при чемъ надо передъ корнемъ брать знакъ —, потому что при  $x = 0$  должно получаться  $z = a$ .

Итакъ, мы имѣемъ:

$$\frac{dz}{da} = (1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

дифференцируя же уравненіе (2) по  $a$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} (1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{x}{2} \frac{d(a^2 - 1)}{da} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2(a^2 - 1)^2}{da^2} + \dots + \\ &+ \frac{x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{2^n} \frac{d^n(a^2 - 1)^n}{da^n} + \dots, \end{aligned}$$

знаменитое разложеніе, уже полученное въ § 283-мъ.

§ 316. Какъ второе приложеніе рассмотримъ уравненіе

$$z = a + \frac{x}{z}. \quad (1)$$

Примѣняя формулу Лагранжа къ разложенію  $z^{-k}$ , находимъ:

$$\begin{aligned} z^{-k} &= a^{-k} - xka^{-k-2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} k(k+3)a^{-k-4} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} k(k+4)(k+5)a^{-k-6} + \\ &+ \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} k(k+5)(k+6)(k+7)a^{-k-8} - \dots \end{aligned}$$

При  $a = 2$  уравненіе (1) даетъ

$$z = 1 \pm \sqrt{1+x},$$

и такъ какъ корень, который, при  $x = 0$ , приводится къ 2, соответствуетъ знаку + при радикалѣ, то, умножая обѣ части на  $2^k$ , выводимъ:

$$\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1+x}}\right)^k = 1 - \frac{k}{1} \left(\frac{x}{4}\right) + \frac{k(k+3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{4}\right)^2 - \frac{k(k+3)(k+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots,$$

замѣчательный рядъ, который можно получить и непосредственно по формулѣ Маклорена.

§ 317. Пусть требуется рѣшить уравненіе второй степени

$$a - bx + cx^2 = 0.$$

Чтобы развернуть одинъ изъ корней по степенямъ коэффиціента  $c$ , представимъ уравненіе подъ видомъ:

$$x = \frac{a}{b} + \frac{cx^2}{2}.$$

Теперь можно примѣнить формулу Лагранжа; найдемъ:

$$x = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \frac{5 \cdot 6 a^4c^3}{2 \cdot 3 b^7} + \dots;$$

точно такую формулу получаютъ въ элементарной алгебрѣ, когда, предполагая  $c$  очень малымъ, желаютъ опредѣлить  $x$  по способу послѣдовательныхъ приближеній. Также нашли бы:

$$1x = 1 \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{3a^2c^2}{2b^4} + \frac{5 \cdot 4 a^3c^3}{2 \cdot 3 b^6} + \dots,$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{a^2}{2b^2} + \frac{a^3c}{b^4} + \frac{5a^4c^2}{2b^6} + \frac{7 \cdot 6 a^5c^3}{2 \cdot 3 b^8} + \dots$$

§ 318. Разсмотримъ болѣе общее уравненіе

$$x^{m+1} + ax - b = 0,$$

которое можно написать въ видѣ:

$$x = \frac{b}{a} - \frac{x^{m+1}}{a}.$$

Формула Лагранжа даетъ возможность развернуть  $x$  по степенямъ  $\frac{1}{a}$ . Полагая для упрощенія письма  $\frac{b}{a} = \alpha$ , имѣемъ:

$$x = \alpha - \frac{1}{a} \alpha^{m+1} + \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d}{d\alpha} (\alpha^{2m+2}) - \frac{1}{a^3} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{d\alpha^2} (\alpha^{3m+3}) + \dots$$

или, послѣ выполненія дѣйствій и замѣны  $a$  ея значеніемъ,

$$x = \frac{b}{a} - \frac{b^{m+1}}{a^{m+2}} + \frac{b^{2m+1}}{a^{2m+3}} \frac{2m+2}{1 \cdot 2} - \frac{b^{3m+1}}{a^{3m+4}} \frac{(3m+2)(3m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Прилагаемъ эту формулу къ уравненію:

$$x^5 + 4x + 2 = 0.$$

Нужно положить  $a = 4$ ,  $b = -2$ ; имѣемъ:

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{2^5}{4^6} - \frac{2^9}{4^{11}} \cdot 5 + \frac{2^{13}}{4^{16}} \cdot 35 - \dots$$

Эти четыре члена даютъ:

$$x = 0,4928.$$

точно до одной десятиллионной.

§ 319. Разсмотримъ, наконецъ, общее уравненіе степени  $n$

$$a_0 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n.$$

Полагаемъ

$$\varphi(x) = \frac{1}{a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}};$$

уравненіе приметъ видъ:

$$a_0 = \frac{x}{\varphi(x)},$$

т.-е.

$$x = a_0 \varphi(x).$$

Слѣдовательно, можно развернуть  $x$  по формулѣ Лагранжа въ рядъ по степенямъ  $a_0$ , при чемъ коэффициентъ при  $\frac{a_0^m}{1 \cdot 2 \dots m}$  будетъ равенъ

$$\frac{d^{m-1} [\varphi(x)]^m}{dx^{m-1}} = \frac{d^{m-1} \left[ \frac{1}{a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}} \right]^m}{dx^{m-1}},$$

гдѣ нужно, послѣ дифференцірованія, замѣнить  $x$  нулемъ.

Чтобы вычислить это выраженіе, самое простое—развернуть въ рядъ выраженіе

$$(a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1})^{-m}$$

и отыскать коэффициентъ при  $x^{m-1}$ . Этотъ коэффициентъ, умноженный на  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)$ , будетъ равенъ искомой производной. Мы укажемъ, въ этой самой главѣ, какъ его вычислить по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ.

§ 320. Дадимъ, наконецъ, какъ послѣднее приложеніе формулы Лагранжа, выраженіе, полученное Кэлеемъ (Cauley) для разложенія функціи  $\frac{1}{\varphi(z)}$ , когда извѣстно разложеніе всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ степеней  $\varphi(z)$ .

Если

$$z = a + x\varphi(z), \tag{1}$$



то формула Лагранжа даетъ

$$F'(z) = F'(a) + \frac{x}{1} F''(a) \varphi(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} F''(a) \varphi(a)^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^2}{da^2} F''(a) \varphi(a)^3 + \dots \quad (2)$$

Дифференцируемъ обѣ части по  $a$  и, замѣчая, что  $\frac{dz}{da}$ , выведенное изъ уравненія (1), равно

$$\frac{1}{1 - x\varphi'(z)},$$

напишемъ:

$$\frac{F'(z)}{1 - x\varphi'(z)} = F'(a) + x \frac{d}{da} F''(a) \varphi(a) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{da^2} F''(a) \varphi(a)^2 + \dots,$$

или, замѣняя  $x$  его значеніемъ  $\frac{z-a}{\varphi(z)}$ ,

$$\frac{F'(z)}{1 - (z-a) \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}} = F'(a) + \frac{z-a}{\varphi(z)} \frac{d}{da} F''(a) \varphi(a) + \frac{(z-a)^2}{1 \cdot 2 \varphi(z)^2} \frac{d^2}{da^2} F''(a) \varphi(a)^2 + \dots$$

Въ этомъ уравненіи функція  $F$  произвольна и, слѣдовательно, произвольна производная  $F'$ .

Полагая  $F'(z) = \frac{z}{\varphi(z)}$ , получаемъ:

$$\frac{z}{\varphi(z) - (z-a) \varphi'(z)} = \frac{a}{\varphi(a)} + \frac{z-a}{\varphi(z)} \frac{d}{da} a + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( \frac{z-a}{\varphi(z)} \right)^2 \frac{d^2}{da^2} a \varphi(a) + \dots$$

Дѣлаемъ въ этой формулѣ  $z=0$ , и пусть  $\varphi(0) = A$ ; тогда

$$0 = \frac{a}{\varphi(a)} - \frac{a}{A} + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{A^2} \frac{d^2}{da^2} a \varphi(a) - \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^3}{A^3} \frac{d^3}{da^3} a \varphi(a)^3 + \\ + \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4}{da^4} a \varphi(a)^3 - \dots,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{A} - \frac{a}{1 \cdot 2} \frac{1}{A^2} \frac{d^2}{da^2} a \varphi(a) + \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{A^3} \frac{d^3}{da^3} a \varphi(a)^2 - \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4}{da^4} a \varphi(a)^3 + \dots$$

#### Рядъ Бурмана

§ 321. Бурманъ (Burmann) далъ весьма общую формулу; рядъ Лагранжа является лишь частнымъ ея случаемъ, но вывести ее всё-таки очень легко. Бурманъ рѣшилъ слѣдующую задачу:

*Развернуть функцію  $f(z)$  въ рядъ по степенямъ данной функции  $F(z)$ .*

Для рѣшенія этой задачи замѣчаемъ, что если дано уравненіе

$$z = a + x\varphi(z), \quad (1)$$

то по формулѣ Лагранжа можно развернуть какую-угодно функцію  $f(z)$  въ рядъ по степенямъ  $x$ , т.-е.  $\frac{z-a}{\varphi(z)}$ . Значитъ, если положить

$$\frac{z-a}{\varphi(z)} = F(z), \quad (2)$$

то это уравненіе опредѣлитъ  $\varphi(z)$ , и формула Лагранжа рѣшитъ задачу, предложенную Бурманомъ.

**§ 322.** Приложимъ вышесказанное къ разложенію  $e^{az}$  въ рядъ по степенямъ  $ze^{bz}$ . Уравненіе, опредѣляющее  $\varphi(z)$ , будетъ

$$\frac{z-a}{\varphi(z)} = ze^{bz}. \quad (1)$$

При  $a=0$ ,  $\varphi(z) = e^{-bz}$  это уравненіе удовлетворяется и уравненіе (1) предыдущаго параграфа приметъ видъ:

$$z = xe^{-bz}.$$

Слѣдовательно, формула Лагранжа даетъ разложеніе  $e^{az}$  по степенямъ  $x$ :

$$e^{az} = 1 + ax + a(a-2b) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{a(a-3b)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots, \quad (2)$$

т.-е. послѣ замѣны  $x$  его значеніемъ,

$$e^{az} = 1 + aze^{bz} + a(a-2b) \frac{z^2 e^{2bz}}{1 \cdot 2} + a(a-3b)^2 \frac{z^3 e^{3bz}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (3)$$

#### Рядъ Абеля

**§ 323.** Только-что полученный нами рядъ даетъ возможность доказать весьма общую и замѣчательную формулу, принадлежащую Абелю (Abel). Разсмотримъ какую-нибудь функцію  $\varphi(z)$ , ограниченную только однимъ условіемъ, чтобы она развертывалась по степенямъ  $e^z$ :

$$\varphi(z) = A_0 + A_1 e^z + A_2 e^{2z} + A_3 e^{3z} + \dots \quad (1)$$

По формулѣ (3) предыдущаго параграфа, полагая въ ней послѣдовательно  $z=0$ ,  $z=1$ ,  $z=2$ ,  $z=3$ , ..., находимъ:



гдѣ  $A, B, C, \dots$  неизвѣстныя функціи отъ  $x$ . Полагая  $h = 0$ , выводимъ:

$$\varphi(x) = A;$$

беря затѣмъ послѣдовательныя производныя по  $h$  и приравнивая въ каждой изъ нихъ  $h$  нулю, находимъ:

$$\varphi'(x) = B, \quad \varphi''(x) = 2C, \quad \varphi'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot D, \dots$$

Отсюда видимъ, что рядъ не можетъ быть инымъ, какъ

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \varphi^{(n)}(x) + \dots$$

**§ 326.** Иногда удобнѣе находить коэффициенты разложенія при помощи какого-нибудь извѣстнаго свойства функціи, которую требуется разложить, чѣмъ прибѣгать, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, къ употребленію производныхъ, что снова приводитъ къ приложенію теоремы Тэйлора.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

**Разложеніе  $x \cot x$ .** — Полагаемъ

$$x \cot x = A + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \dots;$$

имѣемъ:

$$x \cot x = \frac{x \cos x}{\sin x} = x \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots}{x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots},$$

откуда

$$x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots = (A + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots) \left( x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right).$$

Выполняя произведеніе во второй части и приравнивая другъ другу коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ  $x$ , находимъ:

$$1 = A, \quad -\frac{1}{2} = A_1 - \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = A_2 - \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots,$$

откуда

$$A = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{3}, \quad A_2 = -\frac{1}{45}, \quad A_3 = -\frac{2}{945}, \dots,$$

что уже было получено въ § 304-мъ.

§ 327. Разложение произведения  $(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z) \dots (1 + x^n z) \dots$  — Обозначаемъ это произведение черезъ  $P$  и полагаемъ

$$P = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

Если въ произведеніи  $P$  измѣнить  $z$  на  $xz$ , то оно, очевидно, перейдетъ въ  $\frac{P}{1 + xz}$ ; слѣдовательно, будетъ:

$$1 + A_1 xz + A_2 x^2 z^2 + A_3 x^3 z^3 + \dots = \frac{1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots}{1 + xz}.$$

Освобождаясь отъ знаменателя и приравнивая другъ другу коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ  $z$  въ обѣихъ частяхъ, имѣемъ:

$$x + A_1 x = A_1, \quad A_1 x^2 + A_2 x^2 = A_2, \quad A_2 x^3 + A_3 x^3 = A_3, \dots,$$

откуда

$$A_1 = \frac{x}{1 - x}, \quad A_2 = \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}, \quad A_3 = \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)},$$

$$A_4 = \frac{x^{10}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)},$$

и, слѣдовательно,

$$(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z) \dots (1 + x^n z) = 1 + \frac{x}{1 - x} z + \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)} z^2 + \dots + \\ + \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n)} z^n + \dots$$

§ 328. Разложение произведения  $(1 + xz)(1 + x^3z)(1 + x^5z) \dots$  — Обозначаемъ это произведение черезъ  $Q$  и полагаемъ

$$Q = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots$$

Если въ произведеніи  $Q$  измѣнить  $z$  на  $x^2z$ , то оно перейдетъ въ  $\frac{Q}{1 + xz}$ ; слѣдовательно, будетъ:

$$1 + B_1 x^2 z + B_2 x^4 z^2 + B_3 x^6 z^3 + \dots = \frac{1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \dots}{1 + xz}.$$

Освобождаясь отъ знаменателей и приравнивая другъ другу коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ  $z$  въ обѣихъ частяхъ, получаемъ:

$$x + B_1 x^3 = B_1, \quad B_1 x^3 + B_2 x^4 = B_2, \quad B_2 x^5 + B_3 x^6 = B_3, \dots,$$



откуда

$$B_1 = \frac{x}{1-x^2}, \quad B_2 = \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}, \quad B_3 = \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)},$$

и, следовательно,

$$(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z)\dots = 1 + \frac{x}{1-x^2}z + \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^4)}z^2 + \\ + \frac{x^9}{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)}z^3 + \dots$$

**§ 329.** Разложение произведения  $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots$  — Если обозначить это произведение через  $R$  и изменить  $x$  на  $x^2$ , то оно, очевидно, перейдетъ въ  $\frac{R}{1+x}$ . Следовательно, полагая

$$R = 1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots,$$

будемъ имѣть:

$$1 + C_1x^2 + C_2x^4 + C_3x^6 + \dots = \frac{1 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots}{1+x};$$

избавляясь отъ знаменателя и приравнивая другъ другу коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ  $x$ , находимъ:

$$1 = C_1, \quad C_1 = C_2, \quad C_1 = C_3, \quad C_2 = C_4, \dots$$

Такимъ образомъ, искомое разложение будетъ:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (1)$$

Можно къ тому же результату придти иначе, замѣчая, что вторая часть представляетъ  $\frac{1}{1-x}$  и что тождественно

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{(1+x)(1+x^2)}{1-x^4} = \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{1-x^8} = \dots,$$

а это при  $x$  менѣе 1 даетъ въ предѣлѣ, очевидно, формулу (1).

**§ 330.** Къ предыдущимъ результатамъ присоединимъ еще одну весьма замѣчательную формулу, принадлежащую Эйлеру, которая выражаетъ подъ видомъ ряда, расположеннаго по степенямъ  $x$ , бесконечное произведение:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots(1-x^n)\dots$$

Обозначая это произведение через  $S$ , очевидно, можем написать:

$$S = 1 - x - x^2(1 - x) - x^3(1 - x)(1 - x^2) - x^4(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) - \dots$$

Обозначаемъ через  $A$  совокупность членовъ, слѣдующихъ за двумя первыми, т.-е. полагаемъ:

$$S = 1 - x - A,$$

$$A = x^2(1 - x) + x^3(1 - x)(1 - x^2) + x^4(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) + \dots,$$

что послѣ выполненія въ каждомъ членѣ умноженія на  $1 - x$  приметъ видъ:

$$A = x^2 + x^3(1 - x^2) + x^4(1 - x^2)(1 - x^3) + \dots$$

$$- x^3 - x^4(1 - x^2) - x^5(1 - x^2)(1 - x^3) - \dots,$$

или, если соединить члены, содержащіе множителемъ одну и ту же степень  $x$ ,

$$A = x^2 - x^5 - x^7(1 - x^2) - x^9(1 - x^2)(1 - x^3) - x^{11}(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \dots$$

Полагаемъ

$$A = x^2 - x^5 - B,$$

т.-е.

$$B = x^7(1 - x^2) + x^9(1 - x^2)(1 - x^3) + x^{11}(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) + \dots,$$

что послѣ выполненія въ каждомъ членѣ умноженія на  $1 - x^2$  приметъ видъ:

$$B = x^7 + x^9(1 - x^3) + x^{11}(1 - x^3)(1 - x^4) + \dots$$

$$- x^9 - x^{11}(1 - x^3) - x^{13}(1 - x^3)(1 - x^4) - \dots$$

Соединяя члены, содержащіе множителемъ одну и ту же степень  $x$ , пишемъ:

$$B = x^7 - x^{12} - x^{15}(1 - x^3) - x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4) - x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) - \dots$$

Полагаемъ

$$B = x^7 - x^{12} - C,$$

т.-е.

$$C = x^{15}(1 - x^3) + x^{18}(1 - x^3)(1 - x^4) + x^{21}(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5) + \dots,$$

что послѣ выполненія въ каждомъ членѣ умноженія на  $1 - x^3$  приметъ видъ:

$$C = x^{15} + x^{18}(1 - x^4) + x^{21}(1 - x^4)(1 - x^5) + \dots$$

$$- x^{18} - x^{21}(1 - x^4) - x^{24}(1 - x^4)(1 - x^5) - \dots$$

Соединяя члены, содержащіе множителемъ одну и ту же степень  $x$ , пишемъ.

$$C = x^{15} - x^{22} - x^{26} (1 - x^4) - x^{30} (1 - x^4) (1 - x^5) - \dots$$

Полагая

$$C = x^{15} - x^{22} - D,$$

мы можемъ преобразовать  $D$  подобно тому, какъ преобразовали  $A$ ,  $B$  и  $C$ , и получить два члена

$$-x^{26} + x^{35}.$$

Продолжая такимъ образомъ бесконечно, находимъ:

$$S = 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 + x^{12} - x^{15} + x^{22} - x^{26} + x^{35} - x^{40} + x^{51} - \dots$$

Коэффициенты попеременно  $+1$  и  $-1$ ; что касается показателей, то, чтобы найти для нихъ законъ, слѣдуетъ сначала остановиться на первыхъ членахъ послѣдовательно полученныхъ группъ въ два члена каждая; но ясно, что въ ряду

$$2, 7, 15, 26, 40, \dots$$

разности

$$5, 8, 11, 14, \dots$$

составятъ арифметическую прогрессию съ разностью 3; отсюда легко заключить, что показатели содержатся въ формулѣ

$$\frac{3n^2 + n}{2}.$$

Такъ же увидимъ, что показатели

$$1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots$$

содержатся въ формулѣ

$$\frac{3n^2 - n}{2},$$

и искомая формула будетъ, наконецъ,

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \dots = 1 - x - x^2 + x^5 - x^7 + \\ + x^{12} - \dots + x^{\frac{3n^2 - n}{2}} - x^{\frac{3n^2 + n}{2}} + \dots$$

Зная этотъ законъ, не трудно убѣдиться, что члены, полученные послѣдовательно, по вышеуказанному способу, постоянно совпадаютъ съ полученными по этому закону.

**§ 331.**  $n$ -ая степень ряда. — Пусть

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + \dots \quad (1)$$

будетъ сходящійся рядъ. Методъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ даетъ весьма быстрое средство вычислить коэффиціенты ряда, который представляетъ  $n$ -ую степень даннаго.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + \dots)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots, \quad (2)$$

откуда, беря производныя отъ обѣихъ частей, находимъ:

$$\begin{aligned} n (a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + \dots)^{n-1} (a_1 + 2 a_2 x + \dots + p a_p x^{p-1} + \dots) = \\ = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Дѣля по-членно уравненія (2) и (3) и освобождаясь отъ знаменателей, пишемъ:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) (A_1 + 2 A_2 x + \dots + p A_p x^{p-1} + \dots) = \\ = n (a_1 + 2 a_2 x + \dots + p a_p x^{p-1} + \dots) (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_p x^p + \dots). \end{aligned}$$

Выполняя умноженія и приравнивая другъ другу коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ  $x$  въ обѣихъ частяхъ, получаемъ слѣдующія уравненія:

$$\begin{aligned} A_1 a_0 &= n A_0 a_1, \quad A_1 a_1 + 2 A_2 a_0 = 2 n A_0 a_2 + n A_1 a_1, \\ A_1 a_2 + 2 A_2 a_1 + 3 A_3 a_0 &= 3 n a_3 A_0 + 2 n a_2 A_1 + n a_1 A_2, \\ A_1 a_3 + 2 A_2 a_2 + 3 A_3 a_1 + 4 A_4 a_0 &= 4 n a_4 A_0 + 3 n a_3 A_1 + 2 n a_2 A_2 + n a_1 A_3, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{n A_0 a_1}{a_0}, \quad A_2 = \frac{n a_2 A_0}{a_0} + \frac{n-1}{2 a_0} A_1 a_1 = \frac{n a_2 A_0}{a_0} + \frac{n(n-1)}{2 a_0^2} A_0 a_1^2, \\ A_3 &= \frac{n a_3 A_0}{a_0} + \frac{2n-1}{3 a_0} a_2 A_1 + \frac{n-2}{3 a_0} a_1 A_2. \end{aligned}$$

Можно эти вычисленія продолжить какъ-угодно далеко и связать такимъ образомъ всѣ коэффиціенты другъ съ другомъ, ставя ихъ въ зависимость отъ перваго  $A_0$ , который только одинъ остается неизвѣстнымъ. Но, приравнивая  $x$  нулю, мы замѣтимъ, что  $A_0 = a^n$ . Слѣдовательно, задача рѣшена.

Если, для примѣра, возьмемъ

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots,$$

то

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{8x^6}{45} + \frac{4x^8}{35} + \dots,$$

что вполне совпадаетъ съ результатомъ, найденнымъ въ § 303-мъ, но законъ составленія коэффиціентовъ нельзя не признать по этому способу затруднительнымъ.

§ 332. Мы обязаны привести здѣсь изящную теорему Эйзенштейна (Eisenstein), доказанную слѣдующимъ образомъ Сильвестромъ (Sylvester).

Когда составлены цѣлыя и положительныя степени ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ переменнѣй  $x$ , то тогда уже легко вывести разложеніе какой-угодно степени.

Пусть

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots, \quad (1)$$

имѣемъ:

$$\begin{aligned} u^m = [A_0 + (u - A_0)]^m = A_0^m + m A_0^{m-1} (u - A_0) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} A_0^{m-2} (u - A_0)^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} A_0^{m-n} (u - A_0)^n + \dots; \end{aligned} \quad (2)$$

разность  $(u - A_0)$  содержитъ  $x$  множителемъ и, слѣдовательно,  $(u - A_0)^q$  будетъ содержать, послѣ всѣхъ приведеній, только степени  $x$  съ показателемъ, по крайней мѣрѣ, равнымъ  $q$ . Если, поэтому, желательно отыскать въ разложеніи  $u^m$  коэффициентъ при  $x^n$ , то можно пренебречь всѣми членами уравненія (2), въ которыхъ показатель разности  $(u - A_0)$  выше произвольнаго числа  $n'$ , равнаго или большаго  $n$ ; если обозначить черезъ  $B_{m,n}$  коэффициентъ при  $x^n$  въ разложеніи  $u^m$ , то будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} B_{m,n} = m A_0^{m-1} B_{(1,n)} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} A_0^{m-2} (B_{(2,n)} - 2 A_0 B_{(1,n)}) + \dots \\ + \frac{m(m-1) \dots (m-n'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n'} A_0^{m-n'} [B_{(n',n)} - n' A_0 B_{(n'-1,n)} \dots \pm n' A_0^{n'-1} B_{(1,n)}], \end{aligned} \quad (3)$$

при чемъ  $n'$ , въ этой формулѣ, подчинено только одному условію: быть не ниже  $n$ . Самое простое—предположить  $n' = n$ .

Принимая это предположеніе и дѣлая во второй части приведеніе подобныхъ членовъ, придадимъ уравненію (3) видъ:

$$\begin{aligned} B_{(m,n)} = m B_{(1,n)} A_0^{m-1} \left[ 1 - (m-1) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \dots \pm \right. \\ \left. \pm \frac{(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \right] \\ + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} B_{(2,n)} A_0^{m-2} \left[ 1 - (m-2) + \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} \dots \pm \right. \\ \left. \pm \frac{(m-2)(m-3) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-2)} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} B_{(3,n)} A_0^{m-3} \left[ 1 - (m-3) + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} \dots \right. \\
& \quad \left. - \frac{(m-3) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots (n-3)} \right] \\
& \dots \dots \dots \\
& + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)},
\end{aligned}$$

или, суммируя коэффициенты въ скобкахъ,

$$\begin{aligned}
B_{(m,n)} &= m B_{(1,n)} A_0^{m-1} \left[ \frac{(2-m)(3-m) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \right] + \\
& + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} B_{(2,n)} A_0^{m-2} \left[ \frac{(3-m)(4-m) \dots (n-m)}{1 \cdot 2 \dots (n-2)} \right] + \dots + \\
& + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)}.
\end{aligned}$$

Если въ этой формулѣ положить  $m = -1$ , то получится коэффициентъ при  $x^n$  въ разложеніи  $\frac{1}{x}$ , и легко убѣдиться, что онъ совпадетъ съ тѣмъ, который вытекаетъ изъ формулы § 320-го, выведенной Кэлеемъ изъ теоремы Лагранжа.

**§ 333. Формула Стирлинга.** — Мы выведемъ по методу неопредѣленныхъ коэффициентовъ еще нѣсколько извѣстныхъ разложеній, которыми воспользуемся въ дальнѣйшемъ изложеніи, предварительно доказавъ ихъ болѣе строгимъ путемъ.

Формула Стирлинга (Stirling), къ которой мы сейчасъ переходимъ, слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned}
\varphi(x+h) - \varphi(x) &= h\varphi'(x) + A_1 h [\varphi'(x+h) - \varphi'(x)] + A_2 h^2 [\varphi''(x+h) - \varphi''(x)] + \\
& + A_3 h^3 [\varphi'''(x+h) - \varphi'''(x)] + \dots
\end{aligned}$$

Для тождественности обѣихъ частей необходимо и достаточно, чтобы при развертываніи ихъ по степенямъ  $h$  получались въ той и въ другой одни и тѣ же коэффициенты. Это условіе даетъ уравненія:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - A_1 = 0, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A_1}{1 \cdot 2} - A_2 = 0, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{A_2}{1 \cdot 2} - A_3 = 0, \dots,$$

изъ которыхъ находимъ:

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = -\frac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{1}{720}, \dots$$

Чтобы дать выражение для общаго члена, замѣтимъ, что уравненія, опредѣляющія  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , не зависятъ отъ вида функціи  $\varphi$ .

Поэтому можно положить  $\varphi(x) = e^x$ , и коэффициенты, полученные при этомъ предположеніи, будутъ тѣ же и во всѣхъ другихъ случаяхъ. Но уравненіе (1) приметъ тогда видъ:

$$e^x (e^h - 1) = h e^x + A_1 h e^x (e^h - 1) + A_2 h^2 e^x (e^h - 1) + \dots,$$

т.-е.

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 - A_1 h - A_2 h^2 - A_3 h^3 - \dots,$$

откуда (§ 305)

$$A_{2n+1} = 0, \quad A_{2n} = (-1)^n \frac{B_n}{1.2.3 \dots 2n}.$$

Слѣдовательно, для какой-угодно функціи имѣемъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) - \varphi(x) &= h \varphi'(x) + \frac{h}{2} [\varphi'(x+h) - \varphi'(x)] - \frac{h^2}{12} [\varphi''(x+h) - \varphi''(x)] + \\ &+ \frac{h^4}{720} [\varphi^{iv}(x+h) - \varphi^{iv}(x)] + \dots + (-1)^n \frac{B_n h^{2n}}{1.2.3 \dots 2n} [\varphi^{2n}(x+h) - \varphi^{2n}(x)] + \dots \end{aligned}$$

Эта формула имѣетъ важныя приложенія; мы рассмотримъ ихъ въ другой главѣ, знакомясь съ условіями сходимости и съ предѣлами ошибки, когда рядъ прерывается на данномъ членѣ.

**§ 334. Формула Буля.** — Буль (Boole) далъ формулу, аналогичную съ формулою Стирлинга; она, какъ и предыдущая, получается легко по методу неопредѣленныхъ коэффициентовъ; видъ ея слѣдующій:

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) - \varphi(x) &= A_1 h [\varphi'(x+h) + \varphi'(x)] + A_2 h^2 [\varphi''(x+h) + \varphi''(x)] + \\ &+ A_3 h^3 [\varphi'''(x+h) + \varphi'''(x)] + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Приравнивая другъ другу, какъ въ предыдущемъ случаѣ, коэффициенты при одинаковыхъ степеняхъ  $h$  и замѣчая, что  $\varphi'(x)$ —общій множитель въ членахъ съ  $h$ ,  $\varphi''(x)$ —общій множитель въ членахъ съ  $h^2$ , и т. д., имѣемъ:

$$1 - 2A_1 = 0,$$

$$\frac{1}{1.2} - A_1 - 2A_2 = 0,$$

$$\frac{1}{1.2.3} - \frac{A_1}{1.2} - A_2 - 2A_3 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

откуда

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{24}, \dots$$

Чтобы найти выражение для общего члена, замѣтимъ, что можно, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, не измѣняя искомымъ коэффициентовъ, выбрать частный видъ функціи и положить, напр.,  $\varphi(x) = e^x$ ; въ такомъ случаѣ уравненіе (1) будетъ:

$$e^x(e^h - 1) = A_1 h e^x(e^h + 1) + A_2 h^2 e^x(e^h + 1) + \dots,$$

т.-е.

$$\frac{e^h - 1}{e^h + 1} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \dots,$$

и, слѣдовательно (§ 305),

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{24}, \quad A_4 = 0, \quad A_5 = \frac{1}{240}, \quad A_6 = 0, \quad A_7 = \frac{17}{40320}, \dots$$

Полагая  $x + h = y$ , пишемъ уравненіе Буля въ видѣ:

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \frac{1}{2} [\varphi'(y) + \varphi'(x)] (y - x) - \frac{1}{24} [\varphi'''(y) + \varphi'''(x)] (y - x)^2 + \dots$$

**§ 335. Формулы Чебышева.** — Методъ неопредѣленныхъ коэффициентовъ привелъ Чебышева къ нѣсколькимъ весьма замѣчательнымъ рядамъ. Предположимъ, что извѣстно разложеніе въ рядъ вида:

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + \dots \quad (1)$$

Предложимъ себѣ вывести отсюда разложеніе  $f(1)$  въ рядъ вида:

$$f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + \dots + A_n F(n) + \dots \quad (2)$$

Эта задача, приложенія которой кажутся съ перваго раза весьма ограниченными, имѣетъ, однако, важное значеніе. Чтобы рѣшить ее въ общемъ видѣ и опредѣлить коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , которые, разъ допущено уравненіе (2), не зависятъ отъ вида входящихъ туда функцій, замѣнимъ  $F(1), F(2), F(3), \dots$  въ уравненіи (2) ихъ значеніями, выведенными изъ уравненія (1), когда въ послѣднемъ положимъ послѣдовательно  $x = 1, x = 2, x = 3, \dots$  Получимъ уравненіе вида:

$$f(1) = P_1 f(1) + P_2 f(2) + P_3 f(3) + \dots, \quad (3)$$

которое, очевидно, удовлетворится при

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \dots, \quad P_n = 0, \dots;$$

такимъ образомъ составляемъ уравненія:

$$A_1 = 1, \quad 0 = A_2 + 1, \quad 0 = A_3 + 1, \quad 0 = A_4 + A_2 + 1$$

и находимъ:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = -1, \quad A_4 = 0.$$

Общій законъ слѣдующій:

Если  $n$  — первоначальное, то  $A_n = -1$ . Если  $n$  — произведение нѣсколькихъ различныхъ между собою первоначальныхъ множителей, числомъ  $k$ , то  $A_n = (-1)^k$ . Наконецъ, если  $n$  содержитъ дважды одинъ и тотъ же первоначальный множитель, то  $A_n = 0$ .

Доказательство этихъ теоремъ очень просто. Если  $n$  — первоначальное, то вторая часть содержитъ только два члена съ  $f(n)$ , происходящихъ изъ  $A_1 F(1)$  и  $A_n F(n)$ , такъ что

$$0 = A_1 + A_n,$$

и такъ какъ  $A_1 = 1$ , то

$$A_n = -1.$$

Если  $n = pqr \dots kl$ , гдѣ  $p, q, r, \dots, k, l$  обозначаютъ первоначальныя различныя между собою числа, то коэффициентъ при  $f(n)$  въ уравненіи (3) есть сумма коэффициентовъ  $A$ , указатели которыхъ представляютъ дѣлителей числа  $n$ . Но эти члены можно разбить на двѣ группы: одни — съ указателями, представляющими дѣлителей произведенія  $pqr \dots k$ , и другіе — съ указателями, содержащими множитель  $l$ . Сумма первыхъ равна нулю, потому что они образуютъ коэффициентъ при  $f\left(\frac{n}{l}\right)$ , уже приравненный нулю; остается, поэтому,

$$A_l + A_{pl} + A_{ql} + \dots + A_{dl} + \dots + A_{pqr \dots kl} = 0,$$

гдѣ  $D$  обозначаетъ какой-угодно дѣлитель произведенія  $pq \dots k$ . Но если допустить, что теорема доказана для коэффициентовъ, указатели которыхъ имѣютъ меньшее число множителей, то всѣ члены этого уравненія будутъ точно равны, но обратны по знаку, кромѣ послѣдняго, членамъ того уравненія, которое выражаетъ, что коэффициентъ при  $f(pqr \dots k)$  равенъ нулю. Послѣдніе члены обоихъ уравненій должны быть, поэтому, также равны и противоположны по знаку; значитъ,

$$A_{pqr \dots k} = -A_{pqr \dots kl}.$$

Слѣдовательно, если теорема справедлива для случая, когда  $n$  содержитъ меньше  $n$  множителей, то она справедлива и тогда, когда множителей  $n$ .

Предположимъ, наконецъ, что  $n = ap^m$ , гдѣ  $p$  — первоначальное и отличное отъ единицы. Приравнивая нулю сумму коэффициентовъ, указатели которыхъ представляютъ дѣлителей  $ap^m$ , найдемъ сначала сумму тѣхъ, указатели которыхъ представляютъ дѣли-

телей  $\alpha$ ; эта сумма равна нулю, потому что коэффициентъ при  $f(\alpha)$  долженъ быть приравненъ нулю по уравненію (3). Точно также члены, указатели которыхъ содержатъ множителемъ  $p$  по одному разу, въ суммѣ даютъ нуль, потому что коэффициентъ при  $f(\alpha p)$  равенъ нулю. То же самое можно сказать и о тѣхъ членахъ, указатели которыхъ содержатъ множителемъ  $p^2$ , и т. д., такъ что уравненіе приводится къ

$$A_{p^m} + A_{D_1 p^m} + A_{D_2 p^m} + \dots + A_{\alpha p^m} = 0,$$

гдѣ  $D_1, D_2, \dots$ , обозначаютъ дѣлители  $\alpha$ . Слѣдовательно, если допустить, что  $A_n$  будетъ нулемъ, всякій разъ какъ  $n$  является произведеніемъ  $p^m$  на число меньшее  $\alpha$ , то оно необходимо будетъ нулемъ для  $n = \alpha p^m$ , что и доказываетъ теорему,—дѣйствительно очень легко обнаружить ея справедливость для  $n = p^m$ .

Чтобы приложить предыдущую теорему, рассмотримъ очевидную формулу

$$\frac{1}{a^x - 1} = a^{-x} + a^{-2x} + a^{-3x} + a^{-4x} + \dots,$$

откуда

$$a^{-1} = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a^2-1} - \frac{1}{a^3-1} - \frac{1}{a^5-1} + \frac{1}{a^6-1} - \dots;$$

также имѣемъ:

$$\frac{1(1-a^x)}{x} = -\frac{a^x}{x} - \frac{a^{2x}}{2x} - \frac{a^{3x}}{3x} - \frac{a^{4x}}{4x} - \dots,$$

откуда, отыскивая значеніе  $-\frac{a^x}{x}$  при  $x = 1$ , находимъ:

$$-a = \frac{1(1-a)}{1} - \frac{1(1-a^2)}{2} - \frac{1(1-a^3)}{3} - \frac{1(1-a^5)}{5} + \frac{1(1-a^6)}{6} - \frac{1(1-a^7)}{7} + \\ + \frac{1(1-a^{10})}{10} + \dots$$

Слѣдовательно,

$$e^{-a} = \frac{(1-a)(1-a^6)^{\frac{1}{6}}(1-a^{10})^{\frac{1}{10}}(1-a^{14})^{\frac{1}{14}}\dots}{(1-a^2)^{\frac{1}{2}}(1-a^3)^{\frac{1}{3}}(1-a^5)^{\frac{1}{5}}(1-a^7)^{\frac{1}{7}}(1-a^{11})^{\frac{1}{11}}(1-a^{13})^{\frac{1}{13}}\dots}$$

**§ 336.** Чебышевъ рассмотрѣлъ равнымъ образомъ случай, когда двѣ функціи  $F(x)$  и  $f(x)$  связаны уравненіемъ вида:

$$F(x) = f(x) + f(3x) + f(5x) + \dots \quad (1)$$

Можно еще и въ этомъ случаѣ выразить  $f(1)$  рядомъ вида:

$$f(1) = A_1 F(1) + A_3 F(3) + A_5 F(5) + \dots \quad (2)$$



Чтобы найти коэффициенты, замѣняемъ во второй части  $F(1), F(3), \dots$  ихъ значеніями, выведенными изъ уравненія (1), и приравнивая нулю коэффициенты при  $f(3), f(5), f(7), \dots$  и единицѣ коэффициентъ при  $f(1)$ , будемъ имѣть:

$$A_1 = 1, \quad A_3 + A_1 = 0, \quad A_5 + A_1 = 0, \quad A_7 + A_1 = 0, \quad A_9 + A_3 + A_1 = 0, \dots$$

Вообще, обозначая черезъ  $n$  какое-угодно нечетное число, нужно приравнять нулю сумму коэффициентовъ, указатели которыхъ представляютъ дѣлителей  $n$ . Точно такъ же, какъ въ предыдущемъ случаѣ, увидимъ, что если  $n$  дѣлится на квадратъ, то  $A_n = 0$ ; въ противномъ же случаѣ, если  $n$  есть произведеніе  $k$  первоначальныхъ различныхъ между собою чиселъ, то  $A_n = (-1)^k$ , и рядъ (2) приметъ видъ:

$$f(1) = F(1) - F(3) - F(5) - F(7) - F(11) - F(13) + F(15) - F(17) - \\ - F(19) + F(21) - \dots$$

#### ТЕОРІЯ ПРОИЗВОДЯЩИХЪ ФУНКЦІЙ

§ 337. Теорія производящихъ функцій, созданная Лапласомъ, изложена имъ въ его большомъ трудѣ по Исчисленію Вѣроятностей. Авторитетъ его имени освятилъ введенныя имъ впервые опредѣленія и обозначенія; эти функціи слишкомъ теперь извѣстны, чтобы обойти ихъ молчаніемъ и не указать на нѣкоторыя простѣйшія ихъ приложенія.

Когда функція  $\varphi(x)$  развернута въ рядъ по степенямъ перемѣнной, отъ которой она зависитъ, т.-е. представлена въ видѣ:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n + \dots,$$

то говорятъ, что  $\varphi(x)$  есть производящая функція отъ  $A_n$ .

Такъ, напр.,  $e^x$  есть производящая функція отъ  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$ .

Если разложеніе  $\varphi(x)$  содержитъ члены съ отрицательными показателями, то опредѣленіе и въ этомъ случаѣ прилагается безъ труда и  $\varphi(x)$  остается производящею функціей отъ  $A_n$ ; само же  $A_n$  является функціею отъ  $n$  и представляетъ, для положительныхъ или отрицательныхъ значеній цѣлаго  $n$ , коэффициентъ при  $x^n$  въ разложеніи. Если рядъ, представляющій  $\varphi(x)$ , содержитъ только положительные степени отъ  $x$ , то  $A_n$  должно принимать равнымъ нулю для всякаго отрицательнаго значенія  $n$ .

§ 338. Если  $\varphi(x)$  — производящая функція отъ  $A_n$ , то  $\frac{\varphi(x)}{x^p}$  — производящая функція отъ  $A_{n+p}$ , а  $\varphi(x)x^p$  — такая же функція отъ  $A_{n-p}$ . Когда  $n - p$  отрицательно,  $A_{n-p}$  должно приниматься за нуль, но теорема остается точною, потому что въ разложеніи  $\varphi(x)$  показатели всѣхъ членовъ положительны и, слѣдовательно, въ разложеніи  $\varphi(x)x^p$  всѣ они больше  $p$ .

Также легко видѣть, что  $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - 1\right)$  есть производящая функція отъ  $A_{n+1} - A_n$  или  $\Delta A_n$ ; отсюда вытекаетъ, что  $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$  — производящая функція отъ  $\Delta^2 A_n$ ,  $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - 1\right)^3$  — отъ  $\Delta^3 A_n$  и, вообще,  $\varphi(x) \left(\frac{1}{x} - 1\right)^p$  — отъ  $\Delta^p A_n$ .

Наконецъ, соединяя эту теорему съ предыдущею, видимъ, что  $\varphi(x) x^p \left(\frac{1}{x} - 1\right)^q$  — производящая функція отъ  $\Delta^q A_{n-p}$ .

**§ 339.** Предыдущія замѣчанія даютъ простое доказательство замѣчательной теоремы, относящейся къ разностямъ какого-угодно ряда чиселъ.

Всякое тождество, обѣ части котораго — цѣлыя и раціональныя функціи отъ  $x, \frac{1}{x}$  и  $\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ , остается точнымъ послѣ замѣны въ немъ произведеній вида  $x^p \left(\frac{1}{x} - 1\right)^q$  и  $\frac{1}{x^p} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^q$  выраженіями  $\Delta^q A_{n-p}$  и  $\Delta^q A_{n+p}$ , при чемъ  $A_i$  обозначаетъ совершенно произвольное число.

Въ самомъ дѣлѣ, умножаемъ данное тождество на производящую функцію  $\varphi(x)$  отъ  $A_n$  и затѣмъ развертываемъ въ рядъ обѣ части уравненія, которыя, по предположенію, тождественны. Коэффициенты при  $x^n$  будутъ между собою равны, а это точно даетъ высказанную теорему, потому что (§ 338)  $x^p \left(\frac{1}{x} - 1\right)^q \varphi(x)$  есть производящая функція отъ  $\Delta^q A_{n-p}$ , а  $\frac{1}{x^p} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^q \varphi(x)$  — отъ  $\Delta^q A_{n+p}$ .

**§ 340.** Мы ограничимся простѣйшими приложеніями предыдущей теоремы; имѣемъ:

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^p = \frac{1}{x^p} - p \frac{1}{x^{p-1}} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{x^{p-2}} + \dots + (-1)^p,$$

$$\frac{1}{x^p} = \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\right]^p = 1 + p \left(\frac{1}{x} - 1\right) + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{x} - 1\right)^p,$$

откуда

$$\Delta^p A_n = A_{n+p} - p A_{n+p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} A_{n+p-2} + \dots + (-1)^p A_n, \quad (1)$$

$$A_{n+p} = A_n + p \Delta A_n + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_n + \dots + \Delta^p A_n. \quad (2)$$

Обѣ эти формулы очень извѣстны, ихъ легко доказать непосредственно и мы уже имѣли случай ими пользоваться.

Слѣдующая формула, данная Лапласомъ, имѣетъ также большое значеніе. Полагаемъ

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{\alpha}{x}. \quad (3)$$

По теоремѣ Лагранжа

$$\frac{1}{x^p} = 1 + px + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots,$$

и такъ какъ по уравненію (3)  $\alpha = x \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$ , то такое же соотношеніе будетъ между  $x$ ,  $\frac{1}{x}$  и  $\left( \frac{1}{x} - 1 \right)$ ; значитъ, можно примѣнить общую теорему и написать:

$$A_{n+p} = A_n + p\Delta A_{n-1} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_{n-2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 A_{n-3} + \dots \quad (4)$$

Въ этой формулѣ  $A_0, A_1, \dots, A_n$  представляютъ коэффициенты при степеняхъ  $x$  въ разложеніи какой-угодно функціи; значить, это—какія-угодно числа, идущія по произвольному закону. Равнымъ образомъ,  $A_{-1}, A_{-2}, \dots, A_{-n}, \dots$ —какія-угодно числа, потому что разложеніе  $\varphi(x)$  можетъ содержать отрицательныя степени отъ  $x$ : можно, если угодно, считать ихъ нулями.

Формула (1) даетъ:

$$\Delta^k A_{n-k} = A_n - kA_{n-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} A_{n-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A_{n-3} + \dots, \quad (5)$$

гдѣ члены, въ которыхъ указатель при  $A$  — отрицателенъ, должны быть замѣнены нулями. Въ этой формулѣ  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$  остаются одними и тѣми же для даннаго значенія  $n$ , множители же при нихъ растутъ безпредѣльно вмѣстѣ съ  $k$ . Поэтому безконечный рядъ, представляемый второю частью формулы (4), не есть сходящійся и не долженъ быть принимаемъ за точное выраженіе  $A_{n+p}$ , но можетъ, однако, дать полезное приближеніе при ограниченномъ числѣ членовъ. Это — замѣчательное обстоятельство, общее многимъ расходящимся рядамъ; мы приведемъ нѣсколько примѣровъ. Доказательство Лапласа здѣсь не будетъ очевидно и потому мы дадимъ болѣе прямое доказательство, изъ котораго узнаемъ и условія такого приближенія.

Формула (4) при  $p = 1$  приметъ видъ:

$$A_{n+1} = A_n + \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-3} + \dots \quad (6)$$

Чтобы составить эту формулу непосредственно, замѣчаемъ, что, по опредѣленіямъ для разностей,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \Delta A_n, \\ \Delta A_n &= \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-1}, \\ \Delta^2 A_{n-1} &= \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-2}, \\ &\vdots \\ \Delta^k A_{n-k+1} &= \Delta^k A_{n-k} + \Delta^{k+1} A_{n-k}; \end{aligned}$$

откуда, по сложении всѣхъ этихъ равенствъ,

$$A_{n+1} = A_n + \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \dots + \Delta^k A_{n-k} + \Delta^{k+1} A_{n-k}. \quad (7)$$

Слѣдовательно, если  $\Delta^{k+1} A_{n-k}$  очень мало, то можно разсматривать формулу (6), какъ точную, ограничиваясь во второй части  $(k+1)$  первыми членами и не заботясь о сходимости бесконечнаго ряда.

Измѣняя  $n$  на  $n+1$  въ уравненіи (7), пишемъ:

$$A_{n+2} = A_{n+1} + \Delta A_n + \Delta^2 A_{n-1} + \dots + \Delta^k A_{n+1-k} + \Delta^{k+1} A_{n+1-k}. \quad (8)$$

Замѣняя же послѣдовательно въ формулѣ (7)  $A_n$ , представляющее какую-угодно функцію отъ  $n$ , черезъ  $\Delta A_n, \Delta^2 A_n, \Delta^3 A_n, \dots$  и въ то же время  $n$  черезъ  $n-1, n-2, n-3, \dots$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} \Delta A_n &= \Delta A_{n-1} + \Delta^2 A_{n-2} + \dots + \Delta^{k+1} A_{n-k-1} + \Delta^{k+2} A_{n-k-1}, \\ \Delta^2 A_{n-1} &= \Delta^2 A_{n-2} + \Delta^3 A_{n-3} + \dots + \Delta^{k+2} A_{n-k-2} + \Delta^{k+3} A_{n-k-2}, \\ \Delta^3 A_{n-2} &= \Delta^3 A_{n-3} + \Delta^4 A_{n-4} + \dots + \Delta^{k+3} A_{n-k-3} + \Delta^{k+4} A_{n-k-3}, \\ &\dots \end{aligned}$$

послѣ подстановки этихъ выраженій въ уравненіе (8) оно приметъ видъ:

$$A_{n+2} = A_n + 2 \Delta A_{n-1} + 3 \Delta^2 A_{n-2} + \dots + k \Delta^k A_{n+1-k} + R,$$

гдѣ членомъ  $R$  можно пренебречь, если разности порядка выше  $k$  очень малы.

Если, замѣтивъ это, допустимъ, что формула

$$A_{n+p} = A_n + p \Delta A_{n-1} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_{n-2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 A_{n-3} + \dots \quad (9)$$

точна для нѣкотораго значенія  $p$ , при чемъ разности съ нѣкотораго мѣста отброшены, то можно доказать, что она справедлива, при томъ же условіи, для значеній, непосредственно высшаго. Въ самомъ дѣлѣ, беря послѣдовательныя разности отъ обѣихъ частей уравненія (9) и уменьшая каждый разъ указатель  $n$  на единицу, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \Delta A_{n+p-1} &= \Delta A_{n-1} + p \Delta^2 A_{n-2} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \Delta^3 A_{n-3} + \dots, \\ \Delta^2 A_{n+p-2} &= \Delta^2 A_{n-2} + p \Delta^3 A_{n-3} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \Delta^4 A_{n-4} + \dots, \\ \Delta^3 A_{n+p-3} &= \Delta^3 A_{n-3} + p \Delta^4 A_{n-4} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

складывая эти уравненія и замѣчая, что

$$A_{n+p+1} = A_{n+p} + \Delta A_{n+p-1} + \Delta^2 A_{n+p-2} + \Delta^3 A_{n+p-3} + \dots,$$

находимъ, принимая во вниманіе извѣстныя свойства коэффициентовъ бинорма,

$$A_{n+p+1} = A_n + (p+1) \Delta A_{n-1} + \frac{(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_{n-2} + \\ + \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 A_{n-3} + \dots;$$

формула, слѣдовательно, общая.

§ 341. Укажемъ, наконецъ, на нѣкоторыя простыя приложенія теоріи производящихъ функцій.

Задача.—Найти такую функцію отъ  $x$ , чтобы

$$F(x+p) + A_1 F(x+p-1) + A_2 F(x+p-2) + \dots + A_p F(x) = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $p$  — данное цѣлое число и  $x$  — одно изъ значеній переменнй. Замѣняемъ  $x$  произвольнымъ цѣлымъ числомъ  $n$ , тогда

$$F(n+p) + A_1 F(n+p-1) + \dots + A_p F(n) = 0. \quad (2)$$

Пусть будетъ  $y$  производящая функція отъ  $F(n)$ , т.-е. функція

$$y = F(0) + t F(1) + t^2 F(2) + \dots + t^n F(n) + \dots; \quad (3)$$

первая часть уравненія (2) есть производящая функція отъ

$$\frac{y}{t^p} + A_1 \frac{y}{t^{p-1}} + \dots + A_p y. \quad (4)$$

Чтобы это выраженіе равнялось нулю, нужно, чтобы въ разложеніи функціи (4) не было члена съ  $t^n$ ; при  $n$  цѣломъ и положительномъ нужно, чтобы разложеніе содержало только отрицательныя степени отъ  $t$ . Кромѣ того, не должны входить отрицательныя степени, показатели которыхъ превосходятъ  $-p$ , потому что разложеніе  $y$  не содержитъ знаменателей, и, слѣдовательно,

$$\frac{y}{t^p} + A_1 \frac{y}{t^{p-1}} + \dots + A_p y = B_0 + \frac{B_1}{t} + \dots + \frac{B_p}{t^p},$$

откуда

$$y = \frac{B_0 + \frac{B_1}{t} + \dots + \frac{B_p}{t^p}}{\frac{1}{t^p} + \frac{A_1}{t^{p-1}} + \dots + A_p} = \frac{B_0 t^p + B_1 t^{p-1} + \dots + B_p}{A_p t^p + A_{p-1} t^{p-1} + \dots + 1}.$$

Развертывая  $y$  въ рядъ по степенямъ  $t$ , видимъ, что коэффициентъ при  $t^n$  будетъ функціею отъ  $n$ , выполняющею требуемое условіе и содержащею  $p+1$  постоянныхъ произвольныхъ  $B_0, B_1, \dots, B_p$ .



Пусть, напр., дано уравнение

$$F(x+2) - 2a F(x+1) + F(x) = 0;$$

$F(x)$  имѣетъ, по предыдущему, производящую функцію

$$\frac{B_0 t^2 + B_1 t + B}{t^2 - 2at + 1},$$

которая, будучи разложена на простѣйшія дроби, приметъ видъ:

$$B_0 + \frac{C}{t - a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{C'}{t - a - \sqrt{a^2 - 1}},$$

а такъ какъ

$$\begin{aligned} \frac{C}{t - a + \sqrt{a^2 - 1}} &= \frac{-C}{a - \sqrt{a^2 - 1}} \left[ 1 + \frac{t}{a - \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{t^2}{(a - \sqrt{a^2 - 1})^2} + \dots \right], \\ \frac{C'}{t - a - \sqrt{a^2 - 1}} &= -\frac{C'}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \left[ 1 + \frac{t}{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{t^2}{(a + \sqrt{a^2 - 1})^2} + \dots \right], \end{aligned}$$

то коэффициентъ при  $t^x$ , т.-е. искомая функція  $F(x)$  будетъ:

$$F(x) = \frac{-C}{a - \sqrt{a^2 - 1}} \left[ \frac{1}{(a - \sqrt{a^2 - 1})^x} \right] - \frac{C'}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \left[ \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 - 1})^x} \right].$$

Если  $a$  меньше 1 и равно  $\cos \varphi$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - \sqrt{a^2 - 1}} &= \frac{1}{\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi} = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi, \\ \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} &= \frac{1}{\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi} = \cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi, \end{aligned}$$

и  $F(x)$  принимаетъ видъ:

$$A \cos x \varphi + B \sin x \varphi,$$

гдѣ  $A$  и  $B$  — двѣ постоянныя, связанныя съ  $C$  и  $C'$ , и, слѣдовательно, произвольныя. Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\cos [(x+1)\varphi + \varphi] + \cos x \varphi = 2 \cos \varphi \cos (x+1)\varphi,$$

и такъ какъ  $a$  равно  $\cos \varphi$ , то

$$\cos (x+2)\varphi - 2a \cos (x+1)\varphi + \cos x \varphi = 0.$$

§ 342. Бине (Binet) сдѣлалъ изящное приложеніе теоріи производящихъ функцій къ рѣшенію геометрической задачи, рѣшенной уже Эйлеромъ.

*Сколькими способами можно раздѣлить многоугольникъ о  $n$  сторонахъ на треугольники его діагоналями?*

Пусть  $ABCDEF \dots YZ$  выпуклый многоугольникъ о  $n + 1$  сторонахъ. Обозначаемъ черезъ  $P_k$  все число возможныхъ разложеній для многоугольника о  $k$  сторонахъ. Въ каждомъ разложеніи даннаго многоугольника сторона  $AB$  будетъ служить основаніемъ треугольника, третьей вершиной котораго можетъ быть любая изъ точекъ  $C, D, E, \dots, Y, Z$ . Треугольнику  $ABC$  соотвѣтствуетъ, очевидно, число разложеній, равное  $P_n$ , треугольнику  $ABD$  — число, равное  $P_{n-1}P_2$ , треугольнику  $ABE$  — число, равное  $P_{n-2}P_3$ , и т. д. Всѣ эти группы существенно различны, все ихъ число есть  $P_{n+1}$ , и мы имѣемъ:

$$P_{n+1} = P_n + P_2 P_{n-1} + P_3 P_{n-2} + \dots + P_{n-1} P_2 + P_1. \quad (1)$$

Это уравненіе даетъ возможность составить послѣдовательно численныя значенія  $P_4, P_5, P_6, \dots$  и продолжить эту таблицу какъ-угодно далеко, но все искусство заключается въ томъ, чтобы получить выраженіе для  $P_n$ .

Пусть  $\varphi(x)$  производящая функція отъ  $P_{n+2}$  и, слѣдовательно,

$$\varphi(x) = 1 + P_2 x + P_3 x^2 + \dots + P_{n+2} x^n + \dots; \quad (2)$$

умножая этотъ рядъ на самого себя, чтобы составить  $\varphi(x)^2$ , получаемъ:

$$\varphi(x)^2 = 1 + x(P_2 + P_3) + x^2(P_4 + P_2 P_2 + P_3) + x^3(P_5 + P_4 P_2 + P_3 P_3 + P_5) + \dots,$$

т.-е, въ силу уравненія (1),

$$\varphi(x)^2 = 1 + P_4 x + P_5 x^2 + P_6 x^3 + \dots,$$

или же, такъ какъ очевидно  $P_2 = 1$ ,

$$\varphi(x)^2 = \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{1}{x},$$

откуда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} (1 \pm \sqrt{1 - 4x});$$

здѣсь при радикалѣ нужно взять знакъ  $-$ , чтобы  $\varphi(x)$  равнялась единицѣ при  $x = 0$ . Итакъ, наконецъ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} (1 - \sqrt{1 - 4x});$$

развертывая радикалъ, пишемъ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot 4^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 4^3 x^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) 4^{n+1}}{2 \cdot 4 \dots 2n (2n+2)} x^n + \dots \right),$$

и, наконецъ,

$$P_{n+2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+2)} 2^{2n+1},$$

или, что то же самое,

$$P_{n+2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)} 2^n,$$

откуда выводимъ:

$$P_{n+3} = 2P_{n+2} \frac{2n+1}{n+2}.$$

Это уравненіе можно доказать прямо, какъ это и сдѣлали Ламэ (Lamé) и Родригъ (Rodrigues).

#### О СИМВОЛИЧЕСКОМЪ ОБОЗНАЧЕНІИ

§ 343. Говоря о выраженіи  $n$ -ой степени произведенія, въ которую входятъ тѣ же коэффициенты, что и въ  $n$ -ую степень бинорма, Лейбницъ представилъ въ общемъ видѣ аналогію, существующую между степенями и дифференціалами различныхъ порядковъ.

Лагранжъ развилъ эту идею, сближая при помощи символическаго обозначенія многія формулы, которыя съ перваго раза кажутся совершенно независимыми.

Согласимся толковать выраженіе  $h \frac{d}{dx}$ , какъ количество,  $n$ -ая степень котораго, умноженная на  $\varphi(x)$ , даетъ въ произведеніи  $h^n \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n}$ ; теорему Тэйлора можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(x+h) = e^{h \frac{d}{dx}} \cdot \varphi(x). \quad (1)$$

Дѣйствительно, не трудно провѣрить, что, развертывая  $e^{h \frac{d}{dx}}$  по степенямъ показателя и принимая во вниманіе предыдущее соглашеніе, мы во второй части получимъ не что иное, какъ рядъ, выражающій  $\varphi(x+h)$ .

Изъ формулы (1) заключаемъ:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \left( e^{h \frac{d}{dx}} - 1 \right) \varphi(x).$$

Чтобы отъ функціи  $\varphi(x)$  взять *разность*, обозначаемую обыкновенно черезъ  $\Delta \varphi(x)$ , нужно, слѣдовательно, умножить символически эту функцію на  $\left( e^{h \frac{d}{dx}} - 1 \right)$ ; отсюда ясно,

что, чтобы взять вторую разность, нужно умножить *символически* на  $\left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^2$ , и что, вообще, будем иметь:

$$\Delta^n \varphi(x) = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^n \varphi(x).$$

§ 344. Лагранжъ имѣлъ мысль придать  $n$  въ предыдущей формулѣ отрицательное значеніе и написать:

$$\Delta^{-1} \varphi(x) = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^{-1} \varphi(x), \quad (1)$$

но нужно изъяснить, что обозначаютъ обѣ части этой новой формулы и доказать ихъ равенство.

Чтобы избѣжать трудностей, неизбежныхъ при этихъ изъясненіяхъ, замѣнимъ сначала  $\varphi(x)$  производною  $\psi'(x)$ , т.-е. напомнимъ:

$$\Delta^{-1} \psi'(x) = \left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^{-1} \psi'(x). \quad (2)$$

Мы выражаемъ знакомъ  $\Delta^{-1}$  дѣйствіе, обратное тому, которое выражено знакомъ  $\Delta$ , т.-е. что  $\Delta^{-1} \psi'(x)$  имѣетъ разностью  $\psi'(x)$ ; такимъ образомъ,

$$\Delta \Delta^{-1} \psi'(x) = \Delta^{-1} \Delta \psi'(x) = \psi'(x).$$

Что касается второй части, то для ея истолкованія нужно приять, что множитель

$$\left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1} \quad (3)$$

развернуть въ рядъ по степенямъ  $h \frac{d}{dx}$  и что въ этомъ ряду  $\left(\frac{d}{dx}\right)^n \psi'(x)$  замѣнено  $\frac{d^n \psi'(x)}{dx^n}$ .

Для полной точности уравненія (1), истолкованнаго такимъ образомъ, нужно показать, что разность во второй части, соответствующая приращенію  $h$  переменнѣй, есть  $\psi'(x)$ . Разность функціи, какъ мы уже говорили, получается черезъ символическое ея умноженіе на  $\left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)$ , такъ что  $\psi'(x)$  должно быть умножено послѣдовательно на ряды, выражающіе  $\frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1}$  и  $e^{h \frac{d}{dx}} - 1$ ; произведеніе этихъ двухъ множителей приво-

дится, очевидно, къ единицѣ, каково бы ни было количество, представленное символомъ  $h \frac{d}{dx}$ , и не важно, чтобы степени этого количества,  $h \frac{d}{dx}$ , раньше или позднѣе были за-

мѣнены производными, символическое произведение все равно приведетъ къ единицѣ; имѣемъ:

$$\left( e^{h \frac{d}{dx}} - 1 \right) \frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1} \psi'(x) = \psi'(x),$$

и, слѣдовательно,

$$\Delta \frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1} \psi'(x) = \psi'(x),$$

или

$$\frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1} \psi'(x) = \Delta^{-1} \psi'(x),$$

что вполне совпадаетъ съ уравненіемъ (1).

Замѣняя множитель

$$\frac{1}{e^{h \frac{d}{dx}} - 1}$$

его разложеніемъ, пишемъ уравненіе (1) въ видѣ:

$$\Delta^{-1} \psi'(x) = \frac{1}{h} \left( \frac{d}{dx} \right)^{-1} \psi'(x) - \frac{1}{2} \psi'(x) + \frac{h}{6} \frac{d}{dx} \frac{\psi'(x)}{1 \cdot 2} - \frac{h^3}{30} \frac{d^3}{dx^3} \frac{\psi'(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots;$$

$\left( \frac{d}{dx} \right)^{-1} \psi'(x)$  выражаетъ здѣсь функцію, производная отъ которой равна  $\psi'(x)$ , т.-е. выражаетъ  $\psi(x)$ ; итакъ, наконецъ,

$$\Delta^{-1} \psi'(x) = \frac{1}{h} \psi(x) - \frac{1}{2} \psi'(x) + \frac{h}{12} \psi''(x) - \frac{h^3}{720} \psi^{iv}(x) + \dots$$

Если въ обѣихъ частяхъ  $x$  получаетъ приращеніе  $h$ , то, приравнивая другъ другу приращенія обѣихъ частей и замѣчая, что приращеніе первой части, по опредѣленію, есть  $\psi'(x)$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{1}{h} [\psi(x+h) - \psi(x)] - \frac{1}{2} [\psi'(x+h) - \psi'(x)] + \frac{h}{12} [\psi''(x+h) - \psi''(x)] - \\ &\quad - \frac{h^3}{720} [\psi^{iv}(x+h) - \psi^{iv}(x)] + \dots, \end{aligned}$$



и, слѣдовательно,

$$\begin{aligned}\psi(x+h) - \psi(x) &= h\psi'(x) + \frac{h}{2} [\psi'(x+h) - \psi'(x)] - \frac{h^2}{12} [\psi''(x+h) - \psi''(x)] + \\ &+ \frac{h^3}{720} [\psi'''(x+h) - \psi'''(x)] - \dots\end{aligned}$$

Это—весьма важная формула, доказанная раньше въ § 333-мъ.

§ 345. Употребленіе символическихъ обозначеній даетъ возможность высказать въ изящной формѣ теорему, извѣстную подъ именемъ *теоремы Гершеля* (*théorème d' Herschel*): она даетъ выраженіе для функціи вида  $\varphi(e^x)$ , развернутой въ рядъ по степенямъ  $x$ .

По теоремѣ Тэйлора

$$\varphi(e^x) = \varphi(1 + e^x - 1) = \varphi(1) + \varphi'(1)(e^x - 1) + \varphi''(1) \frac{(e^x - 1)^2}{2} + \dots + \varphi^n(1) \frac{(e^x - 1)^n}{1.2 \dots n} + \dots (1)$$

Значить, если положить

$$\varphi(e^x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n + \dots,$$

то коэффициентъ  $A_n$  будетъ суммою коэффициентовъ при  $x^n$  въ разложеніяхъ отдѣльныхъ членовъ второй части. А такъ какъ

$$(e^x - 1)^p = e^{px} - pe^{(p-1)x} + \frac{p(p-1)}{1.2} e^{(p-2)x} + \dots + (-1)^p e^{0x}, \quad (2)$$

то въ разложеніи второй части коэффициентъ при  $x^n$ , очевидно, равенъ

$$\frac{1}{1.2 \dots n} \left[ p^n - p(p-1)^n + \frac{p(p-1)}{1.2} (p-2)^n \dots + (-1)^p 0^n \right],$$

т.-е. (§ 340)  $\frac{1}{1.2.3 \dots n} \Delta^p 0^n$ ; слѣдовательно,

$$A_n = \frac{1}{1.2.3 \dots n} \left[ \varphi(1) 0^n + \varphi'(1) \Delta 0^n + \frac{\varphi''(1)}{1.2} \Delta^2 0^n + \dots + \frac{\varphi^n(1)}{1.2 \dots n} \Delta^n 0^n \right], \quad (3)$$

гдѣ первый членъ, равный нулю, введенъ для симметріи.

Такъ какъ  $\Delta^{n+1} 0^n$ ,  $\Delta^{n+2} 0^n$ , ... нули, то это уравненіе символически можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$A_n = \frac{\varphi(1 + \Delta) 0^n}{1.2 \dots n}. \quad (4)$$

Пусть, напр.,

$$\varphi(e^x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1e^x}{e^x - 1};$$

имѣемъ:

$$\varphi(1 + \Delta) = \frac{1(1 + \Delta)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left( \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right),$$

и, слѣдовательно,

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \left[ \frac{0^n}{1} - \frac{\Delta 0^n}{2} + \frac{\Delta^2 0^n}{3} - \dots + \frac{\Delta^n 0^n}{n+1} \right]. \quad (5)$$

Сравнивая этотъ результатъ съ хорошо извѣстнымъ разложеніемъ, видимъ, что выраженіе (5) равно нулю при  $n$  нечетномъ; въ случаѣ же  $n$  четнаго множитель въ скобкахъ представляетъ  $n$ -ое число Бернулли.

§ 346. Мы не можемъ закончить этого быстрого обзора употребленія символическихъ обозначеній, не приведя замѣчательнаго доказательства ряда Тэйлора. Полагаемъ

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = hD\varphi(x);$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= (1 + hD)\varphi(x), \\ \varphi(x + 2h) &= (1 + hD)^2\varphi(x), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi(x + nh) &= (1 + hD)^n\varphi(x). \end{aligned}$$

Полагая  $nh = \alpha$ , имѣемъ:

$$\varphi(x + \alpha) = (1 + hD)^{\frac{\alpha}{h}}\varphi(x).$$

При  $h$  бесконечно-маломъ и  $n$  бесконечно-большомъ  $(1 + hD)^{\frac{\alpha}{h}} = e^{\alpha D}$ ; символъ  $D$  при этомъ предположеніи равносильнъ символу  $\frac{d}{dx}$ . Слѣдовательно,

$$\varphi(x + \alpha) = e^{\alpha \frac{d}{dx}} \varphi(x),$$

что въ точности представляетъ символическое выраженіе теоремы Тэйлора.

#### О числахъ Бернулли

§ 347. При нѣкоторыхъ разложеніяхъ мы уже встрѣчали рядъ чиселъ, извѣстныхъ подъ именемъ *Чиселъ Бернулли* (*Nombres de Bernoulli*). Укажемъ здѣсь на нѣкоторыя наиболѣе важныя ихъ свойства. Имѣемъ:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}x^6 - \dots$$

Умножаем по-членно это уравнение на слѣдующее:

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

Произведение первых частей равно  $x$ , — значитъ, тому же должно равняться произведение и вторыхъ частей, откуда заключаемъ, что коэффициенты всѣхъ прочихъ степеней переменнѣй равны нулю, т.-е.

$$\frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 0,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} - \frac{B_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{B_{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-4)} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1)} = 0,$$

$$\frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{B_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-2)} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (2n+1)} +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+2)} = 0.$$

Эти уравненія опредѣляютъ  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ; каждая неизвѣстная опредѣляется даже два раза, но, какъ и должно быть, полученные значенія взаимно совпадаютъ; находимъ:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \quad B_8 = \frac{3617}{510}, \quad B_9 = \frac{43867}{798}, \dots$$

**§ 348.** Числа Бернулли впервые появляются въ вычисленіи суммы одинаковыхъ степеней цѣлыхъ чиселъ. Покажемъ сначала, какъ ихъ ввести при рѣшеніи этой задачи. Полагаемъ

$$\varphi(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x};$$

дифференцируемъ это уравненіе  $p$  разъ:

$$\varphi^p(x) = e^x + 2^p e^{2x} + \dots + (n-1)^p e^{(n-1)x};$$

полагаемъ  $x$  равнымъ нулю:

$$\varphi^p(0) = 1 + 2^p + 3^p + \dots + (n-1)^p.$$

По мы имѣемъ:

$$\varphi(x) = 1 + e^x + e^{2x} + \dots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}.$$

Если вторую часть развернуть въ рядъ по степенямъ  $x$ , то  $\varphi^p(0)$  будетъ произведеніемъ коэффиціента при  $x^p$  на  $1.2.3\dots p$ . А такъ какъ

$$\begin{aligned} \frac{e^{nx} - 1}{x} &= n + \frac{n^2 x}{1.2} + \frac{n^3 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^3}{1.2.3.4} + \dots, \\ \frac{x}{e^x - 1} &= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_1 x^2}{1.2} - \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \frac{B_3 x^6}{1.2.3.4.5.6} - \dots, \end{aligned}$$

то, перемножая эти два уравненія, получимъ разложеніе  $\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$ , и коэффиціентъ при  $x^p$ , въ случаѣ  $p$  четнаго, будетъ

$$\begin{aligned} \frac{n^{p+1}}{1.2.3\dots(p+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^p}{1.2.3\dots p} + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{n^{p-1}}{1.2.3\dots(p-1)} - \\ - \frac{B_2}{1.2.3.4} \cdot \frac{n^{p-3}}{1.2\dots(p-3)} + \dots + \frac{n B_{\frac{p}{2}}}{1.2.3\dots p}, \end{aligned}$$

въ случаѣ же  $p$  нечетнаго,

$$\begin{aligned} \frac{n^{p+1}}{1.2.3\dots(p+1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n^p}{1.2.3\dots p} + \frac{B_1}{1.2} \cdot \frac{n^{p-1}}{1.2.3\dots(p-1)} - \dots - \\ - \frac{B_{\frac{p-1}{2}}}{1.2.3\dots(p-1)} \frac{n^2}{1.2}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, если  $p$ —четное, то

$$\begin{aligned} 1 + 2^p + 3^p + \dots + (n-1)^p &= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{B_1}{1.2} p n^{p-1} - \\ &- \frac{B_2}{1.2.3.4} p(p-1)(p-2) n^{p-3} + \dots \pm n B_{\frac{p}{2}}, \end{aligned}$$

а если  $p$ —нечетное, то

$$\begin{aligned} 1 + 2^p + 3^p + \dots + (n-1)^p &= \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{B_1}{1.2} p n^{p-1} - \\ &- \frac{B_2}{1.2.3.4} p(p-1)(p-2) n^{p-3} + \dots - B_{\frac{p-1}{2}} p \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ находимъ:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2},$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4},$$

$$1 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n-1)^4 = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{1}{30}n,$$

$$1 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n-1)^5 = \frac{n^6}{6} - \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}.$$

$$1 + 2^6 + 3^6 + \dots + (n-1)^6 = \frac{n^7}{7} - \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{1}{42}n.$$

### § 349. Сумма

$$1 + 2^p + 3^p + \dots + (n-1)^p,$$

которую мы назовемъ черезъ  $\varphi_p(n)$ , есть цѣлый многочленъ степени  $p+1$  относительно  $n$ , обладающій нѣсколькими замѣчательными свойствами.

Можно выразить  $\varphi_p(n)$  въ функціи отъ  $\left(n - \frac{1}{2}\right)$ ; тогда будутъ только четныя степени при  $p$  нечетномъ и нечетныя при  $p$  четномъ. Въ самомъ дѣлѣ,  $\varphi_p(n)$  будетъ, если не принимать во вниманіе численнаго множителя, коэффициентомъ при  $x^p$  въ разложеніи

$$\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}.$$

Если мы обозначимъ эту функцію черезъ  $\psi(x)$ , то разложеніе функціи  $\psi(-x)$ , получаемой посредствомъ замѣны  $x$  на  $-x$ , отличается отъ разложенія  $\psi(x)$  только знаками при членахъ съ нечетными показателями. Поэтому, если  $p$  — нечетное, то коэффициентъ при  $x^p$  тотъ же, что въ разложеніи функціи

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} - \frac{e^{-nx} - 1}{e^{-x} - 1} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(n-\frac{1}{2})x} - e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{e^{-(n-\frac{1}{2})x} - e^{\frac{1}{2}x}}{e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{(n-\frac{1}{2})x} + e^{-(n-\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} \right]. \end{aligned}$$

Но эта функція останется тою же, если въ ней замѣнить  $n - \frac{1}{2}$  выраженіемъ  $-\left(n - \frac{1}{2}\right)$ , — значитъ, коэффициентъ при  $x^p$  въ ея разложеніи по степенямъ  $x$  есть четная функція отъ  $n - \frac{1}{2}$ .



Когда  $p$  — четное, то коэффициентъ при  $x^p$  въ разложеніи  $\psi(x)$  тотъ же, что въ разложеніи функции

$$\frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2} = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} + \frac{e^{-nx} - 1}{e^{-x} - 1} = \frac{e^{(n-\frac{1}{2})x} - e^{-(n-\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} + 1,$$

и какъ переменная часть этой функции мѣняетъ знакъ, не мѣняя значенія, при замѣнѣ въ ней  $n - \frac{1}{2}$  на  $-(n - \frac{1}{2})$ , то то же самое будетъ и со всѣми коэффициентами ея разложенія по степенямъ  $x$ .

Итакъ, доказано, что  $\varphi_p(n)$  — четная функция отъ  $n - \frac{1}{2}$  при  $p$  нечетномъ и нечетная функция при  $p$  четномъ.

§ 350. Если въ функции  $\varphi_p(n)$  сдѣлать  $n = \frac{1}{2}$ , то при  $p$  четномъ

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

а при  $p$  нечетномъ

$$\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p+1} B_{\frac{p+1}{2}}\left(\frac{2^{p+1}-1}{2^p}\right).$$

Для доказательства напомнимъ опять, что  $\varphi_p(n)$  есть произведеніе на  $1 \cdot 2 \dots p$  коэффициента при  $x^p$  въ разложеніи

$$\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1};$$

значитъ,  $\varphi_p\left(\frac{1}{2}\right)$  есть коэффициентъ при  $\frac{x^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$  въ разложеніи

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^x - 1}.$$

Имѣемъ же:

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} - 1}{e^x - 1} = \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - 1} - \frac{2}{e^x - 1},$$

но

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{\frac{x}{2}} - 1} &= \frac{2}{x} \left[ \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}} - 1} \right] = \frac{2}{x} \left[ 1 - \frac{x}{4} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right], \\ \frac{2}{e^x - 1} &= \frac{2}{x} \left[ \frac{x}{e^x - 1} \right] = \frac{2}{x} \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots \right); \end{aligned}$$

вычитая второе разложение изъ первого, составимъ разложение для  $\frac{e^x - 1}{e^x - 1}$ , и увидимъ, что коэффициентъ при  $\frac{x^p}{1 \cdot 2 \dots p}$  равенъ нулю, если  $p$  — четное, и равенъ

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{B_{\frac{p+1}{2}}}{p+1} \left( \frac{2^{p+1} - 1}{2^p} \right),$$

если  $p$  — нечетное. Это и требовалось доказать.

**§ 351.** Функціи  $\varphi_p(n)$  и  $\varphi_{p-1}(n)$  могутъ быть выведены одна изъ другой посредствомъ дифференцированія, но видъ полученнаго соотношенія будетъ различенъ для  $p$  четнаго и нечетнаго; имѣемъ двѣ слѣдующихъ формулы:

$$\frac{d\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = (2p+1)\varphi_{2p}(n),$$

$$\frac{d\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n) + (-1)^{p-1}B_p.$$

Для доказательства этихъ формулъ рассматриваемъ уравненіе

$$\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} = n + x\varphi_1(n) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi_2(n) + \dots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \dots p} \varphi_p(n) + \dots$$

Дифференцируя обѣ части по  $n$ , получаемъ:

$$\frac{xe^{nx}}{e^x - 1} = 1 + x \frac{d\varphi_1}{dn} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \frac{d\varphi_2}{dn} + \dots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \frac{d\varphi_p}{dn} + \dots;$$

съ другой же стороны имѣемъ тождество:

$$\begin{aligned} \frac{xe^{nx}}{e^x - 1} &= x \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} + \frac{x}{e^x - 1} = x \left[ n + x\varphi_1(n) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \varphi_2(n) + \dots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \dots p} \varphi_p(n) + \dots \right] + \\ &+ 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_1}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Сравнивая тождественно эти два разложенія, выражающихъ одну и ту же функцію, находимъ двѣ формулы:

$$\frac{d\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = \varphi_{2p}(n) \cdot (2p+1),$$

$$\frac{d\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n) + (-1)^{p-1}B_p.$$

§ 352. Предыдущія формулы даютъ возможность доказать слѣдующую важную теорему: Когда  $n$  измѣняется въ предѣлахъ между 0 и 1, функція  $\varphi_{2p}(n)$  мѣняетъ одинъ разъ знакъ, обращаясь въ нуль при  $n = \frac{1}{2}$ , а функція  $\varphi_{2p+1}(n)$  сохраняетъ всегда одинъ и тотъ же знакъ.

Замѣтимъ сначала, что  $\varphi_p(n)$  всегда равна нулю для предѣльныхъ значеній  $n = 0$ ,  $n = 1$ ; дѣйствительно, функція

$$\frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}$$

приводится къ единицѣ при  $n = 1$  и къ нулю при  $n = 0$ , — значитъ, коэффициенты при различныхъ членахъ ея разложенія будутъ нулями въ обоихъ случаяхъ.

Разсмотримъ теперь функцію

$$\varphi_1(n) = \frac{n(n-1)}{2};$$

при измѣненіи  $n$  отъ 0 до 1 эта функція все время остается отрицательною, и ея максимумъ, соотвѣтствующій  $n = \frac{1}{2}$ , будетъ

$$\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Далѣе разсматриваемъ

$$\varphi_2(n) = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Имѣемъ:

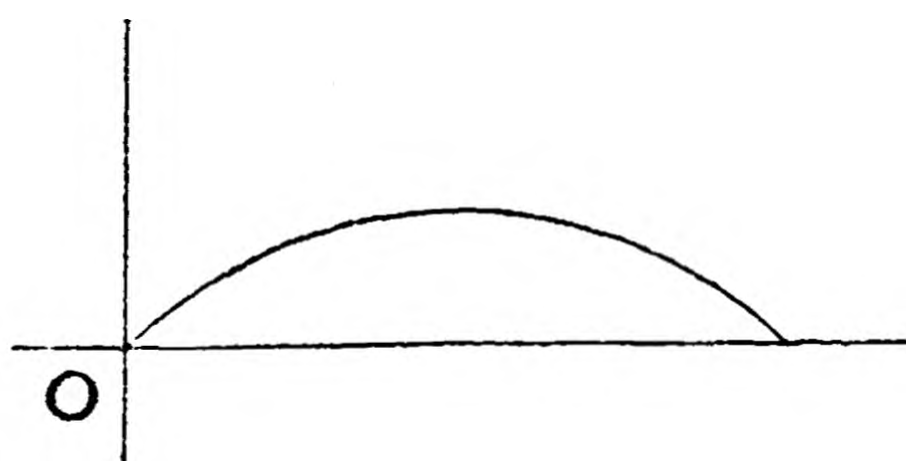
$$\frac{d\varphi_2(n)}{dn} = n^2 - n + \frac{1}{6} = 2\varphi_1(n) + B_1;$$

$\varphi_1(n)$  измѣняется отъ 0 до  $-\frac{1}{8}$  и отъ  $-\frac{1}{8}$  до 0 при измѣненіи  $n$  отъ 0 до  $\frac{1}{2}$  и отъ  $\frac{1}{2}$  до 1, а  $\frac{d\varphi_2(n)}{dn}$  проходитъ отъ  $\frac{1}{6}$  до  $\frac{1}{6} - \frac{1}{4}$ , или  $-\frac{1}{12}$ , и отъ  $-\frac{1}{12}$  до  $+\frac{1}{6}$ , — значитъ, это послѣднее выраженіе обращается два раза въ нуль только въ этомъ промежуткѣ, и, слѣдовательно,  $\varphi_2(n)$  въ томъ же промежуткѣ можетъ имѣть только три корня:  $n = 0$ ,  $n = \frac{1}{2}$ ,  $n = 1$ .

Докажемъ теперь общую теорему. Для этого допустимъ, что функція  $\varphi_{2p-1}(n)$  удовлетворяетъ высказанному условію, т.-е. что она остается всегда одного знака при измѣненіи  $n$  отъ 0 до 1 и что ея максимумъ соотвѣтствуетъ значенію  $\frac{1}{2}$ , иначе говоря, функція непрерывно возрастаетъ при измѣненіи  $n$  отъ 0 до  $\frac{1}{2}$  и затѣмъ убываетъ при дальнѣйшемъ измѣненіи  $n$  отъ  $\frac{1}{2}$  до 1, такъ что кривая, выражаемая уравненіемъ

$$y = \varphi_{2p-1}(n),$$

имѣетъ слѣдующій видъ:

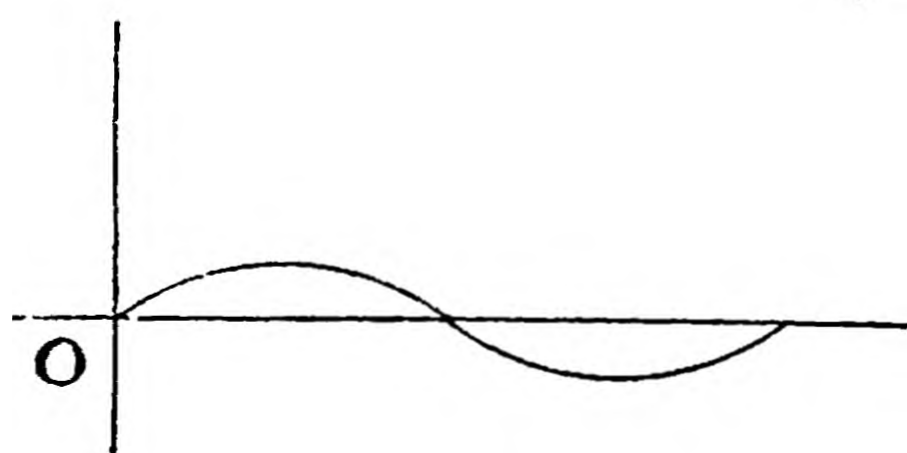


Черт. 27

Послѣ этого пишемъ:

$$\frac{d\varphi_{2p}(n)}{dn} = 2p\varphi_{2p-1}(n) + (-1)^{p-1}B_p.$$

Очевидно, что эта производная, по виду функціи  $\varphi_{2p-1}(n)$ , можетъ обращаться въ нуль только два раза между предѣлами  $n = 0$ ,  $n = 1$ , и, слѣдовательно, функція  $\varphi_{2p}(n)$ , будучи нулемъ на обоихъ предѣлахъ, не можетъ имѣть болѣе одного промежуточнаго корня; этотъ корень, какъ мы видѣли, есть  $n = \frac{1}{2}$ . Такъ какъ функція, равная нулю при  $n = 0$ ,  $n = \frac{1}{2}$  и  $n = 1$ , является при томъ нечетною (§ 349) отъ  $n - \frac{1}{2}$ , то она мѣняетъ знакъ при  $n = \frac{1}{2}$  и кривая, для которой она служитъ ординатою, имѣетъ видъ (черт. 28),



Черт. 28

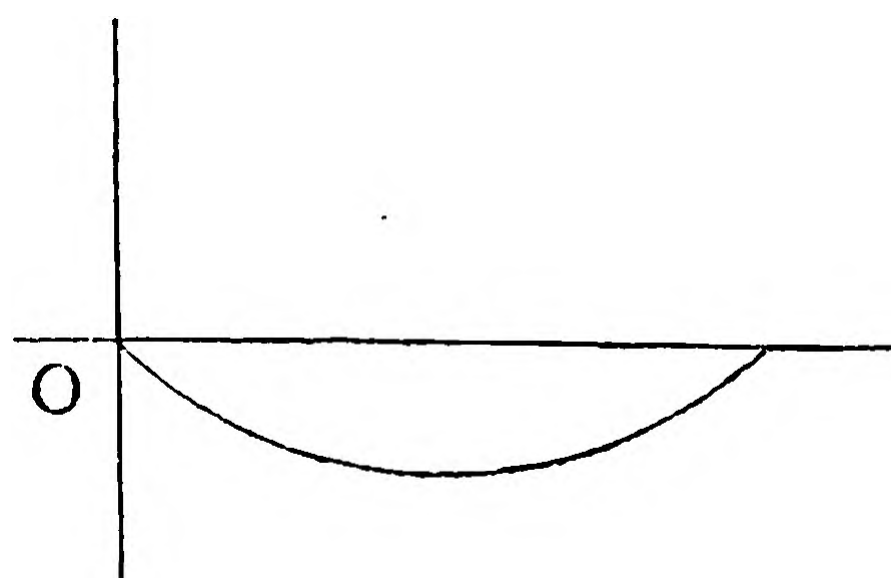
представляющей только одинъ максимумъ между  $n = 0$ ,  $n = \frac{1}{2}$  и только одинъ между  $n = \frac{1}{2}$ ,  $n = 1$ .

§ 353. Мы нашли:

$$\frac{d\varphi_{2p+1}(n)}{dn} = (2p + 1)\varphi_{2p}(n).$$

Значитъ, производная отъ функціи  $\varphi_{2p+1}(n)$  мѣняетъ знакъ только одинъ разъ при измѣненіи  $n$  отъ 0 до 1, и какъ функція обращается въ нуль на обоихъ предѣлахъ, то она сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, при чемъ измѣняется всегда въ одномъ направленіи при измѣненіи  $n$  отъ 0 до  $\frac{1}{2}$ , достигаетъ затѣмъ максимумъ'a и, наконецъ,

отъ этого послѣдняго идетъ въ обратномъ направленіи до значенія, равнаго нулю, такъ что кривая, для которой  $\varphi_{2p+1}(n)$  служитъ ординатою, имѣетъ видъ или какъ на *черт.* 27-мъ, или же слѣдующій:



*Черт.* 29

### О функціяхъ, названныхъ Лежандромъ $X_n$

§ 354. Мы вывели (§ 315) изъ формулы Лагранжа выраженіе коэффициента при  $z^n$  въ разложеніи выраженія

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Эти функціи, изучавшіяся многими геометрами, имѣютъ слишкомъ большое значеніе, и мы не можемъ ограничиться краткимъ уже сдѣланнымъ о нихъ сообщеніемъ; эту главу, посвященную разложеніямъ въ ряды, мы закончимъ указаніемъ на нѣкоторые ихъ виды и свойства, не требующія примѣненія интегральнаго исчисленія. Кромѣ того, мы снова вернемся къ ихъ изученію и не разъ воспользуемся ими на протяженіи этого труда.

Разсматриваемъ  $1 - 2xz + z^2$ , какъ биномъ

$$1 - z(2x - z),$$

и по формулѣ Ньютона пишемъ:

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} z(2x - z) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^2 (2x - z)^2 + \dots$$

Развертывая всѣ степени, находимъ для коэффициента  $X_n$  при  $z^n$ :

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right].$$

Полагая послѣдовательно  $n=0, n=1, n=2, \dots$ , будемъ имѣть слѣдующія значенія:

$$X_0 = 1,$$

$$X_1 = x,$$

$$X_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$



$$\begin{aligned}
X_3 &= \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x, \\
X_4 &= \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} x^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \\
X_5 &= \frac{7 \cdot 9}{2 \cdot 4} x^5 - \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} 2x^3 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x, \\
X_6 &= \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3x^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \\
X_7 &= \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3x^5 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} 3x^3 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} x.
\end{aligned}$$

§ 355. Теорема Лагранжа привела насъ (§ 315) къ выраженію функціи  $X_n$ , въ которое не трудно преобразовать только-что полученное.

Замѣтимъ сначала, что, каково бы ни было цѣлое число  $n$ ,

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2) \dots (n+1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

для доказательства достаточно замѣтить, что при измѣненіи  $n$  на  $n+1$  это равенство, послѣ всѣхъ упрощеній, совсѣмъ не измѣнитъ своего вида и что оно легко повѣряется для первыхъ значеній  $n$ .

Послѣ этого общій членъ выраженія  $X_n$  (§ 354) будетъ равенъ

$$\pm \frac{1}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)} \frac{2n(2n-1) \dots (n-2m+1)}{2 \cdot 4 \dots 2m (2n-1)(2n-3) \dots (2n-2m+1)} x^{n-2m},$$

что, послѣ сокращенія на общихъ множителей, даетъ:

$$\pm \frac{1}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} (2n-2m)(2n-2m-1) \dots (n-2m+1) x^{n-2m}$$

т.-е.

$$\pm \frac{1}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \frac{d^m x^{2n-2m}}{dx^m},$$

и  $X_n$  есть  $n$ -ая производная отъ

$$\frac{1}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)} \left( x^{2n} - nx^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-4} - \dots \right),$$

или, наконецъ,

$$X_n = \frac{1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

что уже было получено (§ 315); это выраженіе въ первый разъ дано О. Родригомъ

## § 356. Всѣ корни уравненія

$$X_n = 0$$

вещественны и содержатся между 0 и 1. Это очень важная теорема и доказательство ея вытекает изъ предыдущаго выраженія  $X_n$ . Дѣйствительно, мы знаемъ, что, когда уравненіе имѣетъ всѣ корни вещественные, то его производная имѣетъ также всѣ корни вещественные, содержащіеся между наибольшимъ и наименьшимъ корнемъ даннаго уравненія. Уравненіе же

$$(x^2 - 1)^n = 0$$

имѣетъ, очевидно,  $2n$  вещественныхъ корней, изъ которыхъ  $n$  равны  $-1$  и  $n$  равны  $+1$ ; поэтому послѣдовательныя производныя имѣютъ всѣ корни вещественные, содержащіеся между  $-1$  и  $+1$ , и такъ какъ  $X_n$ , если не обращать вниманія на численный множитель, есть одна изъ этихъ производныхъ, то теорема такимъ образомъ доказана.

§ 357. Мы дадимъ, наконецъ, дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ функція  $X_n$  и которое, хотя и не опредѣляетъ вполне  $X_n$ , часто однако употреблялось при изученіи свойствъ этой функціи.

Для составленія этого уравненія полагаемъ

$$u = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}};$$

дифференцируя, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{z}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{3z^2}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ \frac{du}{dz} &= \frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{d^2u}{dz^2} &= -\frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(x - z)^2}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} + z^2 \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{2z^2}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ 2x \frac{du}{dx} - 2z \frac{du}{dz} &= \frac{2z^2}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$(1 - x^2) \frac{d^2u}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + 2z \frac{du}{dz} = 0,$$

т.-е.

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{du}{dx} + \frac{d}{dz} z^2 \frac{du}{dz} = 0.$$

Если въ этомъ уравненіи замѣнить  $u$  его значеніемъ

$$u = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_n z^n + \dots,$$

то, приравнивая нулю коэффициентъ при  $z^n$ , будемъ имѣть:

$$\frac{d(1 - x^2) \frac{dX_n}{dx}}{dx} + n(n+1) X_n = 0,$$

т.-е.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 X_n}{dx^2} - 2x \frac{dX_n}{dx} + n(n+1) X_n = 0.$$

§ 358. Чтобы закончить это разсужденіе, приведемъ одно простое соотношеніе, связывающее три послѣдовательныя функціи  $X_n$ ,  $X_{n+1}$ ,  $X_{n-1}$ ; имъ часто пользовались при изученіи этихъ функцій.

По опредѣленію,

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_n z^n + \dots; \quad (1)$$

дифференцируя по  $z$ , выводимъ:

$$\frac{x - z}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} = X_1 + 2X_1 z + \dots + nX_n z^{n-1} + \dots, \quad (2)$$

и, слѣдовательно, по умноженіи обѣихъ частей на  $1 - 2xz + z^2$ ,

$$(x - z)(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 2xz + z^2)(X_1 + 2X_1 z + \dots + nX_n z^{n-1} + \dots).$$

Замѣняя въ первой части этого уравненія  $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$  его разложеніемъ и приравнивая другъ другу коэффициенты при  $z^n$  въ обѣихъ частяхъ, находимъ:

$$(n+1) X_{n+1} - (2n+1) x X_n + n X_{n-1} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя уравненіе (1) по  $x$  и сокращая обѣ части на множитель  $z$ , пишемъ:

$$\frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dX_1}{dx} + z \frac{dX_2}{dx} + \dots + z^{n-1} \frac{dX_n}{dx} + \dots \quad (4)$$

Это значеніе  $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{3}{2}}$  подставляемъ въ уравненіе (2) и приравниваемъ другъ другу коэффициенты при  $z^{n-1}$  въ обѣихъ частяхъ; получаемъ:

$$x \frac{dX_n}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = n X_n. \quad (5)$$

А такъ какъ уравненіе (4) можетъ быть написано въ видѣ:

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - 2xz + z^2) \left( \frac{dX_1}{dx} + z \frac{dX_2}{dx} + \dots + z^{n-1} \frac{dX_n}{dx} + \dots \right),$$

то, замѣняя первую часть ея разложениемъ и приравнивая другъ другу коэффициенты при  $x^n$  въ обѣихъ частяхъ, выводимъ:

$$X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - 2x \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n-1}}{dx}. \quad (6)$$

Сравненіе формулъ (5) и (6) даетъ:

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx} = (2n + 1)X_n.$$

Измѣняемъ теперь  $n$  на  $n - 2$ ,  $n - 4$ , ... и складываемъ полученные такимъ образомъ уравненія; находимъ:

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = (2n + 1)X_n + (2n - 3)X_{n-2} + (2n - 7)X_{n-4} + \dots;$$

последній членъ есть  $3X_1$  при  $n$  нечетномъ и  $5X_2$  при  $n$  четномъ.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Въ разложеніи  $(1+x)^{\frac{p}{q}}$  по степенямъ  $x$  коэффициенты отдѣльныхъ членовъ представляютъ рациональныя дроби, въ которыхъ, послѣ приведенія ихъ къ простѣйшему виду, знаменатели, будучи разложены на первоначальныхъ множителей, дадутъ исключительно дѣлителей  $q$ .

2. Въ разложеніи  $(1-x^{2n})^{\frac{1}{n}}$  всѣ коэффициенты—цѣлые.

3. Рядъ

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{4}{2} \frac{\alpha^3\beta^3}{(\alpha+\beta)^5} + \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 3} \frac{\alpha^4\beta^4}{(\alpha+\beta)^7} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\alpha^5\beta^5}{(\alpha+\beta)^9} + \dots$$

представляетъ наименьшее изъ двухъ чиселъ  $\alpha$  и  $\beta$ . Показать, что при развертываніи каждаго члена въ рядъ по степенямъ  $\frac{1}{\beta}$  данный рядъ приводится къ  $\alpha$ , а при развертываніи по степенямъ  $\frac{1}{\alpha}$  приводится къ  $\beta$ ; тотъ изъ двухъ результатовъ, который получается при помощи сходящихся рядовъ, есть единственный точный.

4. Изъ уравненія

$$y^{-\beta} - y^{-\alpha} = (\alpha - \beta)x$$

выводимъ:

$$y^m = 1 + mx + \frac{m(m+\alpha+\beta)x^2}{1 \cdot 2} + \frac{m(m+2\alpha+\beta)(m+\alpha+2\beta)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{m[m+(n-1)\alpha+\beta][m+(n-2)\alpha+2\beta] \dots [m+\alpha+(n-1)\beta]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots$$

Необходимое и достаточное условіе для сходимости этого ряда есть

$$x < \left( \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

5. Заставляя  $m$  стремиться къ нулю, можно изъ предыдущей формулы вывести:

$$ly = x + \frac{\alpha + \beta}{2} x^2 + \frac{(2\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{[(n-1)\alpha + \beta][(n-2)\alpha + 2\beta] \dots [\alpha + (n-1)\beta]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots$$

6. Доказать формулу

$$\frac{1(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots$$

7. Доказать, для всякаго  $x$  между  $-1$  и  $+1$ , тождественность двухъ рядовъ:

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^4 + \dots,$$

$$\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots,$$

стремящихся къ общему предѣлу  $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ .

8. Доказать формулу

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 \cdot 2}{x(x+1)(x+2)} +$$

$$+ \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots,$$

9. Приложить рядъ Бурмана къ разложенію  $x$  по степенямъ  $\frac{2x}{1+x^2}$ . Получится рядъ

$$x = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \dots,$$

справедливый только для значеній  $x$  между  $-1$  и  $+1$ . Если  $x$  по абсолютной величинѣ больше единицы, то вторая часть представить  $\frac{1}{x}$ .

10. Если какая-нибудь функція развѣртывается въ рядъ вида:

$$f(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + \dots,$$

то тождество

$$f\left(\frac{z}{x}\right) = f\left[z + \left(\frac{1}{x} - 1\right)z\right]$$

дастъ по разложеніи обѣихъ частей соотношеніе между  $x$  и  $\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ , изъ котораго получаемъ слѣдующее, приписываемое Эйлеру, уравненіе:



$$\begin{aligned}
& aA_0 + bA_1z + cA_2z^2 + dA_3z^3 + \dots = \\
& = A_0f(z) + \Delta A_0z \frac{df(z)}{dz} + \frac{1}{1 \cdot 2} \Delta^2 A_0z^2 \frac{d^2f(z)}{dz^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^3f(z)}{dz^3} + \dots,
\end{aligned}$$

гдѣ  $A_0, A_1, A_2, \dots$  обозначаютъ рядъ произвольно выбранныхъ чиселъ.

11. Если предположить въ предыдущей теоремѣ

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha}$$

и

$$A_n = \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+n-1)},$$

то получимъ соотношеніе

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} z^3 + \dots = \\
& = \frac{1}{(1-z)^\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma} \frac{z}{1-z} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{(1-z)^2} + \dots \right],
\end{aligned}$$

т.-е., обозначая вмѣстѣ съ Гауссомъ первую часть этого уравненія черезъ  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ ,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right).$$


---

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### Функции от мнимой переменной

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНИМОЙ ФУНКЦИИ

§ 359. Если функция  $\varphi(z)$  дана для всех вещественных значений переменной  $z$ , от которой она зависит, то она потеряет всякий смысл при замене  $z$  мнимым выражением  $x + y\sqrt{-1}$ . Нельзя, поэтому, выражение  $\varphi(x + y\sqrt{-1})$  вводить в вычисления или рассуждения без точного, для всех вещественных значений  $x$  и  $y$ , определения, по которому мы могли бы отделить вещественную часть от мнимой и написать:

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1},$$

где  $P$  и  $Q$  оба известные вещественные функции от  $x$  и  $y$ .

Однако, не следует думать, что функции  $P$  и  $Q$  могут быть выбраны произвольно; всякое выражение вида

$$P + Q\sqrt{-1},$$

где  $P$  и  $Q$  функции от  $x$  и  $y$ , не есть еще функция от  $x + y\sqrt{-1}$ ; чтобы его рассматривать, как таковую, требуется условие, без которого исчезла бы всякая аналогия между мнимыми и вещественными функциями. Чтобы сумму  $P + Q\sqrt{-1}$  можно было рассматривать как функцию от  $x + y\sqrt{-1}$ , недостаточно того, что это выражение определяется при данных  $x$  и  $y$ ; нужно еще, чтобы оно имело определенную производную и чтобы отношение бесконечно-малого его приращения к соответственному приращению  $dx + dy\sqrt{-1}$  переменной не зависело от произвольного отношения  $\frac{dy}{dx}$ . Без этого условия теория мнимых функций явилась бы просто теорией функций от двух переменных и специальное ее изучение не представило бы никакого интереса.

§ 360. Когда  $x$  и  $y$  приобретают бесконечно-малыя приращения  $dx$  и  $dy$ , то приращение  $P + Q\sqrt{-1}$  будетъ:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \sqrt{-1}\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy\right) &= \left(\frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{dx}\right)dx + \\ &+ \left(\frac{dP}{dy} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{dy}\right)dy. \end{aligned}$$

Чтобы отношение этого приращения къ  $dx + dy\sqrt{-1}$  не зависѣло отъ  $\frac{dy}{dx}$ , мы должны имѣть:

$$\frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{dx} = \frac{\frac{dP}{dy} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{dy}}{\sqrt{-1}},$$

а это уравненіе, по освобожденіи отъ знаменателей, равносильно двумъ слѣдующимъ:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}.$$

Эти два уравненія необходимы и достаточны, по нашему опредѣленію, чтобы  $P + Q\sqrt{-1}$  было бы функціею отъ  $x + y\sqrt{-1}$ ; если они удовлетворены, то

$$\frac{d(P + Q\sqrt{-1})}{d(x + y\sqrt{-1})} = \frac{dP}{dx} + \sqrt{-1}\frac{dQ}{dx} = \frac{dQ}{dy} - \sqrt{-1}\frac{dP}{dy};$$

отсюда заключаемъ, что если  $\varphi(z)$  обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ мнимой переменной  $z$ , равной  $x + y\sqrt{-1}$ , и  $\varphi'(z)$  — производную отъ  $\varphi(z)$ , то

$$\frac{d\varphi(z)}{dx} = \varphi'(z),$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dy} = \varphi'(z)\sqrt{-1}.$$

Эти уравненія могли бы быть написаны a priori, какъ слѣдствія изъ правила дифференцированія функцій отъ функцій, еслибы можно было сослаться на него до установленія существованія опредѣленной производной, независимой отъ отношенія бесконечно-малыхъ приращеній  $dx$  и  $dy$ .

§ 361. Изъ уравненій предыдущаго параграфа, связывающихъ функціи  $P$  и  $Q$ , мы можемъ исключить одну изъ нихъ и получить весьма важное уравненіе, которому другая

функція, розсмотрѣнная отдѣльно, должна удовлетворять. Дѣйствительно, продифференцировавъ первое изъ этихъ уравненій по  $x$ , а второе по  $y$ , и сложивъ ихъ, находимъ:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{d^2 P}{dy^2} = 0;$$

продифференцировавъ же первое изъ нихъ по  $y$ , а второе по  $x$ , и вычтя второе изъ перваго, имѣемъ:

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dy^2} = 0.$$

Эти условія для функцій  $P$  и  $Q$  объясняютъ, какимъ образомъ мнимая функція владѣетъ, что мы и увидимъ, многими весьма опредѣленными и независящими отъ ея опредѣленія свойствами; въ самомъ дѣлѣ, теперь понятно, что не слѣдуетъ связывать съ какою бы то ни было мнимою функціею идею неопредѣленности такой же полной, какъ съ какою бы то ни было вещественною функціею. Для каждаго значенія перемѣнной вещественная функція можетъ быть выбрана произвольно, и ограниченія для ея измѣненій могутъ вытекать только изъ закона непрерывности. Вещественная часть и коэффициентъ при  $\sqrt{-1}$  въ мнимой функціи, наоборотъ, подчинены весьма опредѣленнымъ условіямъ, выраженнымъ только-что полученными уравненіями; судя по этимъ послѣднимъ, и вещественная часть, и коэффициентъ при  $\sqrt{-1}$  представляютъ ординату далеко не произвольной поверхности, принадлежащей къ совершенно особому классу, свойства котораго, какъ хорошо извѣстно, можно изучать, не заботясь о болѣе полномъ опредѣленіи.

§ 362. Не бесполезно составить необходимыя условія, при которыхъ сумма

$$P + Q \sqrt{-1},$$

гдѣ  $P$  и  $Q$  обозначаютъ функціи отъ перемѣнныхъ  $\rho$  и  $\omega$ , была бы функціею отъ

$$\rho (\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega).$$

При измѣненіи  $\rho$  на  $\rho + d\rho$  и  $\omega$  на  $\omega + d\omega$  приращеніе  $P + Q \sqrt{-1}$  будетъ

$$\frac{dP}{d\rho} d\rho + \frac{dP}{d\omega} d\omega + \sqrt{-1} \left( \frac{dQ}{d\rho} d\rho + \frac{dQ}{d\omega} d\omega \right);$$

соотвѣтственное приращеніе перемѣнной есть

$$d\rho (\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega) + \rho d\omega (-\sin \omega + \sqrt{-1} \cos \omega).$$

Чтобы отношеніе этихъ двухъ приращеній не зависѣло отъ  $\frac{d\rho}{d\omega}$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\frac{dP}{d\rho} + \sqrt{-1} \frac{dQ}{d\rho}}{\cos\omega + \sqrt{-1} \sin\omega} = \frac{\frac{dP}{d\omega} + \sqrt{-1} \frac{dQ}{d\omega}}{\rho(-\sin\omega + \sqrt{-1} \cos\omega)};$$

умножая числителя и знаменателя первой части на  $\rho\sqrt{-1}$ , приводимъ обѣ части къ одному знаменателю; приравнивая затѣмъ другъ другу отдѣльно вещественныя части числителей и отдѣльно коэффициенты при  $\sqrt{-1}$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dP}{d\rho} &= \frac{dQ}{d\omega}, \\ \rho \frac{dQ}{d\rho} &= -\frac{dP}{d\omega}. \end{aligned}$$

Таковы, по нашимъ соглашеніямъ, необходимыя и достаточныя условія, чтобы сумма  $P + Q\sqrt{-1}$  была функціею отъ  $\rho(\cos\omega + \sqrt{-1} \sin\omega)$ .

**§ 363.** Только предыдущія условія ограничиваютъ мнимыя функціи и лишь только они выполнены, опредѣленіе остается вполне произвольнымъ. Однако, мнимая функція только тогда будетъ введена съ выгодною въ вычисленія, когда она дѣйствительно является обобщеніемъ такой вещественной функціи, къ которой она приводится при  $y=0$ , и когда она владѣетъ всѣми отличительными свойствами послѣдней. Эта аналогія, разсмотрѣнная въ § 360, какъ существенное условіе, послужитъ основаніемъ опредѣленій, которыя мы дадимъ для нѣкоторыхъ простѣйшихъ функцій.

**§ 364.** Общія свойства вещественныхъ функцій должны также прилагаться къ мнимымъ функціямъ, въ зависимости отъ чего должны выбираться и опредѣленія; если бы это условіе внесло противорѣчіе, теорія мнимыхъ функцій оказалась бы бесполезною и ее пришлось бы оставить. Это потому, напр., что выраженіе, вполне опредѣленное при данномъ значеніи переменнѣй  $x + y\sqrt{-1}$ , но не имѣющее опредѣленной производной, взятой по этой переменнѣй, не можетъ считаться функціею отъ  $x + y\sqrt{-1}$ . Нельзя, конечно, ничего возразить по существу противъ присвоенія такому выраженію этого имени, если бы это не вело по аналогіи къ неточнымъ идеямъ.

Изъ теоремъ, одинаково приложимыхъ какъ къ мнимымъ, такъ и къ вещественнымъ функціямъ, ограничимся слѣдующею:

Разность двухъ мнимыхъ функцій, имѣющихъ одну и ту же производную, постоянна.

Пусть

$$u = P + Q\sqrt{-1}, \quad u_1 = P_1 + Q_1\sqrt{-1}$$

двѣ разсматриваемыя функціи. По § 360-му, такъ какъ производныя отъ  $u$  и  $u_1$  между собою равны, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{dP_1}{dx}, & \frac{dQ}{dx} &= \frac{dQ_1}{dx}, \\ \frac{dP}{dy} &= \frac{dP_1}{dy}, & \frac{dQ}{dy} &= \frac{dQ_1}{dy}. \end{aligned}$$



Эти уравнения доказываютъ, что производныя разностей  $P - P_1$  и  $Q - Q_1$ , взятые по  $x$  и по  $y$ , равны нулю; значитъ, эти разности не зависятъ отъ  $x$  и  $y$  и, слѣдовательно, постоянны.

#### О П Р Е Д Ъ Л Е Н І Е Н Ъ К О Т О Р Ъ Х ъ П Р О С Т Ъ Х ъ Ф У Н К Ц І Й

**§ 365. Опредѣленіе  $z^m$  при  $m$  цѣломъ.**—Прежде всего замѣняемъ въ функціи  $z^m$  переменную  $z$  черезъ  $x + y\sqrt{-1}$ ; прилагая формулу бинома, которая, въ случаѣ цѣлаго показателя, вытекаетъ изъ правилъ умноженія, имѣемъ:

$$(x + y\sqrt{-1})^m = \left[ x^m - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 - \dots \right] \\ + \sqrt{-1} \left[ mx^{m-1} y - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} y^3 + \dots \right].$$

Не трудно видѣть, что это выраженіе удовлетворяетъ приведенному выше условію, и что производная отъ  $z^m$ , взятая по  $z$ , точно равна, какъ и въ случаѣ  $z$  вещественнаго,  $mz^{m-1}$ . Дѣйствительно, доказательство покоится (§ 26) единственно на разложеніи  $(z + h)^m$ , которое прилагается безъ измѣненій къ случаю  $z$  и  $h$  мнимыхъ.

То же самое заключеніе относится, очевидно, къ какой бы то ни было цѣлой функціи отъ переменной  $z$ , и всякое выраженіе вида:

$$Az^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_{m-1} z + A_m, \quad (1)$$

гдѣ  $A_1, A_2, \dots, A_m$  представляютъ постоянныя, вещественныя или мнимыя, есть функція отъ  $z$ , имѣющая производную

$$mAz^{m-1} + (m-1)A_1 z^{m-2} + \dots + A_{m-1}.$$

Если многочленъ (1) замѣненъ безконечнымъ рядомъ, то, какъ мы видѣли (§ 262), для значеній переменной, при которыхъ этотъ рядъ — сходящійся, рядъ производныхъ есть также сходящійся и представляетъ производную ряда. Слѣдовательно, мы можемъ распространить наши заключенія на сходящіеся ряды, расположенные по степенямъ переменной. Это замѣчаніе очень важно и даетъ возможность, когда вещественная функція развертывается въ сходящійся рядъ, распространить опредѣленіе на случай мнимой переменной, что мы покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ.

**§ 366. Опредѣленіе  $e^z$ .**—Функція  $e^z$  при  $z$  вещественномъ представляетъ всегда сходящійся рядъ

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots \quad (1)$$

Замѣняя  $z$  черезъ  $x + y\sqrt{-1}$ , составляемъ выраженіе

$$1 + (x + y\sqrt{-1}) + \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

которое и примемъ за опредѣленіе  $e^{x+y\sqrt{-1}}$ . Не трудно найти сумму этого ряда и отдѣлить вещественную часть отъ мнимой. Въ самомъ дѣлѣ, развертывая степени  $(x+y\sqrt{-1})$ , входящія въ различные члены ряда, и соединяя въ этихъ разложеніяхъ коэффициенты при  $\frac{x^p}{1.2.3\dots p}$ , находимъ:

$$\frac{x^p}{1.2.3\dots p} \left[ 1 + y\sqrt{-1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \dots + \frac{(y\sqrt{-1})^n}{1.2\dots n} + \dots \right].$$

Вещественная часть есть

$$\frac{x^p}{1.2.3\dots p} \left( 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \dots \right) = \frac{x^p}{1.2.3\dots p} \cos y,$$

а мнимая

$$\frac{x^p \sqrt{-1}}{1.2.3\dots p} \left( y - \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \dots \right) = \frac{x^p}{1.2.3\dots p} \sqrt{-1} \sin y;$$

слѣдовательно, членъ съ  $x^p$  будетъ

$$\frac{x^p}{1.2.3\dots p} (\cos y + \sqrt{-1} \sin y),$$

и рядъ (1) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) \left( 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^p}{1.2.3\dots p} + \dots \right) = \\ = e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y); \end{aligned}$$

итакъ, окончательно имѣемъ:

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y). \quad (2)$$

Можно замѣтить, что хотя въ предыдущемъ доказательствѣ члены разсматриваемаго ряда переставлены, но такъ какъ ихъ модули образуютъ сходящійся рядъ, то это не имѣетъ никакого значенія.

**§ 367.** По самому опредѣленію функція  $e^z$  выражается какъ для вещественныхъ, такъ и для мнимыхъ значеній  $z$  однимъ и тѣмъ же рядомъ, — то же, слѣдовательно, будетъ и для производныхъ въ обоихъ случаяхъ, иначе говоря, уравненіе

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \quad (1)$$

справедливо какъ для вещественныхъ, такъ и для мнимыхъ значеній  $z$ . Кромѣ того, не трудно убѣдиться прямо, что выраженіе

$$e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y)$$

удовлетворяет даннымъ условіямъ (§ 359) и равно своей производной. Также можно повѣрить формулу

$$e^z \cdot e^u = e^{z+u}, \quad (2)$$

имѣющую мѣсто для всякихъ значеній показателей  $z$  и  $u$ . Впрочемъ, неожиданности въ успѣхѣ этой повѣрки и не можетъ быть никакой. Въ самомъ дѣлѣ,  $e^z$  и  $e^u$  представлены такими рядами, что уравненіе (2) является тождествомъ для вещественныхъ значеній переменнѣй,—значить, нѣтъ ничего удивительнаго, если это уравненіе остается справедливымъ и въ томъ случаѣ, когда  $x$  замѣняется какимъ-угодно мнимымъ выраженіемъ.

Полагая  $x = 0$ , имѣемъ:

$$e^{y\sqrt{-1}} = \cos y + \sqrt{-1} \sin y,$$

а измѣняя  $y$  на  $-y$ , пишемъ:

$$e^{-y\sqrt{-1}} = \cos y - \sqrt{-1} \sin y;$$

изъ этихъ формулъ выводимъ:

$$\cos y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

§ 368. Опредѣленія  $\sin z$  и  $\cos z$ .—Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  выражаются при вещественномъ  $z$  всегда сходящимися рядами:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

Замѣняя  $z$  черезъ  $x + y\sqrt{-1}$ , находимъ два ряда, также всегда сходящіеся, которые мы примемъ за опредѣленія  $\sin(x + y\sqrt{-1})$  и  $\cos(x + y\sqrt{-1})$ . Изъ опредѣленій  $e^z$ ,  $\sin z$  и  $\cos z$  непосредственно вытекаетъ, что для всякихъ значеній  $z$ , вещественныхъ или мнимыхъ,

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1} \sin z,$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1} \sin z,$$

и, слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Эти формулы даютъ возможность вычислить, не прибѣгая къ рядамъ, какъ вещественную, такъ и мнимую часть какого-угодно синуса или косинуса. Имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x + y\sqrt{-1}) &= \frac{e^{x\sqrt{-1}-y} + e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2} = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \sqrt{-1} \sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \\ \sin(x + y\sqrt{-1}) &= \frac{e^{x\sqrt{-1}-y} - e^{-x\sqrt{-1}+y}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} + \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При  $x=0$  эти формулы будутъ:

$$\begin{aligned} \cos y \sqrt{-1} &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \\ \sin y \sqrt{-1} &= \frac{e^{-y} - e^y}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

отсюда заключаемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x + y\sqrt{-1}) &= \cos x \cos y \sqrt{-1} - \sin x \sin y \sqrt{-1}, \\ \sin(x + y\sqrt{-1}) &= \sin x \cos y \sqrt{-1} + \cos x \sin y \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Объ эти формулы, впрочемъ, только частные случаи формулъ болѣе общихъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(u + v) &= \cos u \cos v - \sin u \sin v, \\ \sin(u + v) &= \sin u \cos v + \sin v \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

имѣющихъ мѣсто для значеній  $u$  и  $v$ , вещественныхъ или мнимыхъ. Можно также повѣрить формулу

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad (5)$$

которая вытекаетъ изъ уравненій (1) и которая, въ соединеніи съ уравненіями (4), даетъ возможность распространить главныя формулы тригонометріи на случай мнимыхъ переменныхъ.

Видъ рядовъ, представляющихъ  $\sin z$  и  $\cos z$ , показываетъ, наконецъ, что, какъ для вещественныхъ, такъ и для мнимыхъ значеній  $z$  существуютъ равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin z}{dz} &= \cos z, \\ \frac{d \cos z}{dz} &= -\sin z, \end{aligned}$$

§ 369. Опредѣленіе  $\operatorname{tang} z$ . — Такъ какъ функція  $\operatorname{tang} z$  не развѣртывается въ рядъ при всякомъ вещественномъ значеніи  $z$ , то она не можетъ при  $z$  мнимомъ опредѣляться тѣмъ рядомъ, который ее представляетъ. За опредѣленіе примемъ

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

и, слѣдовательно,

$$\operatorname{tang} z = \frac{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}} \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \left( 1 + \frac{2}{1 + 2e^{-2z\sqrt{-1}}} \right);$$

примемъ также

$$\cot z = \frac{1}{\operatorname{tang} z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{e^{-z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}} \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \left( 1 - \frac{2}{1 - e^{-2z\sqrt{-1}}} \right).$$

Формулы

$$\frac{d \operatorname{tang} z}{dz} = \frac{1}{\cos^2 z},$$

$$\frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

приложимы къ какимъ-угодно значеніямъ  $z$ . Въ самомъ дѣлѣ, правило дифференцированія дробей, примѣненное къ  $\frac{\sin z}{\cos z}$  и къ  $\frac{\cos z}{\sin z}$ , дастъ одинаковые результаты какъ въ случаѣ вещественнаго, такъ и мнимаго  $z$ ; значитъ, и дальнѣйшія упрощенія будутъ одинаковы въ обоихъ случаяхъ.

§ 370. Опредѣленіе  $\lg z$ . — Когда  $z$  и  $u$  связаны уравненіемъ

$$z = e^u, \quad (1)$$

то говорятъ, что  $u$  есть неперовъ логарифмъ  $z$ , и пишутъ:

$$u = \lg z; \quad (2)$$

такъ какъ  $z$  является функціею отъ  $u$ , то  $u$  будетъ функціею отъ  $z$ . Въ самомъ дѣлѣ, чтобы это было такъ, необходимо, по нашему опредѣленію, чтобы отношеніе  $\frac{du}{dz}$  было опредѣленнымъ; это же послѣднее условіе непремѣнно выполняется, потому что  $\frac{dz}{du}$  — опредѣленное отношеніе.

Предполагая  $z = x + y \sqrt{-1}$ , мы легко выводимъ и вещественную, и мнимую часть  $\lg z$  изъ предыдущаго опредѣленія.

Пусть  $\lg z = p + q \sqrt{-1}$ , мы должны имѣть:

$$x + y \sqrt{-1} = e^{p+q\sqrt{-1}} = e^p (\cos q + \sqrt{-1} \sin q), \quad (3)$$



а это уравнение равносильно двумъ слѣдующимъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= e^p \cos q, \\ y &= e^p \sin q, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

откуда

$$e^{2p} = x^2 + y^2, \quad \text{tang } q = \frac{y}{x}, \quad (5)$$

и, слѣдовательно,

$$p = \frac{1}{2} \text{l}(x^2 + y^2), \quad (6)$$

$$q = \text{arctang } \frac{y}{x}; \quad (7)$$

понятно, что  $\text{l}(x^2 + y^2)$  есть обыкновенный неперовъ логарифмъ вещественнаго и положительнаго числа  $x^2 + y^2$ ;  $\text{arctang } \frac{y}{x}$  представляетъ безчисленное множество дугъ. Пусть  $\alpha$  наименьшая изъ нихъ; слѣдуетъ замѣтить, что такъ какъ  $q$  опредѣляется своимъ синусомъ и косинусомъ, то къ  $\alpha$  можно прибавить кратное  $2\pi$ , но не какое-угодно кратное  $\pi$ , какъ въ томъ случаѣ, если бы мы приняли во вниманіе только уравненіе (7); итакъ, окончательно имѣемъ:

$$\text{l}(x + y\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \text{l}(x^2 + y^2) + \sqrt{-1}(\alpha + 2k\pi),$$

гдѣ  $\alpha$  наименьшая изъ дугъ, тангенсъ которой есть  $\frac{y}{x}$  и  $k$  — произвольное цѣлое число.

Уравненіе

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = \cos 2\pi + \sqrt{-1} \sin 2\pi = 1,$$

между прочимъ, показываетъ à priori, что можно прибавить къ показателю  $e$  какое-угодно кратное  $2\pi\sqrt{-1}$ , не измѣняя значенія показательной мнимой величины, и, слѣдовательно, къ логарифму также можно прибавить какое-угодно кратное  $2\pi\sqrt{-1}$ .

### § 371. Уравненіе

$$z = e^u,$$

по опредѣленію, есть слѣдствіе

$$u = \text{l}z;$$

имѣемъ:

$$\frac{dz}{du} = z$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{du}{dz} = \frac{dlz}{dz} = \frac{1}{z},$$

что легко вывести непосредственно по значенію  $lz$ .

**§ 372. Опредѣленіе  $z^m$  при какомъ-угодно значеніи  $m$ .**—Если положить  $z = x + y\sqrt{-1}$ , то, по предыдущему,

$$z = e^{p+q\sqrt{-1}}, \quad (1)$$

гдѣ  $p$  и  $q$  значенія, найденныя въ § 370-мъ. Такимъ образомъ выраженіе  $z^m$  равносильно

$$(e^{p+q\sqrt{-1}})^m. \quad (2)$$

Чтобы возвысить показательную мнимую величину въ степень  $m$ , примемъ за опредѣленіе, что нужно умножить показателя на  $m$ , и, значить, положимъ

$$z^m = e^{mp+mq\sqrt{-1}}, \quad (3)$$

при чемъ  $q$  заключаетъ въ своемъ выраженіи произвольное кратное  $2\pi$ , которое, не вліяя на значеніе выраженія (1), измѣняетъ, наоборотъ, послѣ умноженія  $q$  на  $m$ , значеніе показательной величины (3); поэтому  $z^m$  есть недостаточно опредѣленная функція отъ  $z$ .

Если показатель  $m$  — вещественный и равенъ  $\frac{h}{g}$ , гдѣ  $h$  и  $g$  — цѣлыя, то

$$\frac{h}{g} = e^{\frac{hp}{g} + \frac{hq}{g}\sqrt{-1}} = e^{\frac{hp}{g}} \left( \cos \frac{hq}{g} + \sqrt{-1} \sin \frac{hq}{g} \right),$$

и если въ этомъ выраженіи замѣнить, какъ мы это допустили,  $q$  на  $q + 2k\pi$ , то оно приметъ ровно столько различныхъ значеній, какъ великъ знаменатель  $g$ .

Если показатель  $m$  — мнимый и равенъ  $r(\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega)$ , то, полагая

$$p + q\sqrt{-1} = \rho(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

будемъ имѣть:

$$z^m = e^{rp[\cos(\varphi + \omega) + \sqrt{-1} \sin(\varphi + \omega)]} = e^{rp \cos(\varphi + \omega)} \{ \cos[rp \sin(\varphi + \omega)] + \sqrt{-1} \sin[rp \sin(\varphi + \omega)] \};$$

это выражение даетъ для  $z^m$  безчисленное множество различныхъ значеній, потому что входящій сюда уголъ  $\varphi$  зависитъ отъ выраженія  $p + q\sqrt{-1}$ , въ которомъ можно прибавить къ  $q$  какое-угодно кратное  $2\pi$ .

#### О ФУНКЦІЯХЪ НЕДОСТАТОЧНО ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ

§ 373. Среди только-что разсмотрѣнныхъ функцій слѣдуетъ особенно отмѣтить  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\tan z$  и  $z^m$  при  $m$  цѣломъ, какъ функціи вполне опредѣленныя; при всякомъ значеніи  $z$ , вещественномъ или мнимомъ, каждая изъ нихъ пріобрѣтаетъ одно опредѣленное значеніе. Наоборотъ, функціи  $\lg z$ ,  $z^m$  при  $m$  нецѣломъ пріобрѣтаютъ при всякомъ значеніи  $z$  по много различныхъ значеній, одинаково удовлетворяющихъ ихъ опредѣленію. Однако важно въ большинствѣ случаевъ сумѣть выдѣлить требуемое значеніе; по этому поводу мы дадимъ нѣкоторыя разъясненія.

Пусть дана недостаточно опредѣленная функція. Разсматривая отдѣльныя значенія  $x$  и  $y$ , можно принять безразлично какое-либо одно изъ ея выраженій; но разъ выборъ сдѣланъ, то при дальнѣйшемъ измѣненіи значеній  $x$  и  $y$ , начиная съ первоначально разсмотрѣнныхъ, послѣдовательныя значенія функціи, предполагаемой непрерывною, будутъ, вообще говоря, опредѣленными, и не представится болѣе случаевъ по нѣскольку значеній одновременно.

Пусть, напр., функція  $\varphi(x + y\sqrt{-1})$ , каково бы ни было ея опредѣленіе, допускаетъ для данныхъ значеній  $x$  и  $y$  нѣкоторую неопредѣленность, т.-е. возможность выбора между нѣсколькими различными значеніями; въ нѣкоторыхъ случаяхъ, напр., когда  $\varphi(x + y\sqrt{-1}) = l(x + y\sqrt{-1})$ , число такихъ значеній бесконечно-огромно.

Приписываемъ  $x$  и  $y$  начальные значенія  $x_0$ ,  $y_0$  и выбираемъ произвольно изъ всѣхъ значеній, подходящихъ подъ опредѣленіе данной функціи, какое-нибудь одно для составленія выраженія  $\varphi(x_0 + y_0\sqrt{-1})$ . Далѣе, заставляемъ измѣняться  $x$  и  $y$  непрерывно по такому закону, чтобы точка, координаты которой  $x$  и  $y$ , описывала на плоскости произвольную кривую, начинающуюся въ точкѣ, координаты которой  $x_0$ ,  $y_0$ ; при условіи бесконечно-малаго измѣненія функціи, когда сама переменная измѣняется тоже бесконечно-мало, исчезаетъ всякая неопредѣленность, и должно принять для функціи, въ каждой точкѣ, значеніе, вообще говоря, единственное, которое, удовлетворяя опредѣленію, бесконечно-мало отличалось бы отъ значенія, соотвѣтствующаго бесконечно-близкой предшествующей точкѣ. Одно только будетъ исключеніе въ томъ случаѣ, когда для одной изъ разсматриваемыхъ точекъ два значенія функціи явятся совершенно равными между собою. Если законъ непрерывности приводитъ къ принятію этихъ значеній, то, слѣдуя по кривой, представляющей законъ измѣненія  $x$  и  $y$ , мы окажемся для точки, бесконечно-близкой къ той, о которой идетъ рѣчь, предъ лицомъ двухъ значеній, бесконечно-мало отличающихся одно отъ другого, которыя оба могутъ быть приняты, такъ какъ оба удовлетворяютъ закону непрерывности, принятому за критеріумъ; эти значенія далѣе разойдутся и пріобрѣтутъ конечную разность, такъ что вновь настанетъ неопредѣленность функціи для всѣхъ точекъ, расположенныхъ за этою критическою точкою, гдѣ она впервые обнаружилась.

Изъ опредѣленія функціи  $\sqrt{x + y\sqrt{-1}}$  видно, что она пріобрѣтаетъ по два значенія равныхъ, но противоположныхъ по знаку. Эти значенія совпадаютъ при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; значитъ, для этой функціи черезъ начало координатъ не должна проходить кривая значеній  $x$  и  $y$ .

Для функции  $l(1 + x + y\sqrt{-1})$  критическая точка соответствует значениям  $y = 0$ ,  $x = -1$ , для которых все значения логарифма обращаются в бесконечность.

§ 374. Для точного определения одного из значений функции  $\varphi(x + y\sqrt{-1})$  нет никакой надобности знать кривую, которая соединяет точку, соответствующую данным значениям  $x$  и  $y$ , с тою произвольною точкою, для которой мы делали выбор вначале. Действительно, так как возможные значения функции не составляют непрерывного ряда, вид же кривой изменяется, по предположению, постепенно, непрерывным движением, то функция неизбежно должна оставаться неизменною до того момента, когда наступает внезапно резкое изменение, сообщаемое ей новое значение и заставляющее ее приобрести сразу конечное приращение. Так, напр., если функция  $l(x + y\sqrt{-1})$  изменяется, при данных значениях  $x$  и  $y$ , то она не иначе может возрасти, как только на кратное  $2\pi\sqrt{-1}$ . Подобные же резкие изменения, как мы сейчас покажем, возможны только тогда, когда кривая, теряя свой вид, переходит через одну из точек, соответствующих равным, бесконечным или неопределенным значениям функции.

В самом деле, рассмотрим начальную точку  $A$ , имеющую координатами  $x_0, y_0$ , и пусть будет задана точка  $B$  координатами  $x_1, y_1$ ; предположим, что подвижная точка  $M$  отправляется из  $A$  в  $B$  по некоторой кривой; если в  $A$  мы для функции имеем значение  $\varphi(x_0 + y_0\sqrt{-1})$ , то в  $B$  мы для той же функции должны принять, вследствие ее непрерывности, значение  $\varphi(x_1 + y_1\sqrt{-1})$ , при чем  $x$  и  $y$  принимают в последовательном порядке значения, равные переменным координатам подвижной точки  $M$ . Предположим далее, что мы переходим из точки  $A$  в точку  $B$  по некоторой другой кривой, бесконечно-мало отличающейся от первой, и притом такой, что между ею и предыдущей не содержится ни одной из тех точек, о которых мы говорили выше; принимая для  $\varphi(x_0 + y_0\sqrt{-1})$  то же значение, что и в предыдущем случае, мы найдем также и для  $\varphi(x_1 + y_1\sqrt{-1})$  прежнее значение. Действительно, обе подвижные точки  $M$  и  $M'$ , пробегая по нашим кривым, отправляются одновременно из  $A$ , чтобы прийти одновременно в  $B$ , и притом по такому закону, что расстояние между ними все время остается бесконечно-малым. Когда точка  $M$  пробегает по первой кривой, то значения, принимаемые последовательно функцией, определяются тем непрерывным условием, что они должны составлять непрерывный ряд; для каждой же точки в отдельности представляется на выбор, по определению самой функции, много различных значений, всегда, по предположению, неравных между собою. Пусть  $\Delta$  обозначает число, меньшее наименьшего из модулей разностей между двумя возможными значениями функций в какой-нибудь точке этой кривой; ясно, что для двух бесконечно-близких точек, из которых одна расположена на кривой, модуль разности между двумя значениями  $\varphi$ , совместимыми с определением функции, будет тоже превышать  $\Delta$ , если только он не бесконечно-мал. В начальной точке, координаты которой  $x_0, y_0$ , значение функции было выбрано, и когда подвижные точки, исходя из этой начальной, пробегают одновременно обе кривые, начальная разность между значениями функции равна нулю и имеет модуль нуль. По выше приведенному условию этот модуль должен быть постоянно или бесконечно-малым, или больше  $\Delta$ , а так как, чтобы стать больше  $\Delta$ , он должен был бы сразу резко изменить свою величину, то, значит, он должен все время оставаться бесконечно-малым. Итак, когда обе точки

придутъ вмѣстѣ въ  $B$ , соотвѣтственные значенія  $\varphi$  будутъ различаться между собою на бесконечно-малую величину, что неизбѣжно приводитъ къ ихъ полному равенству, потому что всѣ возможные значенія функціи въ точкѣ  $B$  по предположенію различны и ихъ разности имѣютъ конечные модули.

Если бы эти двѣ кривыя содержали между собою одну изъ точекъ, для которыхъ два значенія  $\varphi$  являются равными, то количество  $\Delta$  было бы бесконечно-малымъ, и предыдущее разсужденіе утратило бы свою силу. Слѣдовательно, значеніе функціи  $\varphi$ , относящееся къ точкѣ  $B$ , можетъ измѣниться при одномъ и томъ же начальномъ значеніи, соотвѣтствующемъ точкѣ  $A$ , когда кривая, соединяющая обѣ эти точки и представляющая промежуточные значенія переменнѣй, проходитъ, бесконечно-мало отступая отъ своего вида, черезъ одну изъ точекъ, для которыхъ два значенія функціи  $\varphi$  являются равными между собою.

§ 375. Чтобы пояснить вышеизложенное примѣромъ, рассмотримъ функцію

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = \sqrt{x + y\sqrt{-1}},$$

которая можетъ имѣть, для каждой точки, по два значенія равныхъ, но съ противоположными знаками. Пусть, для  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,

$$\varphi(x + y\sqrt{-1}) = +1.$$

Такое допущеніе опредѣляетъ функцію для какихъ-угодно  $x$  и  $y$ , связанныхъ, по предположенію, съ начальными значеніями  $x = 1$ ,  $y = 0$  непрерывнымъ рядомъ промежуточныхъ, не заключающимъ въ себѣ  $x = 0$ ,  $y = 0$ , для которыхъ оба значенія функціи обращаются въ нуль и, слѣдовательно, равны между собою. Пусть подвижная точка отправляется изъ точки  $A$ , координаты которой  $x = 1$ ,  $y = 0$ , и, описывая непрерывную кривую, возвращается снова въ ту же точку; приписывая  $x$  и  $y$  значенія, соотвѣтствующія координатамъ точекъ этой кривой, и возвращаясь къ начальнымъ значеніямъ  $x_0$ ,  $y_0$ , увидимъ, что функція приметъ также свое начальное значеніе, если кривая не содержитъ внутри себя начала координатъ; въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ можно кривую, сохраняя тѣ же оба ея конца, сходящіеся въ  $A$ , привести къ нулю посредствомъ непрерывнаго видоизмѣненія, при чемъ она ни разу не пройдетъ черезъ вышеупомянутую критическую точку и, значитъ, конечное значеніе  $\varphi$  останется безъ измѣненія. Другое совсѣмъ дѣло, если начало расположено внутри кривой. Предположимъ, напр., что перемѣщеніе, начиная отъ точки, координаты которой  $x = 1$ ,  $y = 0$ , происходитъ по кругу, описанному изъ начала, какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, и пусть  $\varphi$  обозначаетъ центральный уголъ, отсчитываемый по этому кругу отъ начальной точки въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки; тогда

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1} \sin\varphi,$$

$$\sqrt{x + y\sqrt{-1}} = \pm \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Когда  $\varphi$  равно нулю, мы принимаемъ, по соглашенію, значеніе  $+1$  и, слѣдовательно, знакъ  $+$  передъ скобками. Съ этого момента по закону непрерывности мы всегда



должны брать знак  $+$ ; действительно, такъ какъ выраженіе въ скобкахъ въ нуль никогда не обращается, то измѣненіе знака  $+$  на  $-$  повлекло бы за собою сразу рѣзкое измѣненіе въ значеніи функціи. Итакъ, когда послѣ цѣлаго оборота по кругу имѣемъ  $\varphi = 2\pi$ ,

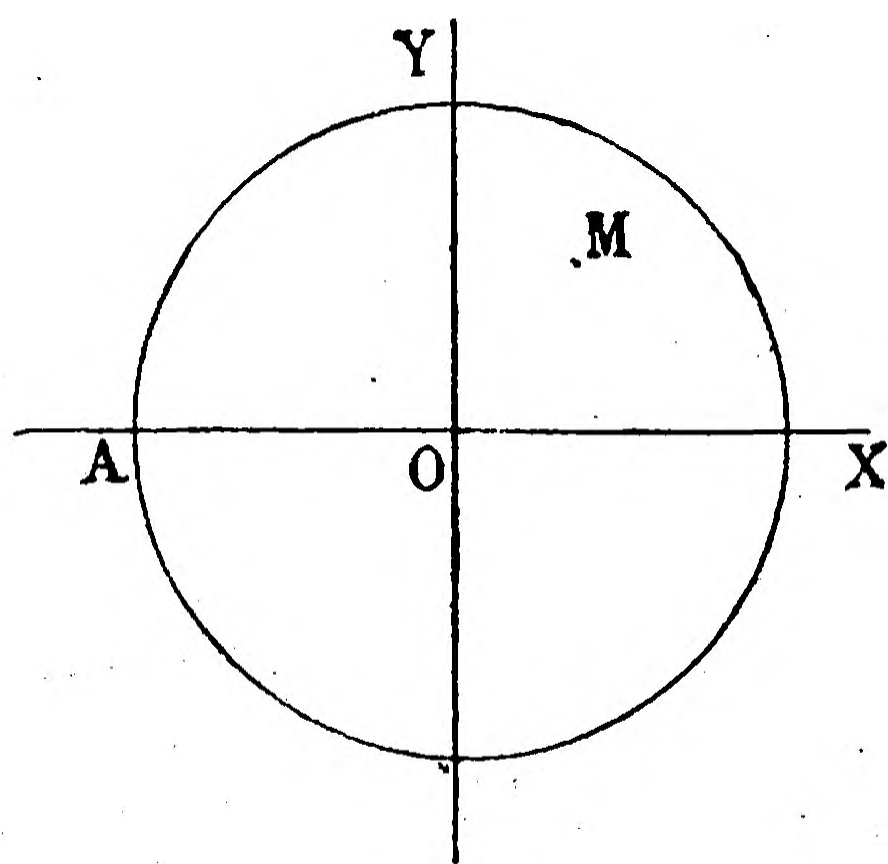
$$\sqrt{\cos 2\pi + \sqrt{-1} \sin 2\pi} = \sqrt{1} = +(\cos \pi + \sqrt{-1} \sin \pi) = -1.$$

Отсюда видно, что хотя мы и возвратились въ точку отправленія, однако функція не вернулась къ своему прежнему значенію  $+1$ . Значитъ,  $z^{\frac{1}{2}}$  — *существенно* неопредѣленная функція. Когда, посредствомъ произвольнаго выбора, мы удаляемъ одно изъ значеній, соотвѣствующихъ данному  $z$ , оно вновь появляется, какъ слѣдствіе изъ закона непрерывности.

### § 376. Разсмотримъ еще функцію

$$u = (1 + z)^m,$$

гдѣ  $m$  обозначаетъ какое-угодно положительное или отрицательное число. Когда  $x$  и  $y$  даны, эта функція принимаетъ различныя значенія, которыя всѣ при  $x = -1$ ,  $y = 0$  обращаются въ нуль или безконечность, смотря по знаку числа  $m$ . Примемъ теперь, при данныхъ значеніяхъ  $x$  и  $y$ , опредѣленное значеніе для  $u$ ; выбираемъ, напр., для  $u$ , при  $x = 0$ ,  $y = 0$ , значеніе, равное 1 и затѣмъ измѣняемъ  $x$  и  $y$  непрерывно, до тѣхъ поръ пока не получимъ  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ . Послѣдовательныя значенія  $u$  будутъ вполне опредѣленныя, не исключая крайняго, которое останется безъ измѣненія, если кривая послѣдовательныхъ значеній  $x$  и  $y$  видоизмѣняется, сохраняя тѣ же конечныя точки и ни разу не переходя черезъ точку, соотвѣтствующую  $x = -1$ ,  $y = 0$ . Это условіе неизбежно выполняется, пока модуль  $z$  остается меньше единицы: всѣ соотвѣтственныя точки попадутъ въ этомъ случаѣ внутрь круга, описаннаго изъ начала, какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, и тѣ кривыя, которыя онѣ опишутъ, никогда не пройдутъ черезъ критическую точку, расположенную на контурѣ этого круга. Итакъ, при этомъ соглашеніи каждой точкѣ внутри круга будетъ отвѣчать одно опредѣленное и легко вычисляемое значеніе  $u$ .



Черт. 30

Пусть будутъ (черт. 30):  $O$  — начало координатъ, соотвѣтствующее  $z = 0$ ,  $A$  — критическая точка, соотвѣтствующая  $z = -1$ , и  $M$  — произвольная точка внутри круга,

соотвѣтствующая  $z = x + y\sqrt{-1}$ . Предположимъ, что подвижная точка, отправляясь изъ  $O$ , приходитъ въ  $M$ , не выходя изъ круга радіуса, равнаго единицѣ; требуется найти то изъ значеній  $u$ , отвѣчающихъ крайней точкѣ  $M$ , которое связано непрерывнымъ рядомъ промежуточныхъ значеній этой функціи съ ея начальнымъ,  $u=1$ , принятымъ для точки  $O$ . Положимъ

$$1 + x + y\sqrt{-1} = \rho'(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$$

и примемъ  $\rho'$  и  $\omega$  за полярныя координаты точки  $M$ ; въ такомъ случаѣ полюсъ мы должны помѣстить въ точкѣ  $A$ , а за ось принять  $OX$ , при чемъ уголъ  $\omega$ , разумѣется, мы можемъ увеличивать или уменьшать на кратное  $2\pi$ . Будемъ имѣть:

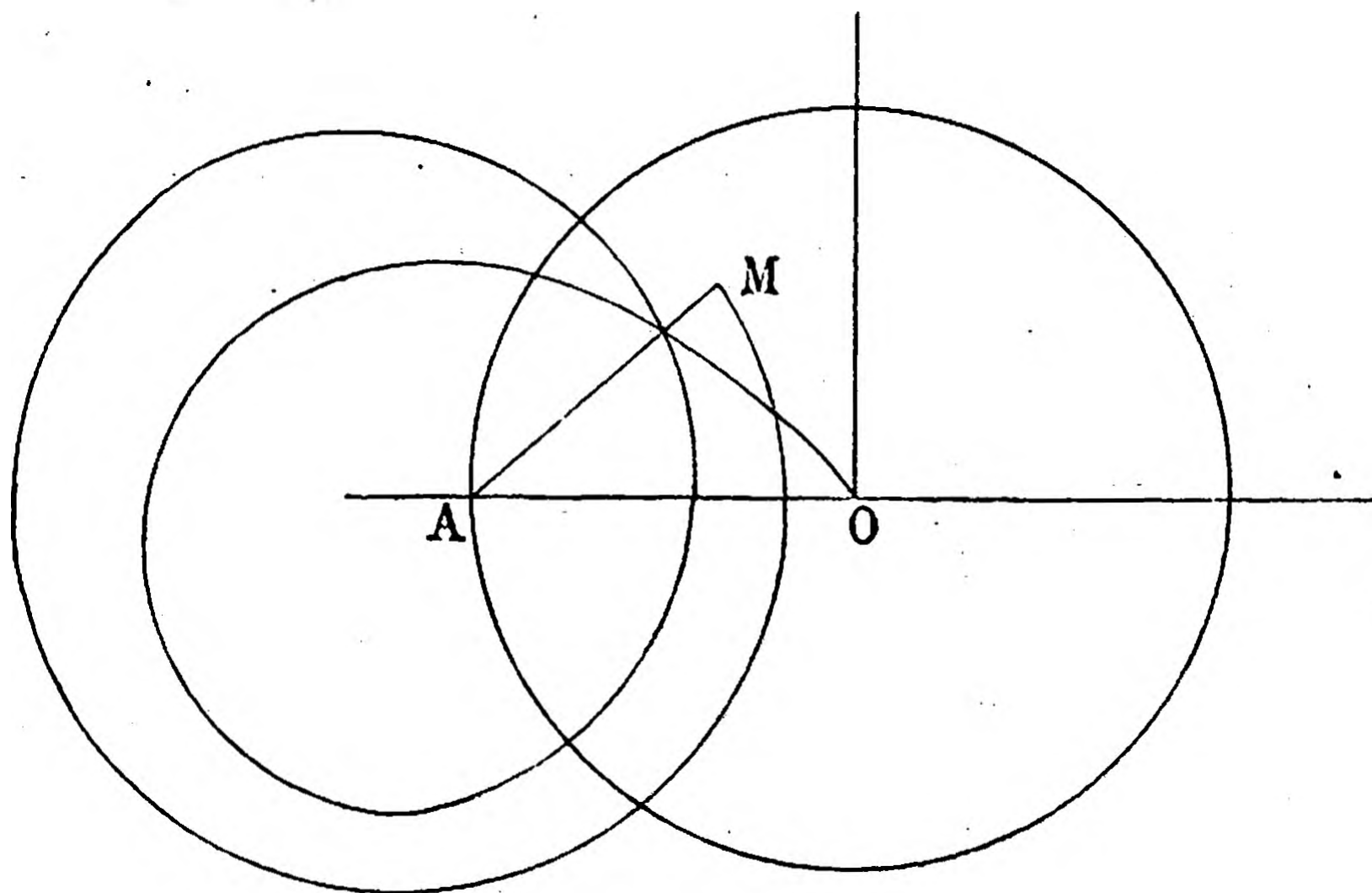
$$u = \rho'^m(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)^m = \rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega);$$

остается рѣшить, какія значенія, въ этомъ выраженіи, должны получать уголъ  $\omega$ . По соглашенію, при  $z = 0$  имѣемъ  $u = 1$ ; слѣдовательно, должно принять  $\varphi' = 1$ ,  $\omega = 0$ . Далѣе, когда  $z$  измѣняется непрерывно,  $\rho'$  и  $\omega$  измѣняются также непрерывно, и очевидно, что, такъ какъ  $M$  не выходитъ за кругъ, описанный изъ точки  $O$ , какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, то  $\omega$  остается въ предѣлахъ между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ , что устраняетъ всякую неопредѣленность.

Если же точка, которой отвѣчаетъ значеніе  $z$ , движется свободно по плоскости, то соотвѣтственное значеніе  $\omega$ , измѣняясь по правиламъ непрерывности, уже болѣе не обязано заключаться между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ ; выбирая для  $u$  попережнему значеніе  $+1$ , соотвѣтствующее начальному значенію  $z = 0$ , мы должны для всѣхъ значеній  $z$ , не исключая даже  $z = 0$ , какъ конечнаго, принимать  $u$  за функцію неопредѣленную. Въ самомъ дѣлѣ, въ выраженіи

$$(1 + z)^m = \rho'^m(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega)$$

$\omega = 0$  отвѣчаетъ, по соглашенію, начальному значенію  $z = 0$ ; далѣе, замѣчаемъ, что  $\omega$  представляетъ уголъ, составляемый радіусомъ-векторомъ  $AM$  съ осью  $AO$ , при вращеніи



Черт. 31

точки, взятой на плоскости и соотвѣтствующей значенію  $z$ , вокругъ точки  $A$ ; отсюда ясно, что  $\omega$  при каждомъ оборотѣ будетъ получать приращеніе, равное  $2\pi$ . Если, напр.,

точка при переходѣ изъ  $O$  въ  $M$  движется такъ, какъ представлено на *черт.* 31-мъ, то по закону непрерывности  $\omega$  мы должны принять равнымъ углу  $MAO$ , увеличенному на  $4\pi$ ; въ такомъ случаѣ, полагая  $MAO = \alpha$ , будемъ имѣть:

$$u = (1 + z)^m = \rho'^m [\cos (m\alpha + 4m\pi) + \sqrt{-1} \sin (m\alpha + 4m\pi)].$$

Если подвижная точка возвращается въ  $O$  послѣ одного оборота вокругъ  $A$ , то

$$u = \cos 2m\pi + \sqrt{-1} \sin 2m\pi,$$

и, слѣдовательно, допущеніе единственности значенія  $u = +1$ , отвѣчающаго  $z = 0$ , несовмѣстимо съ непрерывностью функціи, которая является существенно неопредѣленною съ самаго начала, когда мы не поставили никакихъ условій для значеній  $z$ .

§ 377. Рассмотримъ, наконецъ, функцію

$$u = l(1 + z),$$

имѣющую, по опредѣленію, для каждаго значенія  $z$  безчисленное множество различныхъ между собою значеній, которыя всѣ при  $z = -1$  обращаются въ безконечность. Для  $z = 0$  имѣемъ:

$$u = l = 2k\pi \sqrt{-1}.$$

Беремъ  $k = 0$  и предполагаемъ, такимъ образомъ, что, для  $z = 0$ ,  $u$  приводится къ нулю.

Если  $z$ , начиная со значенія нуль, измѣняется непрерывно, и если кривая, точки которой представляютъ его послѣдовательныя значенія, не проходитъ черезъ точку, соотвѣтствующую  $z = -1$ , то послѣдовательныя значенія  $l(1 + z)$  будутъ вполне опредѣленныя. Если мы потребуемъ, чтобы  $z$  равнялось  $x_1 + y_1 \sqrt{-1}$ , то соотвѣтственное значеніе  $u$  будетъ зависѣть отъ кривой, соединяющей начало съ точкою, координаты которой  $x_1, y_1$ . Однако, это значеніе останется безъ перемѣны, если эта кривая и начнетъ видоизмѣняться, но не переходя черезъ точку, соотвѣтствующую  $z = -1$ , для которой всѣ значенія  $l(1 + z)$  обращаются въ безконечность. Это условіе, очевидно, будетъ выполнено, если модуль  $z$  подчинить тому же условію, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, т.-е. чтобы онъ оставался постоянно меньше единицы. При такомъ соглашеніи каждой точкѣ внутри круга, описаннаго изъ начала, какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, будетъ отвѣчать одно опредѣленное значеніе  $u$ , которое мы сейчасъ и вычислимъ.

Имѣемъ (§ 370):

$$l(1 + x + y \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l[(1 + x)^2 + y^2] + \sqrt{-1} \arctang \left( \frac{y}{x + 1} \right);$$

остается только рѣшить, какую изъ дугъ, тангенсъ которыхъ равенъ  $\frac{y}{x + 1}$ , мы должны выбрать. По допущенію, для  $x = 0, y = 0$ , имѣемъ:

$$l(1 + x + y \sqrt{-1}) = 0;$$

слѣдовательно, дуга  $\arctang \frac{y}{x + 1}$  должна быть взята равною нулю. Послѣ этого  $\frac{y}{x + 1}$  не можетъ обратиться въ безконечность, пока точка, координаты которой  $x$  и  $y$ , остается

внутри круга; значитъ,  $\operatorname{arctang} \frac{y}{x+1}$  остается въ предѣлахъ между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ , что устраняетъ всякую неопредѣленность.

Полагая, напр.,

$$x + y\sqrt{-1} = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

легко находимъ:

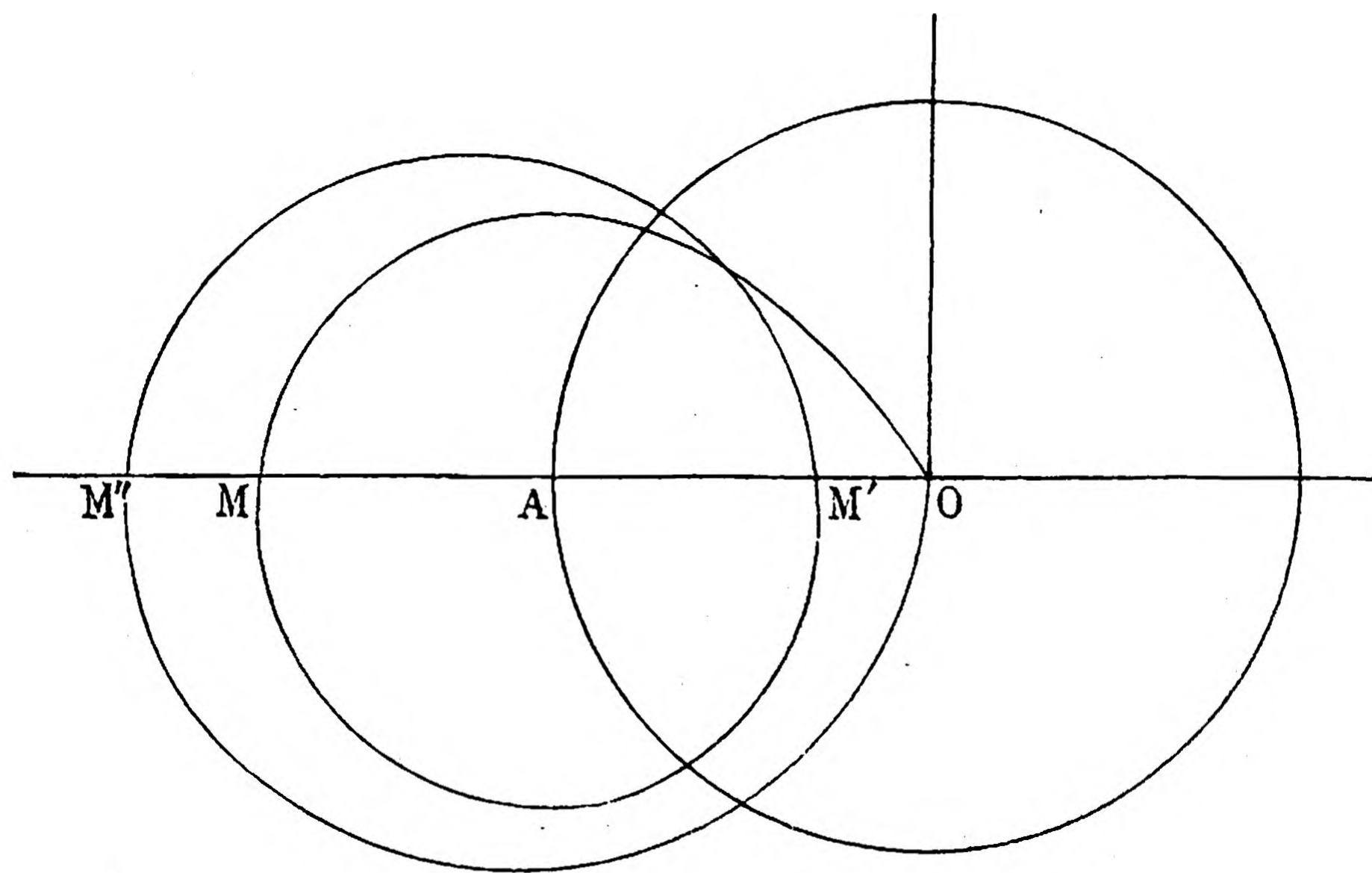
$$1(1 + \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) = 1 \left[ \pm \left( 2 \cos \frac{1}{2} \varphi \right) \right] \pm \sqrt{-1} \operatorname{arctang} \left( \tan \frac{1}{2} \varphi \right);$$

въ полученномъ выраженіи  $\pm$  передъ  $\cos \frac{1}{2} \varphi$  въ первомъ членѣ показываетъ, что нужно удержать тотъ изъ двухъ знаковъ, при которомъ логарифмъ былъ бы взятъ отъ положительнаго числа, коэффициентъ же при  $\sqrt{-1}$  долженъ содержаться между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ . Самое общее значеніе  $\operatorname{arctang} \left( \tan \frac{1}{2} \varphi \right)$  будетъ

$$\frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

гдѣ значеніе цѣлаго числа  $k$ , при которомъ это выраженіе содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ , очевидно, единственное.

Если промежуточные значенія переменныхъ  $x$  и  $y$  при переходѣ послѣднихъ отъ начальныхъ значеній  $x=0$ ,  $y=0$  къ разсматриваемымъ ничѣмъ не обусловлены, то предыдущія заключенія теряютъ свою силу; уголъ, тангенсъ котораго равенъ  $\frac{y}{x+1}$ , составляется съ осью  $X$ -овъ радіусомъ-векторомъ, соединяющимъ подвижную точку съ



Черт. 32

неподвижною  $A$ , координаты которой  $y=0$ ,  $x=-1$ ; если радіусъ-векторъ дѣлаетъ нѣсколько оборотовъ вокругъ своего неподвижнаго начала, то уголъ увеличивается на  $2\pi$ , повторенное столько же разъ. Если, напр., предположить, что значенія, послѣдовательно приписываемыя  $x$  и  $y$ , будутъ координатами точекъ замкнутой кривой (черт. 32), начи-



находящейся въ точкѣ  $O$  и снова возвращающейся въ ту же точку, то, зная, что начальное значеніе  $l(1+z)$ , соотвѣтствующее  $z=0$ , по предположенію, есть также нуль, мы должны принять, послѣ того какъ  $z$  снова вернется къ нулю, пройдя промежуточные значенія, соотвѣтствующія точкамъ кривой  $ОММ'M''O$ ,  $\operatorname{arctang} \frac{y}{x+1} = 4\pi$  и будемъ имѣть:

$$l(1+z) = l(1) = 4\pi \sqrt{-1}.$$

Итакъ, функція  $l(1+z)$ , если мы желаемъ имѣть ее непрерывною, есть существенно неопредѣленная подобно  $(1+z)^m$ , когда значенія, какія можетъ получать  $z$ , не подвергаются никакому ограниченію.

#### РАЗЛОЖЕНІЕ ВЪ РЯДЪ МНИМЫХЪ ФУНКЦІЙ

**§ 378.** Для нѣкоторыхъ мнимыхъ функцій представляющіе ихъ ряды служатъ въ то же время и ихъ опредѣленіемъ. Таковы функціи  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ , развертывающіяся для всѣхъ значеній  $z$ , вещественныхъ или мнимыхъ, въ ряды по степенямъ перемѣнной  $z$ , отъ которой онѣ являются функціями непрерывными, всегда конечными и опредѣленными. Аналогичное опредѣленіе невозможно для такихъ функцій, какъ  $l(1+z)$  и  $(1+z)^m$ , разложенія которыхъ будутъ сходящимися только для нѣкоторыхъ значеній перемѣнной дѣйствительно, оно привело бы къ заключенію, что для всѣхъ прочихъ значеній функція перестаетъ существовать.

Если, напр., принять за опредѣленіе

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots,$$

то для всѣхъ значеній  $z$ , модуль которыхъ превышаетъ единицу,  $l(1+z)$  обратится въ безконечность и, слѣдовательно, функція перестанетъ существовать. Такъ же неудобно принять за опредѣленіе функціи  $(1+z)^m$  извѣстный рядъ, въ который она развертывается при  $z$  вещественномъ и меньшемъ единицы.

Да и à priori можно усмотрѣть, что выводы, къ которымъ насъ привело изученіе функцій  $l(1+z)$ ,  $(1+z)^m$ , несовмѣстимы съ существованіемъ ряда, расположеннаго по степенямъ  $z$  и представляющаго, для всякаго значенія перемѣнной, ту или другую изъ этихъ функцій. Въ самомъ дѣлѣ, рядъ при каждомъ значеніи  $z$  можетъ дать только одно значеніе для функціи, тогда какъ (§§ 376, 377) опредѣленія указываютъ на много *неразрѣчныхъ другъ отъ друга* значеній.

Не избѣжать затрудненій и при томъ предположеніи, что существуетъ столько различныхъ рядовъ, сколько значеній функціи, потому что хотя каждый изъ нихъ и представилъ бы непрерывную и опредѣленную функцію, всё-же ихъ совокупность не обладала бы этимъ отличительнымъ свойствомъ функціи оставаться непрерывною лишь при условіи взаимнаго перехода другъ въ друга ея различныхъ значеній, когда перемѣнная, послѣ надлежащихъ измѣненій, возвращается къ своему первоначальному значенію.

**§ 379.** Если функція опредѣлена для всѣхъ значеній перемѣнной, вещественныхъ или мнимыхъ, то можно назначить предѣлы, внѣ которыхъ ея разложеніе въ рядъ не-



возможно. Чтобы функция развѣтывалась въ рядъ, необходимо, чтобы она была непрерывною, конечною и вполнѣ опредѣленною для значеній переменной, модуль которыхъ меньше радіуса круга сходимости ряда (§ 261). Если рядъ обращается въ безконечность для какого-нибудь значенія переменной, то онъ также обращается въ безконечность для значеній съ бѣльшимъ модулемъ (§ 258). Слѣдовательно, функция, обращающаяся въ безконечность для частнаго значенія переменной, имѣющаго модуль  $R$ , можетъ развѣтываться въ рядъ только для значеній съ модулемъ ниже  $R$ . Это замѣчаніе приложимо къ производной отъ функции, потому что производная отъ сходящагося ряда, расположеннаго по степенямъ переменной, представляетъ всегда сходящійся рядъ; такъ, напр., функция  $\arctang z$ , производная отъ которой, равная  $\frac{1}{1+z^2}$ , обращается въ безконечность при  $z = \sqrt{-1}$ , можетъ развѣтываться въ рядъ по степенямъ  $z$  только для такихъ значеній  $z$ , модуль которыхъ не превышаетъ единицы.

§ 380. Чтобы функция развѣтывалась въ рядъ по степенямъ переменной, нужно наконецъ, чтобы она была вполнѣ опредѣленною, т.-е. чтобы каждому значенію переменной *могло* отвѣчать лишь единственное значеніе функции. Съ перваго взгляда кажется, что всегда возможно избѣгнуть многозначности, сдѣлавъ надлежащій выборъ между значеніями функции, такъ чтобы для каждаго значенія переменной приходилось по одному лишь значенію функции; но мы видѣли, что подобное соглашеніе иногда несовмѣстимо съ непрерывностью функции, являющейся не менѣе необходимымъ условіемъ для разложенія въ рядъ. Поэтому функция  $(1+z)^m$  послѣ того, что сказано въ § 376-мъ, не можетъ быть разложена въ сходящійся рядъ для значеній  $z$ , модуль которыхъ превосходитъ единицу. Наоборотъ, если подчинить переменную  $z$  условію, чтобы она получала только такіа значенія, модуль которыхъ меньше единицы, то ни одно изъ вышеприведенныхъ условій не будетъ препятствовать возможности разложенія, которое съ этого момента, какъ мы это докажемъ во второмъ томѣ, возможно и опредѣленно.

#### Разложеніе $1/(1+z)$

§ 381. Теперь мы можемъ доказать законность разложенія  $1/(1+z)$  для вещественныхъ или мнимыхъ значеній  $z$ , модуль которыхъ меньше единицы. Въ самомъ дѣлѣ, каково бы ни было вещественное или мнимое значеніе  $z$ , имѣемъ тождественно:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots - z^{2n-1} + \frac{z^{2n}}{1+z}. \quad (1)$$

Если модуль  $z$  меньше единицы, то модуль  $z^{2n}$  стремится къ нулю и, слѣдовательно,  $\frac{1}{1+z}$  выражается сходящимся рядомъ

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots - z^{2n-1} + z^{2n} - \dots \quad (2)$$

Отсюда вытекаетъ, что  $l(1+z)$ , производная отъ котораго равна  $\frac{1}{1+z}$ , отличается только на нѣкоторую постоянную отъ ряда

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^{2n}}{2n} + \dots,$$

производная отъ котораго есть вторая часть равенства (2), и если принять, что, при  $z=0$ ,  $l(1+z)$  обращается въ нуль одновременно съ рядомъ, то будемъ имѣть:

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots - \frac{z^{2n}}{2n} + \dots; \quad (3)$$

итакъ, этотъ рядъ доказанъ для всѣхъ значеній  $z$ , модуль которыхъ меньше единицы;  $l(1+z)$  въ этой формулѣ есть непрерывная функція отъ  $z$  и имѣетъ, слѣдовательно, значеніе, вычисленное въ § 377-мъ; это значеніе—единственное, совмѣстимое съ двойнымъ условіемъ для функціи: быть непрерывною и обращаться въ нуль одновременно съ  $z$ .

### § 382. Полагая

$$z = \rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

имѣемъ (§ 377):

$$l(1 + \rho\cos\varphi + \rho\sqrt{-1}\sin\varphi) = \frac{1}{2} l(1 + \rho^2 + 2\rho\cos\varphi) + \sqrt{-1} \operatorname{arctang} \frac{\rho\sin\varphi}{1 + \rho\cos\varphi},$$

гдѣ дуга, опредѣляемая своимъ тангенсомъ, должна быть взята между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ . Вводя то же самое значеніе  $z$  въ рядъ и приравнивая другъ другу отдѣльно вещественныя части и отдѣльно мнимыя, будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} l(1 + \rho^2 + 2\rho\cos\varphi) &= \rho\cos\varphi - \frac{\rho^2}{2} \cos 2\varphi + \frac{\rho^3}{3} \cos 3\varphi - \dots, \\ \operatorname{arctang} \frac{\rho\sin\varphi}{1 + \rho\cos\varphi} &= \rho\sin\varphi - \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\varphi - \dots; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

полагая  $\rho = 1$  и замѣчая, что

$$2 + 2\cos\varphi = 4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi,$$

$$\operatorname{arctang} \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \frac{\varphi}{2} + k\pi,$$

напишемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} l 4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi &= \cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \dots + \frac{\cos n\varphi}{n} - \dots, \\ \frac{\varphi}{2} + k\pi &= \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots + \frac{\sin n\varphi}{n} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

гдѣ цѣлое число  $k$  нужно выбрать такимъ, чтобы первая часть второго уравненія содержалась между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ . Если  $\varphi$  само содержится между  $-\pi$  и  $+\pi$ , то мы должны взять  $k=0$  и будемъ имѣть:

$$\frac{\varphi}{2} = \sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots + \frac{\sin n\varphi}{n} - \dots \quad (6)$$

Мы видимъ, что если  $\varphi$  увеличивается непрерывно, то рядъ, образующій вторую часть, претерпѣваетъ рѣзкое измѣненіе въ тотъ моментъ, когда  $\varphi = \pi$ , а сумма переходитъ отъ значенія, бесконечно-мало отличающагося отъ  $\frac{\pi}{2}$ , къ значенію, бесконечно-мало превышающему  $-\frac{\pi}{2}$ . Дѣйствительно, по § 264-му производныя отъ членовъ ряда должны, при этомъ значеніи  $\varphi$ , имѣть бесконечно-огромную сумму, что не трудно усмотрѣть, такъ какъ эти производныя приводятся, при  $\varphi = \pi$ , къ

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} - \dots,$$

что на самомъ дѣлѣ представляетъ бесконечно-огромную сумму.

Если въ формулахъ (4) положить  $\rho = -1$ , то онѣ приведутся къ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \log \sin^2 \frac{1}{2} \varphi &= - \left( \cos \varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} + \dots \right), \\ \operatorname{arctang} \left( -\cot \frac{1}{2} \varphi \right) &= - \left( \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \dots \right); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

дуга, тангенсъ которой есть  $-\cot \frac{1}{2} \varphi$ , равна  $\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} + k\pi$ , гдѣ  $k$  — опредѣленное цѣлое число, потому что дуга содержится, какъ мы знаемъ, между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ . Если  $\varphi$  содержится между 0 и  $2\pi$ , то нужно взять  $k=0$ ; для такихъ значеній  $\varphi$  мы, слѣдовательно, имѣемъ формулу

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \dots, \quad (8)$$

полученную уже раньше (§ 301) совершенно другимъ путемъ.

**§ 383.** Такъ какъ формулы (6) и (8) справедливы обѣ для значеній  $\varphi$  между 0 и  $\pi$ , то ихъ можно сложить и получить такимъ образомъ замѣчательную формулу

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left( \sin \varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \dots \right), \quad (9)$$

имѣющую мѣсто для всѣхъ значеній  $\varphi$  между 0 и  $\pi$ .

При перемѣнѣ  $\varphi$  на  $-\varphi$  вторая часть, очевидно, измѣнитъ знакъ, не измѣняя своей величины, и будетъ равна  $-\frac{\pi}{2}$ , а такъ какъ она не измѣняется, когда  $\varphi$  увеличивается на  $2\pi$ , то отсюда вытекаетъ, что рядъ

$$\sin \varphi + \frac{\sin 3\varphi}{3} + \frac{\sin 5\varphi}{5} + \dots$$

при всякомъ значеніи  $\varphi$  равенъ  $\pm \frac{\pi}{4}$ , при чемъ знакъ  $+$  соответствуетъ случаю, гдѣ  $\sin \varphi$  положителенъ, а знакъ  $-$  случаю, гдѣ онъ отрицателенъ. Когда  $\varphi$  является кратнымъ  $\pi$ , всѣ члены обращаются въ нуль, и формула теряетъ свое значеніе. Полагая  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , получаемъ формулу

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \dots \right), \quad (10)$$

извѣстную Ньютону.

#### РАЗЛОЖЕНІЕ $(1+z)^m$

**§ 384.** Функція  $(1+z)^m$  развѣртывается въ сходящійся рядъ, когда  $z$  вещественно и по абсолютному значенію меньше единицы. Тогда

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} z^n + \dots \quad (1)$$

Допустимъ здѣсь этотъ рядъ для мнимыхъ значеній  $z$ , который, понятно, дальше будетъ доказанъ; сейчасъ же, при такомъ допущеніи, мы выведемъ замѣчательныя слѣдствія. Сначала, послѣ вышеприведенныхъ объясненій (§ 378), не слѣдуетъ придавать  $z$  значеній, модуль которыхъ превышаетъ единицу; кромѣ того, такъ какъ функція  $(1+z)^m$ , представленная рядомъ, непрерывна и равна единицѣ при  $z=0$ , то она можетъ принять только то изъ значеній  $(1+z)^m$ , которое было вычислено (§ 376). Если положить

$$z = \rho(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

то, при  $\rho$  меньшемъ единицы, значеніе  $(1+z)^m$ , которое нужно принять, будетъ

$$\rho'^m (\cos m \omega + \sqrt{-1} \sin m \omega),$$

гдѣ

$$\rho' = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \varphi},$$

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{\rho \sin \varphi}{1 + \rho \cos \varphi},$$

при чемъ  $\rho'$  положительно, а  $\omega$  содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ . Полагая  $\rho = 1$ , имѣемъ:

$$\rho' = \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} = \pm \left( 2\cos \frac{1}{2}\varphi \right),$$

$$\text{tang } \omega = \text{tang } \frac{1}{2}\varphi,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{2}\varphi - k\pi,$$

гдѣ  $k$  — цѣлое число, опредѣляемое условіемъ, что  $\omega$  содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ .

Итакъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} \right)^m \left[ \cos m \left( \frac{1}{2}\varphi - k\pi \right) + \sqrt{-1} \sin m \left( \frac{1}{2}\varphi - k\pi \right) \right] = \\ & = 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos 2\varphi + \dots + \sqrt{-1} \left[ m\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin 2\varphi + \dots \right], \quad (2) \end{aligned}$$

при чемъ  $\frac{1}{2}\varphi - k\pi$  содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$ , а  $\left( \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} \right)^m$  — величина вещественная и положительная. Приравнивая другъ другу отдѣльно вещественныя части и отдѣльно мнимыя обѣихъ частей предыдущаго уравненія, пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} & \left( \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} \right)^m \cos m \left( \frac{1}{2}\varphi - k\pi \right) = \\ & = 1 + m\cos\varphi + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3\varphi + \dots, \\ & \left( \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi} \right)^m \sin m \left( \frac{1}{2}\varphi - k\pi \right) = \\ & = m\sin\varphi + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin 2\varphi + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3\varphi + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и когда  $\varphi$  дано, эти уравненія не представляютъ, по предыдущему, никакой неопредѣленности, потому что  $\frac{1}{2}\varphi - k\pi$  содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $+\frac{\pi}{2}$  и, слѣдовательно,  $\frac{\varphi}{2}$  — между  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  и  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ , что для каждаго значенія  $\varphi$  вполне опредѣляетъ цѣлое число  $k$ . При замѣнѣ въ равенствахъ (3)  $\sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}$ , которое всегда положительно, его значеніемъ  $2\cos \frac{1}{2}\varphi$ , надо передъ послѣднимъ поставить двойной знакъ  $\pm$ .



Складываемъ оба уравненія (3), умноживъ предварительно первое изъ нихъ на  $\cos\alpha$ , а второе на  $\sin\alpha$ , при чемъ  $\alpha$  обозначаетъ произвольный уголъ; получаемъ:

$$\left(\pm 2 \cos \frac{1}{2} \varphi\right)^m \cos\left(\alpha - m \frac{\varphi}{2} + mk\pi\right) = \cos\alpha + m \cos(\alpha - \varphi) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(\alpha - 2\varphi) + \dots$$

Полагая  $\varphi = 2x$ , имѣемъ:

$$(\pm 2 \cos x)^m \cos(\alpha - mx + mk\pi) = \cos\alpha + m \cos(\alpha - 2x) + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(\alpha - 4x) + \dots, \quad (4)$$

при чемъ  $\pm 2 \cos x$  всегда должно выходить положительною величиною.

При  $\alpha = mx$  формула (4) переходитъ въ слѣдующую:

$$(\pm 2 \cos x)^m \cos mk\pi = \cos mx + m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \dots, \quad (5)$$

а при  $\alpha = mx + \frac{\pi}{2}$  въ слѣдующую:

$$(\pm 2 \cos x)^m \sin mk\pi = \sin mx + m \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin(m-4)x + \dots, \quad (6)$$

при чемъ  $x$  содержится между  $k\pi - \frac{\pi}{2}$  и  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ; кромѣ того, чтобы  $\pm 2 \cos x$  въ первыхъ частяхъ формулъ (5) и (6) выходило положительнымъ, нужно брать знакъ  $+$  въ случаѣ  $k$  четнаго и знакъ  $-$  въ случаѣ  $k$  нечетнаго.

Если въ уравненіи (4) положить  $\alpha = mx'$ ,  $x = x' - \frac{\pi}{2}$  и затѣмъ для симметріи формулъ снять въ полученномъ результатѣ значекъ надъ  $x$ , то будемъ имѣть:

$$(\pm 2 \sin x)^m \cos m\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = \cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x - \dots, \quad (7)$$

а если положить  $\alpha = mx' - \frac{\pi}{2}$ ,  $x = x' - \frac{\pi}{2}$  и въ полученномъ результатѣ также снять значекъ надъ  $x$ , то можемъ написать:

$$(\pm 2 \sin x)^m \sin m\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = \sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin(m-4)x - \dots \quad (8)$$

Въ этихъ формулахъ  $x$  обозначаетъ произвольную дугу, содержащуюся между  $k\pi$  и  $(k+1)\pi$ , а  $k$ —какое-угодно цѣлое число; кромѣ того,  $\pm 2 \sin x$  должно быть положительнымъ и, слѣдовательно, нужно брать знакъ  $+$  въ случаѣ  $k$  четнаго и знакъ  $-$  въ случаѣ  $k$  нечетнаго.

Эйлеръ и Лагранжъ дали формулу

$$(2 \cos x)^m = \cos mx + m \cos(m-2)x + \dots, \quad (9)$$

которая была принята безъ изслѣдованія. Пуассонъ (Poisson) первый отмѣтилъ невозможность уравненія (9), замѣтивъ, что при  $m = \frac{1}{3}$ ,  $x = \pi$  оно дѣлается явно неточнымъ. Дѣйствительно, первая часть обращается въ  $-\sqrt[3]{2}$ , а вторая приводится къ

$$\cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{1 \cdot 2} \cos \frac{\pi}{3} + \dots,$$

а такъ какъ  $\cos \frac{\pi}{3}$  равенъ  $\frac{1}{2}$  и рядъ

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{1 \cdot 2} + \dots$$

представляетъ  $(1 + 1)^{\frac{1}{3}}$ , т.-е.  $\sqrt[3]{2}$ , то вторая часть приводится къ  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2}$ . Это показываетъ, что первая и вторая части уравненія Эйлера неравны между собою. Къ своему возраженію Пуассонъ однако не присоединилъ точной формулы, которую далъ впервые Пуансо (Poinso).

Если въ уравненіи (5) положить  $m = \frac{1}{3}$ ,  $x = \pi$ , то нужно взять  $k = 1$ , потому что  $\pi$  содержится между  $\pi - \frac{\pi}{2}$  и  $\pi + \frac{\pi}{2}$ , и придать  $\cos x$ , который является отрицательнымъ, знакъ  $-$ ; такимъ образомъ первая часть приводится къ

$$(2)^{\frac{1}{3}} \cos \frac{1}{3} \pi,$$

т.-е. къ  $\frac{1}{2} \sqrt[3]{2}$ , и мы видимъ, что она равна второй.

Особенно слѣдуетъ замѣтить, что рядъ

$$\cos mx + m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \dots$$

есть разрывная функція отъ  $x$  и что онъ претерпѣваетъ рѣзкое измѣненіе въ своемъ значеніи, когда  $x$ , непрерывно возрастаая, проходитъ черезъ значеніе вида  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ , потому что въ этотъ моментъ нужно въ первой части увеличить цѣлое число  $k$  на единицу.

Полагая  $x$  равнымъ точно  $k\pi + \frac{\pi}{2}$ , замѣчаемъ, что всѣ косинусы въ рядѣ будутъ равными попеременно  $\cos mx$  и  $-\cos mx$  и рядъ приметъ видъ:

$$\cos mx \left[ 1 - m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right];$$

отсюда заключаемъ, что онъ — сходящійся и равенъ нулю при  $m$  положительномъ и расходящійся при  $m$  отрицательномъ.

Итакъ, уравненіе (5) можно разсматривать, какъ точное, потому что значеніе, приписываемое  $x$ , даетъ  $\cos x = 0$ ; слѣдовательно,  $(\cos x)^m$  обращается въ нуль при  $m$  положительномъ и въ безконечность при  $m$  отрицательномъ.

§ 385. Если въ формулахъ (5), (6), (7) и (8) предыдущаго параграфа приписать  $m$  цѣлое значеніе, то вторыя части приведутся къ предѣльному числу членовъ. Разсматриваемъ первую

$$(\pm 2\cos x)^m \cos m\pi = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos(m-4)x + \dots \quad (1)$$

Предполагаемъ, во-первыхъ, что  $m$  обозначаетъ здѣсь четное число  $2n$ ;  $\cos m\pi$  обращается при этомъ въ единицу, а знакъ  $\pm$  въ первой части остается безъ вліянія на ея значеніе; отбрасывая во второй части члены, обращающіеся въ нуль, пишемъ:

$$\begin{aligned} (2\cos x)^{2n} &= \\ &= \cos 2nx + 2n\cos(2n-2)x + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos(2n-4)x + \dots + \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots \\ &\quad + 2n\cos[2n-(4n-2)]x + \cos(2n-4n)x, \end{aligned} \quad (2)$$

и такъ какъ члены, равноотстоящіе отъ краевъ, равны, окончательно имѣемъ:

$$\begin{aligned} (2\cos x)^{2n} &= 2\cos 2nx + 2(2n)\cos(2n-2)x + 2\frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos(2n-4)x + \dots \\ &\quad + \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}; \end{aligned}$$

послѣдній членъ — единственный, встрѣчающійся въ уравненіи (2) только разъ, и потому не долженъ быть удваиваемъ.

Предполагаемъ, во-вторыхъ, что  $m$  обозначаетъ въ формулѣ (5) нечетное число  $2n+1$ ;  $\cos m\pi$  обращается при этомъ въ  $+1$  при  $k$  четномъ и въ  $-1$  при  $k$  нечетномъ; въ первомъ случаѣ  $\cos x$  положителенъ и нужно взять знакъ  $+$  въ скобкахъ въ первой части формулы; во второмъ случаѣ онъ отрицателенъ и нужно взять знакъ  $-$ ; такимъ образомъ первая часть всегда приводится къ  $(2\cos x)^{2n+1}$ , и мы, отбрасывая нулевые члены во второй части и замѣчая, что члены, равноотстоящіе отъ краевъ, равны, имѣемъ:

$$\begin{aligned} (2\cos x)^{2n+1} &= 2\cos(2n+1)x + 2(2n+1)\cos(2n-1)x + 2\frac{(2n+1)2n}{1 \cdot 2} \cos(2n-3)x + \dots \\ &\quad + 2\frac{(2n+1)2n \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots n} \cos x. \end{aligned}$$

Точно такъ же, предполагая  $m$  цѣлымъ въ формулахъ (7) и (8), найдемъ:

$$\begin{aligned} 2^{2n}(-1)^n \sin^{2n} x &= 2\cos 2nx - 2(2n)\cos(2n-2)x + 2\frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} \cos(2n-4)x - \dots \\ &\quad + (-1)^n \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}, \\ 2^{2n+1}(-1)^n \sin^{2n+1} x &= 2\sin(2n+1)x - 2(2n+1)\sin(2n-1)x + \dots \\ &\quad + (-1)^n 2\frac{(2n+1)2n \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots n} \sin x. \end{aligned}$$

Эти формулы часто бывают полезны и мы приведемъ здѣсь численныя значенія коэффициентовъ для простѣйшихъ случаевъ:

$$\begin{aligned}
 2 \cos^2 x &= \cos 2x + 1, \\
 4 \cos^3 x &= \cos 3x + 3 \cos x, \\
 8 \cos^4 x &= \cos 4x + 4 \cos 2x + 3, \\
 16 \cos^5 x &= \cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x, \\
 32 \cos^6 x &= \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10, \\
 64 \cos^7 x &= \cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x, \\
 128 \cos^8 x &= \cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + 35, \\
 -2 \sin^2 x &= \cos 2x - 1, \\
 -4 \sin^3 x &= \sin 3x - 3 \sin x, \\
 +8 \sin^4 x &= \cos 4x - 4 \cos 2x + 3, \\
 16 \sin^5 x &= \sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x, \\
 -32 \sin^6 x &= \cos 6x - 6 \cos 4x + 15 \cos 2x - 10, \\
 -64 \sin^7 x &= \sin 7x - 7 \sin 5x + 21 \sin 3x - 35 \sin x, \\
 128 \sin^8 x &= \cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + 35.
 \end{aligned}$$

§ 386. Замѣчаемъ, наконецъ, что рядъ (5) можетъ быть сходящимся только въ томъ случаѣ, если коэффициенты во второй части стремятся къ нулю, а для этого нужно, чтобы  $m+1$  было бы положительно (§ 284). Если, напр., положить  $m = -1$ ,  $m = -2$ , то получимъ формулы:

$$\frac{1}{\cos x} = 2 (\cos x - \cos 3x + \cos 5x - \cos 7x + \dots),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 2^2 (\cos 2x - 2 \cos 4x + 3 \cos 6x - 4 \cos 8x + \dots),$$

очевидно нелѣпыя, но которыя, однако, были приняты нѣкоторыми геометрами.

Полагая въ общей формулѣ (§ 384)  $m = -1$ , выводимъ:

$$\frac{1}{1 - \rho \cos \varphi - \rho \sqrt{-1} \sin \varphi} = 1 + \rho (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) + \rho^2 (\cos 2\varphi + \sqrt{-1} \sin 2\varphi) + \dots;$$

умножаемъ числителя и знаменателя дроби, образующей первую часть этого равенства, на  $1 - \rho \cos \varphi + \rho \sqrt{-1} \sin \varphi$ ; знаменатель тогда станетъ вещественнымъ, и мы можемъ приравнять другъ другу отдѣльно вещественныя части и отдѣльно мнимыя обѣихъ частей равенства; получаемъ равенства:

$$\frac{1 - \rho \cos \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2} = 1 + \rho \cos \varphi + \rho^2 \cos 2\varphi + \rho^3 \cos 3\varphi + \dots,$$

$$\frac{\rho \sin \varphi}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2} = \rho \sin \varphi + \rho^2 \sin 2\varphi + \rho^3 \sin 3\varphi + \dots,$$

справедливыя для всѣхъ значеній  $\rho$  меньшихъ единицы.

НѢКОТОРЫЯ РАЗЛОЖЕНІЯ ВЪ РЯДЪ, ВЫВЕДЕННЫЯ ИЗЪ РАЗСМОТРѢНІЯ  
МНИМЫХЪ ФУНКЦІЙ

§ 387. Было выведено (§ 347):

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} - \frac{B_2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{B_3 x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \dots, \quad (1)$$

гдѣ  $B_1, B_2, B_3, \dots$  представляютъ числа Бернулли, значеніе которыхъ было дано. Но мы видѣли (§ 369), что

$$\cot x = \sqrt{-1} \left( 1 + \frac{2}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1} \right);$$

развертывая  $\frac{1}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}$  съ помощью формулы (1), въ которой вмѣсто  $x$  ставимъ  $2x\sqrt{-1}$ , находимъ:

$$\cot x = \sqrt{-1} \left\{ 1 + 2 \left[ \frac{1}{2x\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} + B_1 \frac{2x\sqrt{-1}}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{(2x\sqrt{-1})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \right] \right\};$$

послѣ упрощеній будетъ:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 B_2 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 B_3 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} x^{2n-1} - \dots;$$

не трудно обнаружить согласіе первыхъ коэффициентовъ съ численными значеніями, найденными въ § 304-мъ.

§ 388. Разложеніе  $\cot x$  даетъ возможность получить нѣсколько другихъ; имѣемъ:

$$\operatorname{tang} x = \cot x - 2 \cot 2x,$$

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \cot x,$$

откуда выводимъ:

$$\operatorname{tang} x = 2^2(2^2 - 1) \frac{B_1 x}{1 \cdot 2} + \frac{2^4(2^4 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_3 x^5 + \dots,$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2(2 - 1) \frac{B_1 x}{1 \cdot 2} + \frac{2(2^3 - 1) B_2 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2(2^5 - 1) B_3 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots;$$

дальше мы покажемъ условія сходимости этихъ рядовъ.



**389.** Вернемся къ разсмотрѣнной уже (§ 315) функціи  $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ ; замѣнимъ  $z$  черезъ  $\cos\theta$ , а  $\cos\theta$  его значеніемъ

$$\frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2};$$

будемъ имѣть:

$$(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - \alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}(1 - \alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

что не трудно провѣрить.

Прилагая формулу бинома къ каждому изъ двухъ множителей второй части, имѣемъ:

$$(1 - \alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(\alpha e^{\theta\sqrt{-1}})^2 + \dots,$$

$$(1 - \alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}(\alpha e^{-\theta\sqrt{-1}})^2 + \dots$$

Пусть  $P_n$  обозначаетъ коэффициентъ при  $\alpha^n$  въ произведеніи этихъ двухъ рядовъ; не трудно видѣть, что

$$\begin{aligned} & \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} P_n = \\ & = \cos n\theta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta + \frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots; \end{aligned} \quad (2)$$

этотъ рядъ продолжается до членовъ, обращающихся въ нуль. Функція  $P_n$  есть та же функція  $X_n$  (§ 315), если замѣнить въ этой послѣдней  $x$  черезъ  $\cos\theta$ ; такъ какъ всѣ коэффициенты во второй части уравненія (2) положительны, то при  $\theta = 0$  наступаетъ максимумъ значенія этой функціи; это значеніе является коэффициентомъ при  $\alpha^n$  въ разложеніи

$$(1 - 2\alpha + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Отсюда видно, что этотъ коэффициентъ равенъ единицѣ и такъ какъ онъ въ то же время есть максимумъ значенія  $P_n$ , то функція  $X_n$  всегда меньше единицы, когда въ ней предполагается  $x = \cos\theta$ , т.-е. когда  $x$  получаетъ какія-угодно значенія въ предѣлахъ между  $-1$  и  $+1$ .

**§ 390.** Разсмотримъ, наконецъ, функцію  $y$ , опредѣляемую уравненіемъ

$$\operatorname{tang} y = \cos \alpha \cdot \operatorname{tang} x. \quad (1)$$

Постараемся разложить  $y$  въ рядъ по степенямъ  $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ .

Уравненіе (1) равносильно

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}} = \cos\alpha \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}},$$

или же

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}} - 1}{e^{2y\sqrt{-1}} + 1} = \cos\alpha \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1};$$

отсюда выводимъ:

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 1 + \cos\alpha (e^{2x\sqrt{-1}} - 1)}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1 - \cos\alpha (e^{2x\sqrt{-1}} - 1)} = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} e^{2x\sqrt{-1}} + 1},$$

или, наконецъ,

$$e^{2y\sqrt{-1}} = e^{2x\sqrt{-1}} \left( \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2x\sqrt{-1}}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} e^{2x\sqrt{-1}}} \right).$$

Беря логарифмы отъ обѣихъ частей и дѣля затѣмъ на  $2\sqrt{-1}$ , находимъ:

$$y = x + \frac{1 \left( 1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} e^{-2x\sqrt{-1}} \right) - 1 \left( 1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} e^{2x\sqrt{-1}} \right)}{2\sqrt{-1}}.$$

Развертывая логарифмы въ рядъ и подставляя вмѣсто показательныхъ мнимыхъ функций ихъ значенія, имѣемъ окончательно:

$$y = x - \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} \sin 2x + \frac{\operatorname{tang}^4 \frac{\alpha}{2}}{2} \sin 4x - \frac{\operatorname{tang}^6 \frac{\alpha}{2}}{3} \sin 6x + \dots$$

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Если мнимое выраженіе  $x + y\sqrt{-1}$  изображается точкою на плоскости, координаты которой  $x$  и  $y$ , то всякое уравненіе  $F(u, v) = 0$  дастъ законъ видоизмѣненія, позволяющій вывести по точкѣ, представленной переменною  $u$ , точку, представленную соотвѣтственнымъ значеніемъ  $v$ , и всякая плоская фигура будетъ имѣть свою преобразованную, ей подобную въ случаѣ безконечно-малыхъ ихъ измѣреній.

2. Полагая

$$u^m = (z - a)(z - b)(z - c)(z - d) \dots (z - l),$$

гдѣ  $m$  — цѣлое число, а  $a, b, c, d, \dots$  — данныя количества, вещественныя или мнимыя, выводимъ изъ этого уравненія  $m$  значеній  $u$ , соотвѣствующихъ данному значенію  $z$ . Если точка плоскости, которой соотвѣтствуетъ значеніе  $z$ , описываетъ кругъ весьма малаго радіуса вокругъ точки, соотвѣтствующей количеству  $a$ , то  $m$  корней,  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , относящихся къ этому зна-

ченію  $z$ , можно расположить въ такомъ порядкѣ, что каждый корень, послѣ того какъ точка, представляющая  $z$ , описываетъ цѣлую окружность круга и  $z$  возвращается къ своему первоначальному значенію, замѣняется, при начальномъ значеніи  $u = u_p$ , слѣдующимъ  $u = u_{p+1}$ , связаннымъ съ предыдущимъ непрерывнымъ рядомъ промежуточныхъ значеній.

3. Дано уравненіе

$$u^3 - u + z = 0,$$

которое, при  $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ , имѣетъ одинъ двойной корень, равный  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , и одинъ простой, равный  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Пусть точка  $A$  соотвѣтствуетъ  $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ ; если принять бесконечно-близкую точку за точку отправленія и описать замкнутую кривую вокругъ  $A$ , то, приписывая послѣдовательно  $z$  значенія, соотвѣтствующія точкамъ этой кривой, увидимъ, что изъ трехъ корней  $u_1, u_2, u_3$  уравненія (1), изъ которыхъ два первые весьма мало отличаются отъ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , а третій отъ  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $u^3$  приметъ свое начальное значеніе, а  $u_1$  и  $u_2$  взаимно перейдутъ другъ въ друга, когда точка, представляющая  $z$ , совершитъ свое вращеніе.

4. Изъ уравненія

$$\operatorname{tang} x = \frac{a \sin y}{\cos y + p}$$

можно вывести

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \frac{(1 + Pe^{y\sqrt{-1}})(1 + Qe^{-y\sqrt{-1}})}{(1 + Pe^{y\sqrt{-1}})(1 + Qe^{y\sqrt{-1}})},$$

гдѣ  $P$  и  $Q$  — постоянныя, связанныя съ  $a$  и  $p$ . Далѣе, беря логарифмы отъ обѣихъ частей, получаемъ рядъ

$$x = y - (P + Q)\sin y + \frac{P^2 + Q^2}{2} \sin 2y - \frac{P^3 + Q^3}{3} \sin 3y + \dots,$$

быстро сходящійся при весьма малыхъ  $P$  и  $Q$ , что имѣетъ мѣсто при весьма маломъ  $p$  и  $a$ , близкомъ къ единицѣ.

5. Уравненіе

$$\operatorname{tang} y = a \sin x + b$$

дастъ равнымъ образомъ возможность развернуть  $y$  въ рядъ по синусамъ и косинусамъ дугъ, кратныхъ относительно  $x$ . Вычисляя сначала  $e^{2y\sqrt{-1}}$ , затѣмъ беря, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, логарифмы отъ обѣихъ частей, находимъ:

$$\begin{aligned} y = p + 2f \cos p \cos x + \frac{2}{3} f^3 \cos 3p \sin 3x + \frac{2}{5} f^5 \cos 5p \sin 5x + \dots \\ + f^2 \sin 2p \cos 2x + \frac{1}{2} f^4 \sin 4p \cos 4x + \frac{1}{3} f^6 \sin 6p \cos 6x + \dots \end{aligned}$$


---

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### Разложение функций от многих переменных

#### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ТЭЙЛОРА НА ФУНКЦИЮ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 391. Если в функции от двух переменных  $\varphi(x, y)$  заменим  $x$  через  $x + h$  и  $y$  через  $y + k$ , то результат такой подстановки  $\varphi(x + h, y + k)$  мы можем развернуть в ряд по степеням  $h$  и  $k$  и их произведений по два. В самом деле, можно развернуть сначала  $\varphi(x + h, y)$  в ряд по степеням  $h$ , затем в полученном результате изменить  $y$  на  $y + k$  и каждый из коэффициентов развернуть в ряд по степеням  $k$ ; таким образом получим разложение  $\varphi(x + h, y + k)$ , и теорема Тейлора, относящаяся к случаю только одной переменной, даст возможность выполнить все вычисления. По такому пути шел Лагранж в теории функций и вывел без труда выражение общего члена разложения; но прием, употребленный Коши, приводит к более быстрому получению этого члена, давая в то же время более простое выражение для остатка.

Заменяем  $\varphi(x + h, y + k)$  через  $\varphi(x + ht, y + kt)$  и прилагаем к этой последней функции теорему Маклорена для разложения ее в ряд по степеням  $t$ ; полагая затем  $t = 1$ , находим искомое разложение.

Пусть

$$\varphi(x + ht, y + kt) = F(t);$$

имеем (§ 273):

$$\varphi(x + ht, y + kt) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\frac{t^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{F^{n-1}(0)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)}t^{n-1} + F^n(\theta t)\frac{t^n}{1 \cdot 2 \dots n}. \quad (1)$$

Для вычисления членов этого разложения составляем общее выражение  $F'(t)$ . Имеем:

$$F(t) = \varphi(x + ht, y + kt).$$

Приписывая  $t$  последовательные и равные между собою приращения, замечаем, что  $x + ht$  и  $y + kt$ , рассматриваемые, как два различные переменные, будут возрастать также равномерно, и формула, данная в § 162-м для дифференциала  $n$ -го порядка функции от двух переменных, годится для вычисления  $d^n F(t)$ . В самом деле, эта

формула предполагает, что двѣ какія-угодно переменныя,  $u$  и  $v$ , получаютъ одновременно постоянныя и произвольныя приращенія  $du$  и  $dv$ , а такъ какъ здѣсь  $x + ht = u$ ,  $y + kt = v$  и, слѣдовательно,  $du = hdt$ ,  $dv = kdt$ , то дифференціалъ  $d^p \varphi(u, v)$  не будетъ отличаться отъ дифференціала  $d^p F(t)$ , соответствующаго приращенію  $dt$  переменной  $t$ , повторенному  $p$  разъ; итакъ, имѣемъ символическое равенство (§ 162)

$$d^p F(t) = \left( \frac{d\varphi}{du} du + \frac{d\varphi}{dv} dv \right)^p, \quad (2)$$

гдѣ произведенія вида

$$\left( \frac{d\varphi}{du} \right)^k \left( \frac{d\varphi}{dv} \right)^{p-k}$$

должны быть замѣнены по раскрытіи степени черезъ  $\frac{d^p \varphi}{du^k dv^{p-k}}$ .

Дѣля на  $dt^p$  обѣ части уравненія (2) и имѣя въ виду, что, по предположенію,  $du = hdt$ ,  $dv = kdt$ , выводимъ:

$$\frac{d^p F}{dt^p} = \left( \frac{d\varphi}{du} h + \frac{d\varphi}{dv} k \right)^p, \quad (3)$$

гдѣ, конечно, остается въ силѣ предыдущее соглашеніе относительно обозначенія степеней производныхъ.

Производныя отъ функціи  $\varphi(u, v)$  по переменнымъ  $u$  и  $v$  при  $t = 0$ , очевидно, не будутъ отличаться отъ соответственныхъ производныхъ  $\varphi(x, y)$  по  $x$  и  $y$ ; значитъ, окончательно имѣемъ:

$$\left( \frac{d^p F}{dt^p} \right)_0 = \left( \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k \right)^p, \quad (4)$$

гдѣ попрежнему послѣ раскрытія степени во второй части всякое произведеніе вида  $\frac{d^k \varphi}{dx^k} \frac{d^{p-k} \varphi}{dy^{p-k}}$  должно быть замѣнено черезъ  $\frac{d^p \varphi}{dx^k dy^{p-k}}$ .

Множитель  $F^n(\theta t)$  въ послѣднемъ членѣ уравненія (1) получится также при помощи формулы (3). Составивъ выраженіе

$$\left( \frac{d\varphi}{du} h + \frac{d\varphi}{dv} k \right)^n$$

и выполнивъ въ полученномъ результатѣ надлежащія подстановки, мы должны замѣнить въ каждой производной  $u$  черезъ  $x + \theta ht$  и  $v$  черезъ  $y + \theta kt$ ; такимъ образомъ, можно написать символическое равенство

$$F^n(\theta t) = \left( \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k \right)^n,$$

гдѣ  $x$  и  $y$  въ окончательномъ результатѣ замѣняются черезъ  $x + \theta ht$  и  $y + \theta kt$ , которыя при  $t = 1$  перейдутъ въ  $x + \theta h$ ,  $y + \theta k$ .



§ 392. После предыдущихъ объясненій, полагая  $t = 1$  въ формулѣ (1) предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x + h, y + k) = & \varphi(x, y) + \left( \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k \right) + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} hk + \frac{d^2\varphi}{dy^2} k^2 \right) + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left( \frac{d^3\varphi}{dx^3} h^3 + 3 \frac{d^3\varphi}{dx^2 dy} h^2 k + 3 \frac{d^3\varphi}{dx dy^2} h k^2 + \frac{d^3\varphi}{dy^3} k^3 \right) + \dots \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \left[ \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} h^{n-1} + (n-1) \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-2} dy} h^{n-2} k + \dots + \frac{d^{n-1}\varphi}{dy^{n-1}} k^{n-1} \right] + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left( \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k \right)^n_{\substack{x=x+\theta h \\ y=y+\theta k}}, \end{aligned}$$

гдѣ послѣдній членъ представляетъ не что иное, какъ составленный по всѣмъ правиламъ  $(n+1)$ -ый членъ ряда съ замѣною въ немъ  $x$  черезъ  $x + \theta h$  и  $y$  черезъ  $y + \theta k$ , при чемъ  $\theta$  меньше единицы.

Если съ возрастаніемъ  $n$  послѣдній членъ во второй части стремится къ нулю, то  $\varphi(x + h, y + k)$  можно замѣнить безконечнымъ сходящимся рядомъ. Замѣтимъ, что это всегда будетъ имѣть мѣсто, если при замѣнѣ  $x$  черезъ  $x + \theta h$  и  $y$  черезъ  $y + \theta k$  ни одна изъ производныхъ функцій не можетъ обратиться въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ производныя, входящія въ выраженіе дополнительнаго члена, меньше по абсолютной величинѣ нѣкотораго числа  $H$ , то этотъ членъ, очевидно, меньше выраженія

$$\frac{H^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (h + k)^n,$$

которое стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи  $n$ .

§ 393. Если въ только-что найденномъ разложеніи замѣнить  $h$  черезъ  $dx$  и  $k$  черезъ  $dy$ , то совокупность членовъ измѣренія  $p$  относительно  $dx$  и  $dy$  дастъ  $d^p\varphi$ , и мы будемъ имѣть:

$$\varphi(x + dx, y + dy) = \varphi(x, y) + d\varphi + \frac{1}{2} d^2\varphi + \frac{1}{2 \cdot 3} d^3\varphi + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} d^n\varphi + \dots;$$

отсюда видно, что выраженіе приращенія функціи отъ двухъ перемѣнныхъ не отличается отъ выраженія, найденнаго для приращенія функціи отъ одной только перемѣнной.

Если  $dx$  и  $dy$  безконечно-малыя перваго порядка, то всякій членъ этого разложенія безконечно-малъ по отношенію къ предыдущему; слѣдовательно, останавливаясь на членѣ порядка  $n$ , мы дѣлаемъ ошибку, представляющую безконечно-малую порядка  $n + 1$ .

§ 394. Если въ разложеніи  $\varphi(x + h, y + k)$  положить  $x$  и  $y$  равными нулю, то получится разложеніе какой-угодно функціи отъ двухъ перемѣнныхъ,  $\varphi(h, k)$ , въ рядъ

по степенямъ переменныхъ  $h$  и  $k$  и ихъ произведений по два. Замѣняя совершенно произвольныя величины  $h$  и  $k$  черезъ  $x$  и  $y$ , будемъ имѣть:

$$\varphi(x, y) = \varphi(0,0) + \left[ x \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)_0 + y \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)_0 \right] + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[ x^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_0 + 2xy \left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)_0 + y^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)_0 \right] + \dots$$

Дополнительнымъ членомъ, когда мы прерываемъ рядъ послѣ  $n$ -го члена, является выраженіе

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[ x^n \frac{d^n \varphi}{dx^n} + nx^{n-1}y \frac{d^n \varphi}{dx^{n-1}dy} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 \frac{d^n \varphi}{dx^{n-2}dy^2} + \dots + y^n \frac{d^n \varphi}{dy^n} \right]$$

при замѣнѣ во всѣхъ входящихъ сюда производныхъ  $x$  черезъ  $\theta x$  и  $y$  черезъ  $\theta y$ , при чемъ  $\theta$ —неизвѣстное число, меньшее единицы.

§ 395. Приѣмъ, который намъ далъ предыдущія разложенія, распространяется безъ измѣненія на случай функціи отъ трехъ или бѣльшаго числа переменныхъ.

Пусть дана функція  $\varphi(x, y, z)$  отъ трехъ переменныхъ  $x, y, z$ , которымъ приписываются соотвѣтственно приращенія  $h, k, l$ ; для разложенія  $\varphi(x+h, y+k, z+l)$  рассмотримъ сначала функцію  $\varphi(x+ht, y+kt, z+lt)$ , которую мы развернемъ въ рядъ по степенямъ  $t$  и положимъ затѣмъ  $t=1$ . Такимъ образомъ, безъ всякаго различія, какъ и въ случаѣ двухъ переменныхъ, находимъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x+h, y+k, z+l) = & \varphi(x, y, z) + \left( h \frac{d\varphi}{dx} + k \frac{d\varphi}{dy} + l \frac{d\varphi}{dz} \right) + \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2} \left( h^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + l^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2hk \frac{d^2\varphi}{dxdy} + 2lh \frac{d^2\varphi}{dxdz} + 2kl \frac{d^2\varphi}{dydz} \right) + \dots, \end{aligned}$$

гдѣ общій членъ можетъ быть написанъ символически слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left( \frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k + \frac{d\varphi}{dz} l \right)^n,$$

при чемъ въ разложеніи этой степени всякое произведеніе вида

$$\left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^p \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^q \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^{n-p-q}$$

замѣняется черезъ

$$\frac{d^n \varphi}{dx^p dy^q dz^{n-p-q}};$$

дополнительнымъ членомъ является членъ, на которомъ прерывается безконечный рядъ, при замѣнѣ въ немъ  $x, y, z$  черезъ  $x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$ , гдѣ  $\theta$  меньше единицы.

Полагая  $h = dx$ ,  $k = dy$ ,  $l = dz$ , будемъ имѣть, какъ и въ случаѣ двухъ переменныхъ,

$$\varphi(x + dx, y + dy, z + dz) = \varphi(x, y, z) + d\varphi + \frac{1}{2} d^2\varphi + \frac{1}{6} d^3\varphi + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} d^n\varphi + \dots$$

Если  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  бесконечно-малыя перваго порядка, то каждый членъ этого разложенія бесконечно-малъ по отношенію къ предыдущему; слѣдовательно, останавливаясь на членѣ порядка  $n$ , мы дѣлаемъ ошибку, представляющую бесконечно-малую порядка  $n + 1$ .

#### Символическое выраженіе теоремы Тэйлора

§ 396. Разложеніе функціи  $\varphi(x + h, y + k)$  можетъ быть представлено символически подѣ весьма простымъ видомъ:

$$e^{h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}} \varphi(x, y),$$

гдѣ показательная функція  $e^{h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}}$  развертывается въ рядъ, какъ если бы показатель имѣлъ опредѣленное значеніе, и во всѣхъ членахъ послѣ умноженія на  $\varphi$  всякое произведеніе вида

$$h^p \left( \frac{d}{dx} \right)^p k^q \left( \frac{d}{dy} \right)^q \varphi$$

замѣняется черезъ

$$h^p k^q \frac{d^{p+q} \varphi}{dx^p dy^q}.$$

Полагая  $h = \Delta x$  и  $k = \Delta y$  и обозначая соотвѣтственное приращеніе  $\varphi$  черезъ  $\Delta\varphi$ , будемъ имѣть символически:

$$\Delta\varphi = (e^{\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy}} - 1)\varphi,$$

откуда

$$\Delta^n \varphi = (e^{\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy}} - 1)^n \varphi.$$

Эта формула дана Лапласомъ; она вполне аналогична формулѣ Лагранжа, данной въ § 343-мъ.

#### Распространеніе формулы Лагранжа на функціи отъ двухъ переменныхъ

§ 397. Пусть  $u$  и  $v$  будутъ двѣ функціи отъ переменныхъ  $x$  и  $y$ , опредѣляемыя совокупными уравненіями

$$\left. \begin{aligned} u &= a + x\varphi(u, v), \\ v &= b + y\psi(u, v). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предложимъ себѣ задачу — развернуть данную функцію отъ  $u$  и  $v$  въ рядъ по степенямъ  $x$  и  $y$  и ихъ произведеній по два.

Пусть  $z = F(u, v)$  данная функція; имѣемъ (§ 394):

$$z = z_0 + \left[ x \left( \frac{dz}{dx} \right)_0 + y \left( \frac{dz}{dy} \right)_0 \right] + \frac{1}{1 \cdot 2} \left[ x^2 \left( \frac{d^2z}{dx^2} \right)_0 + 2xy \left( \frac{d^2z}{dx dy} \right)_0 + y^2 \left( \frac{d^2z}{dy^2} \right)_0 \right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left[ x^n \left( \frac{d^n z}{dx^n} \right)_0 + nx^{n-1}y \left( \frac{d^n z}{dx^{n-1} dy} \right)_0 + \dots + y^n \left( \frac{d^n z}{dy^n} \right)_0 \right] + \dots,$$

и чтобы знать этотъ рядъ, представляющій  $z$ , нужно вычислить значенія различныхъ производныхъ отъ  $z$  по переменнымъ  $x$  и  $y$  при  $x$  и  $y$ , равныхъ нулю. Для этого воспользуемся приѣмомъ, подобнымъ приѣму (§ 311) въ случаѣ функціи только отъ одной переменной; здѣсь онъ будетъ заключаться въ томъ, чтобы выразить производныя, взятые по  $x$  и  $y$ , въ функціи производныхъ, взятыхъ по переменнымъ  $a$  и  $b$ , въ которыхъ можно было бы положить  $x = 0$ ,  $y = 0$  до выполненія дѣйствій и притти по-просту, какъ показываютъ уравненія (1), къ равенствамъ  $u = a$ ,  $v = b$ , послѣ чего дифференцированія придется выполнять лишь надъ явными функціями.

Дифференцируя уравненія (1) по  $x$ , затѣмъ по  $a$ , имѣемъ:

$$\frac{du}{dx} = \varphi(u, v) + x \left( \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{dx} \right),$$

$$\frac{dv}{dx} = y \left( \frac{d\psi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\psi}{dv} \frac{dv}{dx} \right),$$

$$\frac{du}{da} = 1 + x \left( \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{da} + \frac{d\varphi}{dv} \frac{dv}{da} \right),$$

$$\frac{dv}{da} = y \left( \frac{d\psi}{du} \frac{du}{da} + \frac{d\psi}{dv} \frac{dv}{da} \right);$$

не рѣшая этихъ уравненій, заключаемъ, по одному ихъ виду, о слѣдующихъ между производными  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{du}{da}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ ,  $\frac{dv}{da}$  соотношеніяхъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \varphi(u, v) \frac{du}{da}, \\ \frac{dv}{dx} &= \psi(u, v) \frac{dv}{da}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Итакъ, если  $z$  обозначаетъ какую-нибудь функцію отъ  $u$  и  $v$ , то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du} \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{dx},$$

$$\frac{dz}{da} = \frac{dz}{du} \frac{du}{da} + \frac{dz}{dv} \frac{dv}{da},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(u, v) \frac{dz}{da}. \quad (3)$$

Точно такъ же выводимъ соотношеніе

$$\frac{dz}{dy} = \psi(u, v) \frac{dz}{db}. \quad (4)$$

Уравненія (3) и (4) рѣшаютъ, для производныхъ перваго порядка, поставленную нами задачу; они даютъ выраженіе для производныхъ, взятыхъ по  $x$  и  $y$ , въ функціи отъ производныхъ, взятыхъ по  $a$  и  $b$ ; при  $x = 0$ ,  $y = 0$  находимъ, полагая  $z = F(u, v)$ ,

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)_0 = \varphi(a, b) \frac{dF(a, b)}{da},$$

$$\left( \frac{dz}{dy} \right)_0 = \psi(a, b) \frac{dF(a, b)}{db}.$$

Для вычисленія производныхъ высшаго порядка воспользуемся соотношеніями

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ f(u, v) \frac{du}{da} \right] &= \frac{d}{da} \left[ f(u, v) \frac{du}{dx} \right], \\ \frac{d}{dy} \left[ f(u, v) \frac{du}{db} \right] &= \frac{d}{db} \left[ f(u, v) \frac{du}{dy} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

справедливыми для какой бы то ни было функціи  $f(u, v)$ . Въ самомъ дѣлѣ, выполняя указанная дифференцированія въ первомъ изъ этихъ уравненій, пишемъ:

$$\left( \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} \right) \frac{du}{da} + f(u, v) \frac{d^2 u}{da dx} = \left( \frac{df}{du} \frac{du}{da} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{da} \right) \frac{du}{dx} + f(u, v) \frac{d^2 u}{dx da},$$

или, по сокращеніи общихъ членовъ въ обѣихъ частяхъ равенства,

$$\frac{dv}{dx} \frac{du}{da} = \frac{du}{dx} \frac{dv}{da},$$

а это представляетъ очевидное слѣдствіе изъ равенствъ (2).

Второе изъ уравненій (5) повѣряется такимъ же образомъ.

Теперь мы можемъ преобразовать производныя вида  $\frac{d^n z}{dx^n}$ ,  $\frac{d^n z}{dy^n}$ . Имѣемъ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[ \varphi(u, v) \frac{dz}{da} \right]$$



и, слѣдовательно, по формулѣ (5),

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d}{da} \left[ \varphi(u, v) \frac{dz}{dx} \right] = \frac{d}{da} \left[ \varphi(u, v)^2 \frac{dz}{da} \right].$$

Отсюда выводимъ:

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{d}{dx} \frac{d}{da} \left[ \varphi(u, v)^2 \frac{dz}{da} \right] = \frac{d}{da} \frac{d}{dx} \left[ \varphi(u, v)^2 \frac{dz}{da} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(u, v)^2 \frac{dz}{da} \right] = \frac{d^2}{da^2} \left[ \varphi(u, v)^3 \frac{dz}{da} \right];$$

продолжая точно такъ же и далѣе, найдемъ:

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ \varphi(u, v)^n \frac{dz}{da} \right]; \quad (6)$$

такое же преобразование получимъ и для второй производной:

$$\frac{d^n z}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \left[ \psi(u, v)^n \frac{dz}{db} \right]. \quad (7)$$

Приравнивая въ этихъ формулахъ  $x$  и  $y$  нулю и полагая  $z = F(u, v)$ , находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^n z}{dx^n} \right)_0 &= \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left[ \varphi(a, b)^n \frac{dF(a, b)}{da} \right], \\ \left( \frac{d^n z}{dy^n} \right)_0 &= \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \left[ \psi(a, b)^n \frac{dF(a, b)}{db} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Остается вычислить производныя вида  $\frac{d^n z}{dx^p dy^q}$ .

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx dy} &= \frac{d}{dy} \left( \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{dy} \left[ \varphi(u, v) \frac{dz}{da} \right] = \frac{d\varphi(u, v)}{dy} \frac{dz}{da} + \varphi(u, v) \frac{d^2 z}{da dy} = \\ &= \frac{d\varphi(u, v)}{db} \frac{dz}{da} \psi(u, v) + \varphi(u, v) \frac{d}{da} \left[ \psi(u, v) \frac{dz}{db} \right]; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\frac{d^2 z}{dx dy} = \psi(u, v) \frac{d\varphi(u, v)}{db} \frac{dz}{da} + \varphi(u, v) \frac{d\psi(u, v)}{da} \frac{dz}{db} + \varphi(u, v) \psi(u, v) \frac{d^2 z}{da db}, \quad (9)$$

гдѣ, такимъ образомъ,  $\frac{d^2 z}{dx dy}$  выражено въ функціи производныхъ, взятыхъ по  $a$  и  $b$ ; чтобы сдѣлать въ нихъ  $x = 0$ ,  $y = 0$ , достаточно замѣнить, до дифференцированій,  $u$  черезъ  $a$  и  $v$  черезъ  $b$ .

Переходимъ теперь къ производной  $\frac{d^n z}{dx^p dy^q}$ . Мы нашли:

$$\frac{d^p z}{dx^p} = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \left[ \varphi(u, v)^p \frac{dz}{da} \right].$$

Нужно взять  $q$  разъ производную отъ этого выраженія по  $y$ . Но, полагая

$$u_1 = a + x [\varphi(u_1, v_1)]^p,$$

$$v_1 = b + y \psi(u_1, v_1)$$

и  $z_1 = F(u_1, v_1)$ , мы, по предыдущему, будемъ имѣть:

$$\frac{dz_1}{dx} = \varphi(u_1, v_1)^p \frac{dz_1}{da},$$

и какъ, для  $x = 0$ ,  $u_1$  и  $v_1$  обращаются, каково бы ни было  $y$ , соответственно въ  $u$  и  $v$  и, слѣдовательно,  $z$ , въ  $z$ , то

$$\left( \frac{d^p z}{dx^p} \right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \left[ \left( \frac{dz_1}{dx} \right)_0 \right], \quad (10)$$

гдѣ указатель нуль при производныхъ  $\frac{dz_1}{dx}$ ,  $\frac{d^p z}{dx^p}$  относится къ переменнй  $x$ , приравняваемой нулю. Переменныя  $x$  и  $y$  независимы; значитъ, безразлично, предполагать ли  $x = 0$  до или послѣ дифференцированія по  $y$ , и, слѣдовательно, для вычисленія  $\left( \frac{d^n z}{dx^p dy^q} \right)_0$  мы можемъ продифференцировать  $q$  разъ выраженіе (10) по  $y$  и затѣмъ положить  $y = 0$ . Итакъ, имѣемъ:

$$\left( \frac{d^n z}{dx^p dy^q} \right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \frac{d^q}{dy^q} \left[ \left( \frac{dz_1}{dx} \right)_0 \right].$$

Порядокъ дифференцированій по  $x$  и  $y$  во второй части можетъ быть взаимно измѣненъ, но при условіи, чтобы  $x$  было приравнено нулю только въ окончательномъ результатѣ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы вычислить  $\frac{d^{q+1} z_1}{dx dy^q}$  и затѣмъ положить  $x = 0$ ,  $y = 0$ , можно, какъ только-что было замѣчено, продифференцировать по  $x$  и положить  $x = 0$  до дифференцированій по  $y$ . Итакъ, имѣемъ:

$$\left( \frac{d^n z}{dx^p dy^q} \right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^q z_1}{dy^q} \right),$$

гдѣ во второй части  $x$  и  $y$  должны быть приравнены нулю послѣ выполненія дѣйствій.

Прилагая къ функціи  $z_1$  общіе результаты, полученные для функціи  $z$ , имѣемъ:

$$\frac{d^q z_1}{dy^q} = \frac{d^{q-1}}{db^{q-1}} \left[ \psi(u_1, v_1)^q \frac{dz_1}{db} \right]. \quad (11)$$

Вмѣсто того чтобы дифференцировать это выраженіе по  $x$  и въ полученномъ результатѣ положить  $x = 0$ ,  $y = 0$ , очевидно возможно положить въ немъ  $y = 0$  до дифференцированія; но, полагая

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= a + x\varphi(u_2, v_2)^p, \\ v_2 &= b + y\psi(u_2, v_2)^q, \\ z_2 &= F(u_2, v_2), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

гдѣ  $u_2$  и  $v_2$  совпадаютъ съ  $u_1$  и  $v_1$  при  $y = 0$ , видимъ, что произведеніе

$$\psi(u_1, v_1)^q \frac{dz_1}{db},$$

когда въ немъ предполагаютъ  $y = 0$ , можетъ быть замѣнено черезъ  $\frac{dz_2}{dy}$ , и мы, наконецъ, имѣемъ:

$$\left( \frac{d^n z}{dx^p dy^q} \right)_0 = \frac{d^{p-1}}{da^{p-1}} \frac{d}{dx} \frac{d^{q-1}}{db^{q-1}} \left( \frac{dz_2}{dy} \right) = \frac{d^{p+q-2}}{da^{p-1} ab^{q-1}} \left( \frac{d^2 z_2}{dx dy} \right);$$

здѣсь  $z_2$  есть та величина, въ которую обращается  $z$  при замѣнѣ  $u$  и  $v$  на  $u_2$  и  $v_2$ , опредѣляемая уравненіями (12). Такъ какъ эти уравненія того же вида, что и данные, то  $\frac{d^2 z_2}{dx dy}$  получится по формулѣ (9), въ которой  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  для этой цѣли должны быть замѣнены соответственно черезъ  $\varphi(u, v)^p$ ,  $\psi(u, v)^q$ .

#### Доказательство Якоби

§ 398. Предыдущій результатъ, полученный въ первый разъ Лапласомъ, былъ доказанъ Якоби посредствомъ разсужденій, подобныхъ тѣмъ, какія были приведены въ § 314-омъ.

Доказательство Якоби покоится на отождествленіи двухъ разложеній одной и той же функціи. Это отождествленіе, какъ было уже говорено, требуетъ ограниченій и предполагаетъ условія, которыхъ знаменитый авторъ не испытывалъ. Такимъ образомъ, предстоящее доказательство, не смотря на все свое изящество, далеко не отличается строгостью.

Якоби вначалѣ замѣчаетъ, что если  $f(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  представляютъ двѣ функціи отъ  $x$  и  $y$ , развертывающіяся по положительнымъ и отрицательнымъ степенямъ переменныхъ, то выраженіе

$$\frac{df}{dx} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{d\varphi}{dx}, \quad (1)$$

названное имъ (§ 71) определителемъ системы двухъ функций, никогда не содержитъ въ своемъ разложеніи члена съ  $\frac{1}{xy}$ . Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\frac{df}{dx} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dy} \left( \varphi \frac{df}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left( \varphi \frac{df}{dy} \right).$$

Разложеніе перваго члена второй части не содержитъ (§ 314) члена съ  $\frac{1}{y}$ , разложеніе втораго члена не содержитъ члена съ  $\frac{1}{x}$ ; значитъ, ни то, ни другое, а за ними и ихъ разность не содержатъ члена съ  $\frac{1}{xy}$ .

Выраженіе

$$\frac{\frac{df}{dx} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^{p+1} f^{q+1}} \quad (2)$$

обладаетъ тѣмъ же свойствомъ, каковы бы ни были числа  $p$  и  $q$ , лишь бы только хотя одно изъ нихъ отличалось отъ нуля.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p\varphi^p} &= \varphi_1, \\ -\frac{1}{qf^q} &= f_1, \end{aligned}$$

видимъ, что выраженіе (2) равно

$$\frac{df_1}{dx} \frac{d\varphi_1}{dy} - \frac{df_1}{dy} \frac{d\varphi_1}{dx},$$

и теорема къ нему, очевидно, приложима.

При  $q = 0$  доказательство должно быть измѣнено, но заключеніе останется то же. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{1}{f\varphi^{p+1}} \left( \frac{df}{dx} \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{d\varphi}{dx} \right) = -\frac{1}{p} \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{\varphi^p} \frac{df}{dx} \right) + \frac{1}{p} \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dy} \frac{1}{\varphi^p} \right). \quad (3)$$

Выраженія же  $\frac{df}{dx}$  и  $\frac{df}{dy}$  могутъ быть развернуты въ ряды по степенямъ переменныхъ.

Дѣйствительно, полагая

$$f = A_1 y^{\mu_1} x^{\nu_1} + A_2 y^{\mu_2} x^{\nu_2} + \dots + A_n y^{\mu_n} x^{\nu_n} + \dots,$$

выводимъ:

$$1f = 1A_1 y^{\mu_1} x^{\nu_1} + 1 \left( 1 + \frac{A_2}{A_1} y^{\mu_2 - \mu_1} x^{\nu_2 - \nu_1} + \dots \right).$$

Второй членъ, будучи вида  $l(1 + u)$ , развертывается въ рядъ по степенямъ  $u$  и, слѣдовательно, по степенямъ  $x$  и  $y$ ; первый членъ хотя не развертывается, но имѣетъ производную, взятую по  $x$ ,  $\frac{\nu_1}{x}$  и производную, взятую по  $y$ ,  $\frac{\mu_1}{y}$ , такъ что выраженія  $\frac{dlf}{dx}$  и  $\frac{dlf}{dy}$ , т.-е.  $\frac{\frac{df}{dx}}{f}$ ,  $\frac{\frac{df}{dy}}{f}$ , оба развертываются въ ряды по степенямъ  $x$  и  $y$ . Значитъ, то же можно сказать про произведенія  $\frac{1}{\varphi^p} \frac{\frac{df}{dx}}{f}$ ,  $\frac{1}{\varphi^p} \frac{\frac{df}{dy}}{f}$ , и, слѣдовательно, производныя отъ этихъ произведеній не могутъ содержать членовъ съ  $\frac{1}{xy}$ .

Если  $p$  и  $q$  одновременно равны нулю, выше приведенное доказательство также не приложимо, и на этотъ разъ заключеніе перестаетъ быть точнымъ. Разложеніе выраженія

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{df}{dx}}{f\varphi}, \quad (4)$$

вообще говоря, содержитъ членъ съ  $xy$ . Дѣйствительно, имѣемъ:

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx} \frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dy} \frac{df}{dx}}{f\varphi} = \frac{dl\varphi}{dx} \frac{dlf}{dy} - \frac{dl\varphi}{dy} \frac{dlf}{dx}.$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= A_1 x^{\mu_1} y^{\nu_1} + A_2 x^{\mu_2} y^{\nu_2} + \dots, \\ f(x, y) &= B_1 x^{m_1} y^{n_1} + B_2 x^{m_2} y^{n_2} + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

отсюда выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} l\varphi(x, y) &= lA_1 x^{\mu_1} y^{\nu_1} + l\left(1 + \frac{A_2}{A_1} x^{\mu_2 - \mu_1} y^{\nu_2 - \nu_1} + \dots\right), \\ lf(x, y) &= lB_1 x^{m_1} y^{n_1} + l\left(1 + \frac{B_2}{B_1} x^{m_2 - m_1} y^{n_2 - n_1} + \dots\right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Развертывая въ рядъ вторые члены во вторыхъ частяхъ этихъ равенствъ и беря производныя по  $x$  и по  $y$ , находимъ:

$$\frac{dl\varphi(x, y)}{dx} = \frac{\mu_1}{x} + P,$$

$$\frac{dl\varphi(x, y)}{dy} = \frac{\nu_1}{y} + Q,$$

$$\frac{dlf(x, y)}{dx} = \frac{m_1}{x} + R,$$

$$\frac{dlf(x, y)}{dy} = \frac{n_1}{y} + S,$$



при чемъ ряды  $P$  и  $R$  не содержатъ ни одного члена съ  $\frac{1}{x}$ , а ряды  $Q$  и  $S$  — ни одного члена съ  $\frac{1}{y}$ . По этимъ формуламъ разложеніе выраженія (4), очевидно, содержитъ членъ съ  $\frac{1}{xy}$ , имѣющій коэффициентомъ

$$\mu_1 n_1 - \nu_1 m_1.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что по вышеуказанному приему полученія разложенія одна и та же функція можетъ дать мѣсто различнымъ рядамъ, такъ какъ  $\mu_1, \nu_1, m_1, n_1$  обозначаютъ здѣсь показатели  $x$  и  $y$  въ первыхъ членахъ рядовъ (5), т.-е. въ двухъ какихъ-угодно членахъ, которыхъ мы по нашему произволу напомнимъ первыми. Но если желательно, чтобы ряды были сходящимися для весьма малыхъ значеній  $x$  и  $y$ , то выборъ перестаетъ быть произвольнымъ, и нерѣдко случается, что требуемому условію нельзя даже удовлетворить. Если, при бесконечно-маломъ  $x$ ,  $\varphi(x, y)$  можно считать пропорціональнымъ  $x$ , а  $f(x, y)$  — пропорціональнымъ  $y$ , то должно принять  $\mu_1 = 1, \nu_1 = 0, m_1 = 0, n_1 = 1$ , и коэффициентомъ при  $\frac{1}{xy}$  будетъ единица: это предположеніе мы сдѣлаемъ въ разсужденіяхъ, къ которымъ сейчасъ перейдемъ; но здѣсь ясно, на сколько разсужденіе Якоби далеко отъ строгости.

### § 399. Возьмемъ теперь снова два уравненія

$$\begin{cases} u = a + x\varphi(u, v), \\ v = b + y\psi(u, v). \end{cases} \quad (1)$$

Постараемся развернуть функцію  $F(u, v)$ , которую мы обозначимъ черезъ  $z$ , въ рядъ по степенямъ  $x$  и  $y$ . Полагаемъ, что для большей простоты,

$$\begin{aligned} u - a &= u_1, \\ v - b &= v_1; \end{aligned}$$

множители  $\varphi$  и  $\psi$  явятся данными функціями отъ  $u_1$  и  $v_1$ , и можно будетъ, отбрасывая указатели, предложенныя уравненія замѣнить слѣдующими:

$$\begin{cases} u = x\varphi(u, v), \\ v = y\psi(u, v), \end{cases} \quad (2)$$

гдѣ  $\varphi$  и  $\psi$  всегда обозначаютъ данныя функціи отъ  $u$  и  $v$ .

Пусть

$$z = \Sigma A_n^m x^m y^n \quad (3)$$

будетъ разложеніе функціи  $z$ . Для опредѣленія коэффициента  $A_n^m$  умножаемъ уравненіе (3) на

$$\frac{\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du}}{x^{m+1} y^{n+1}}.$$

Развертывая затѣмъ обѣ части въ рядъ по степенямъ  $u$  и  $v$  и замѣчая, что  $x$  и  $y$  пропорціональны здѣсь соответственно  $u$  и  $v$ , находимъ, что, для малыхъ значеній  $u$  и  $v$ , только одинъ членъ съ  $\frac{1}{uv}$  во второй части получится, по предыдущему, изъ члена съ  $x^m y^n$  и будетъ имѣть коэффициентомъ  $A_n^m$ ; слѣдовательно,  $A_n^m$  есть коэффициентъ члена съ  $\frac{1}{uv}$  въ разложеніи первой части, равной

$$z \frac{\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du}}{x^{m+1} y^{n+1}};$$

это же послѣднее выраженіе можно написать слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{1}{mn} z \left[ \frac{dx^{-m}}{du} \frac{dy^{-n}}{dv} - \frac{dx^{-m}}{dv} \frac{dy^{-n}}{du} \right] = \frac{1}{mn} \left[ \frac{dx^{-m}}{du} \frac{d}{dv} (zy^{-n}) - \frac{dx^{-m}}{dv} \frac{d}{du} (zy^{-n}) - \frac{d}{du} \left( x^{-m} y^{-n} \frac{dz}{dv} \right) + \right. \\ \left. + x^{-m} y^{-n} \frac{d^2 z}{dudv} + x^{-m} \frac{dy^{-n}}{du} \frac{dz}{dv} + y^{-n} \frac{dx^{-m}}{dv} \frac{dz}{du} \right]. \quad (4)$$

Но члены

$$\frac{dx^{-m}}{du} \frac{d}{dv} (zy^{-n}) - \frac{dx^{-m}}{dv} \frac{d}{du} (zy^{-n}), \quad \frac{d}{du} \left( x^{-m} y^{-n} \frac{dz}{dv} \right)$$

не даютъ (§ 398) члена съ  $\frac{1}{uv}$ ; слѣдовательно, выраженіе (4) можетъ быть замѣнено выраженіемъ

$$\frac{1}{mn} \left( x^{-m} y^{-n} \frac{d^2 z}{dudv} + x^{-m} \frac{dy^{-n}}{du} \frac{dz}{dv} + y^{-n} \frac{dx^{-m}}{dv} \frac{dz}{du} \right),$$

въ разложеніи котораго коэффициентъ при  $\frac{1}{uv}$  будетъ равенъ  $A_n^m$ . Замѣняя здѣсь  $x$  и  $y$ ,  $\frac{dy}{du}$ ,  $\frac{dx}{dv}$  ихъ значеніями, выведенными изъ уравненій (2), находимъ

$$\frac{\left( \frac{1}{mn} \varphi^m \psi^n \frac{d^2 z}{dudv} + \frac{1}{m} \varphi^m \psi^{n-1} \frac{d\psi}{du} \frac{dz}{dv} + \frac{1}{n} \psi^n \varphi^{m-1} \frac{d\varphi}{dv} \frac{dz}{du} \right)}{u^m v^n}.$$

Коэффициентъ при  $\frac{1}{uv}$  есть, очевидно, коэффициентъ при  $u^{m-1} v^{n-1}$  въ разложеніи числителя, т.-е., по формулѣ Тейлора,

$$\frac{d^{m+n-2} \left( \frac{1}{mn} \varphi^m \psi^n \frac{d^2 z}{dudv} + \frac{1}{m} \varphi^m \psi^{n-1} \frac{d\psi}{du} \frac{dz}{dv} + \frac{1}{n} \psi^n \varphi^{m-1} \frac{d\varphi}{dv} \frac{dz}{du} \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot du^{m-1} dv^{n-1}}.$$

Въ этомъ выраженіи нужно замѣнить  $u$  и  $v$  нулями, или, что одно и то же, положить, принимая во вниманіе первоначальное обозначеніе,  $u = a$ ,  $v = b$ ; легко видѣть полное его тождество съ формулою Лапласа.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### Разложения въ произведенія съ безконечнымъ числомъ множителей

#### Условіе сходимости безконечныхъ произведеній

§ 400. Произведеніе, состоящее изъ безконечнаго числа множителей, можетъ быть сходящимся, очевидно, только въ томъ случаѣ, если множители стремятся къ единицѣ при безпредѣльномъ возрастаніи ихъ порядка. Въ противномъ случаѣ всякій новый множитель измѣняетъ на конечную величину произведеніе всѣхъ предшествующихъ множителей и нельзя здѣсь имѣть опредѣленнаго предѣла.

Поэтому мы рассмотримъ только произведенія вида

$$P = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_3) \dots (1 + \alpha_n) \dots, \quad (1)$$

въ которыхъ  $\alpha_n$ , вещественное или мнимое, стремится къ нулю съ увеличеніемъ  $n$ .

Предположимъ, во-первыхъ, что всѣ множители—вещественные и что, кромѣ того, при всѣхъ  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  заразъ положительныхъ или заразъ отрицательныхъ, множители произведенія или всѣ больше, или всѣ меньше единицы. Чтобы произведеніе не возрастало безпредѣльно въ первомъ случаѣ и не стремилось къ нулю во второмъ, необходимо и достаточно, чтобы рядъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

былъ сходящимся.

Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ

$$P_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n); \quad (2)$$

очевидно, что для сходимости произведенія  $P$  необходимо и достаточно, чтобы оно, при весьма большомъ  $n$ , весьма мало отличалось отъ  $P_n$  и чтобы, слѣдовательно, произведеніе множителей, слѣдующихъ за  $(1 + \alpha_n)$  весьма мало отличалось отъ единицы, или, что одно и то же, чтобы сумма ихъ логарифмовъ

$$l(1 + \alpha_{n+1}) + l(1 + \alpha_{n+2}) + \dots + l(1 + \alpha_{n+p})$$

была безконечно-мала при неограниченно большомъ  $p$ . Но, обозначая черезъ  $k$  весьма малое число, положительное или отрицательное, имѣемъ:

$$l(1 + k) = k - \frac{\epsilon k^2}{2},$$

гдѣ  $\epsilon$  меньше единицы, хотя бесконечно-мало отличается отъ нея при  $k$  бесконечно-маломъ; отсюда заключаемъ:

$$1(1 + \alpha_{n+1}) + 1(1 + \alpha_{n+2}) + \dots + 1(1 + \alpha_{n+p}) = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p} - \\ - \frac{1}{2}(\epsilon_1 \alpha_{n+1}^2 + \epsilon_2 \alpha_{n+2}^2 + \dots + \epsilon_p \alpha_{n+p}^2). \quad (3)$$

Если рядъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

сходящійся, то первая часть выраженія послѣ знака равенства бесконечно-мала при  $n$  бесконечно-большомъ; значитъ, и подавно бесконечно-мала вторая часть того же выраженія, составленная изъ бесконечно-малыхъ членовъ, умноженныхъ на числа, меньшія единицы. Такимъ образомъ, первая часть равенства (3) тоже бесконечно-мала и, слѣдовательно, произведеніе  $P$  — сходящееся.

Наоборотъ, если рядъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$$

расходящійся, то первая часть выраженія послѣ знака равенства безпредѣльно увеличивается вмѣстѣ съ  $p$ , а вторая часть того же выраженія, если остается или не представляетъ конечной величины, будетъ при возрастающихъ значеніяхъ  $n$  бесконечно-малою по отношенію къ первой. Такимъ образомъ, первая часть равенства (3) безпредѣльно увеличивается по абсолютной величинѣ, и, значитъ, произведеніе, для котораго она служитъ логарифмомъ, или безпредѣльно увеличивается, или стремится къ нулю. Слѣдовательно, и самое произведеніе  $P$  или безпредѣльно увеличивается, или же стремится къ нулю: ни въ томъ, ни въ другомъ случаѣ оно не можетъ считаться сходящимся.

**§ 401.** Изъ предыдущаго доказательства, какъ очевидное слѣдствіе, вытекаетъ болѣе общая теорема: каковы бы ни были вещественныя числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , произведеніе

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) \dots$$

будетъ сходящимся, когда оба ряда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \dots$$

сходящіеся.

Произведеніе стремится къ нулю, когда первый изъ рядовъ — сходящійся, а второй — расходящійся.

Этотъ послѣдній случай, очевидно, никогда не представится, если  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  всѣ одного знака.

Разсмотримъ, напр., произведеніе

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \dots;$$

здѣсь вторые члены биномовъ образуютъ сходящійся, а ихъ квадраты — расходящійся рядъ. Значить, произведение имѣетъ предѣломъ нуль. Первое правило приводитъ къ тому же заключенію.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$(1 - \alpha_n) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

имѣемъ:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n+1} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n})} + \frac{1}{\sqrt{2n} \cdot \sqrt{2n+1}}, \end{aligned}$$

откуда легко усмотрѣть, что рядъ съ общимъ членомъ  $\alpha_n$  — расходящійся.

**§ 402.** Въ большинствѣ случаевъ предыдущія теоремы даютъ возможность судить о сходимости произведенія, связывая ее со сходимостью ряда, легко поддающагося непосредственному изученію. Однако иногда сходимость или расходимость произведенія очевидна а priori и даетъ возможность судить о соответствующемъ рядѣ. Пусть, напр.,

$$P = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots$$

Произведение  $(n - 1)$  первыхъ множителей равно

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n};$$

значить,  $P$  имѣетъ предѣломъ нуль, и, слѣдовательно, рядъ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

расходящійся, что уже было доказано въ § 228-мъ.

**§ 403.** Сходимость произведенія, состоящаго изъ мнимыхъ множителей, требуетъ, чтобы вещественная часть множителей приближалась къ единицѣ, а коэффициентъ при  $\sqrt{-1}$  стремился бы къ нулю. Относительно сходимости произведений этого рода мы ограничимся доказательствомъ слѣдующей теоремы.

*Произведение*

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) \dots \quad (1)$$

*стремится къ конечному предѣлу всякій разъ, какъ рядъ, общій членъ котораго равенъ mod  $u_n$ , сходящійся.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$u_n = a_n + b_n \sqrt{-1};$$



каждое изъ двухъ вещественныхъ чиселъ  $a_n$  и  $b_n$  по абсолютному значенію меньше  $\text{mod } u_n$ ; слѣдовательно, изъ нашего предположенія вытекаетъ, что абсолютныя значенія какъ  $a_n$ , такъ и  $b_n$ , образуютъ сходящіеся ряды.

Отмѣтивъ это, докажемъ сначала, что модуль произведенія (1) не можетъ ни стремиться къ нулю, ни увеличиваться безпредѣльно.

Имѣемъ

$$1 + u_n = 1 + a_n + b_n \sqrt{-1};$$

модуль этого множителя есть

$$\sqrt{(1 + a_n)^2 + b_n^2} = 1 + a_n + \varepsilon b_n,$$

при чемъ  $\varepsilon$ , имѣя приближеннымъ значеніемъ  $\frac{b_n}{2}$ , стремится къ нулю съ возрастаніемъ  $n$ . Итакъ, модулемъ произведенія множителей, слѣдующихъ за  $n$ -ымъ, будетъ

$$(1 + a_{n+1} + \varepsilon_1 b_{n+1})(1 + a_{n+2} + \varepsilon_2 b_{n+2}) \dots (1 + a_{n+p} + \varepsilon_p b_{n+p}); \quad (2)$$

такъ какъ ряды, общіе члены которыхъ  $a_n$  и  $b_n$ , сходящіеся независимо отъ знаковъ ихъ членовъ, то по теоремѣ § 400-го произведеніе (2) будетъ стремиться къ конечному предѣлу при замѣнѣ въ немъ  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$  ихъ абсолютными значеніями, взятыми всѣ съ однимъ и тѣмъ же знакомъ, положительнымъ или отрицательнымъ; значитъ, оно не можетъ ни стремиться къ нулю, ни увеличиваться безпредѣльно.

Полагаемъ теперь

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_n) = p_n + q_n \sqrt{-1};$$

будемъ имѣть

$$p_{n+1} + q_{n+1} \sqrt{-1} = (1 + u_{n+1})(p_n + q_n \sqrt{-1}) = (1 + a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{-1})(p_n + q_n \sqrt{-1}).$$

Приравнивая другъ другу отдѣльно вещественныя части и отдѣльно мнимыя обѣихъ частей этого равенства, пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - b_{n+1} q_n + p_n a_{n+1}, \\ q_{n+1} &= q_n + a_{n+1} q_n + b_{n+1} p_n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

т.-е.

$$\left. \begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= p_n a_{n+1} - q_n b_{n+1}, \\ q_{n+1} - q_n &= q_n a_{n+1} + p_n b_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Замѣняя послѣдовательно въ этихъ послѣднихъ равенствахъ  $n$  черезъ  $n+1, n+2, \dots, n+r-1$  и складывая между собою по-членно равенства, полученные изъ перваго, включая и само первое, и отдѣльно отъ этихъ равенства, полученные изъ втораго, включая и само второе, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} p_{n+r} - p_n &= p_n a_{n+1} + p_{n+1} a_{n+2} + \dots + p_{n+r-1} a_{n+r} - q_n b_{n+1} - q_{n+1} b_{n+2} - \dots - q_{n+r-1} b_{n+r}, \\ q_{n+r} - q_n &= q_n a_{n+1} + q_{n+1} a_{n+2} + \dots + q_{n+r-1} a_{n+r} + p_n b_{n+1} + p_{n+1} b_{n+2} + \dots + p_{n+r-1} b_{n+r}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Такъ какъ модуль  $p_n + q_n\sqrt{-1}$  не увеличивается безпредѣльно, то  $p_n$  и  $q_n$  остаются оба ниже нѣкотораго предѣла, и, слѣдовательно, сходимость рядовъ, общіе члены которыхъ равны абсолютнымъ значеніямъ  $a_n$  и  $b_n$ , показываетъ, что вторыя части уравненій (5) безконечно-малы, каково-бы ни было  $r$ , когда  $n$  безконечно-велико; значить,  $p_n$  и  $q_n$  стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ, и произведеніе будетъ сходящимся, что и требовалось доказать.

Напр., произведеніе

$$\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)\left(1 - \frac{1}{a-b}\right)\left(1 - \frac{1}{a+2b}\right)\left(1 - \frac{1}{a-2b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{a+nb}\right)\left(1 - \frac{1}{a-nb}\right) \dots \quad (6)$$

сходящееся, каковы бы ни были вещественныя или мнимыя значенія  $a$  и  $b$ ; здѣсь за общій множитель слѣдуетъ принять произведеніе

$$\left(1 - \frac{1}{a-nb}\right)\left(1 - \frac{1}{a+nb}\right) = 1 + \frac{1-2a}{a^2 - n^2b^2}.$$

Такимъ образомъ, мы должны положить

$$u_n = \frac{1-2a}{a^2 - n^2b^2}.$$

Но, каковы бы ни были  $a$  и  $b$ , какъ вещественная, такъ и мнимая часть такого выраженія будетъ, для большихъ значеній  $n$ , вида  $\frac{k_n}{n^2}$ , гдѣ  $k_n$  остается конечнымъ при безпредѣльно возрастающемъ  $n$ , и такъ какъ рядъ съ общимъ членомъ  $\frac{k_n}{n^2}$  — сходящійся независимо отъ знаковъ его членовъ, то и само произведеніе (6) — сходящееся.

Нужно, конечно, исключить случай, когда отношеніе  $\frac{a}{b}$  является цѣлымъ, вслѣдствіе чего одинъ изъ множителей произведенія обращается въ безконечность.

#### ВЫРАЖЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ФУНКЦІЙ ВЪ ВИДѢ БЕЗКОНЕЧНЫХЪ ПРОИЗВЕДЕНІЙ

##### § 404. Выраженіе $\sin x$ .—Мы нашли (§ 293):

$$\sin mx = m \left( \sin x - \frac{m^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots \right). \quad (1)$$

Когда  $m$  — нечетное цѣлое число, то вторая часть этого равенства состоитъ изъ конечнаго числа членовъ и приводится къ многочлену  $m$ -ой степени, расположенному по степенямъ  $\sin x$ . Приведенную формулу въ этомъ случаѣ можно доказать болѣе непосредственно и вывести ее изъ основныхъ формулъ, выражающихъ  $\sin(a+b)$  и  $\cos(a+b)$  и дающихъ, какъ извѣстно, возможность составлять синусы и косинусы кратныхъ дугъ съ исключеніемъ, въ данномъ случаѣ, степеней косинуса, которыя здѣсь всѣ являются съ четнымъ показателемъ.

Настоящее доказательство имѣетъ то преимущество, что прилагается не только къ вещественнымъ, но и къ мнимымъ значеніямъ дуги  $x$ .

При  $m$  цѣломъ и нечетномъ вторая часть уравненія (1), будучи многочленомъ  $m$ -ой степени, разлагается на множители первой степени, соответствующихъ корнямъ уравненія  $\sin mx = 0$ , въ которомъ  $\sin x$  принимается за неизвѣстную. Всѣ эти корни, какъ извѣстно, вещественные и равны  $0, \pm \sin \frac{\pi}{m}, \pm \sin \frac{2\pi}{m}, \dots, \pm \sin \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}$ ; слѣдовательно, обозначая черезъ  $C$  постоянную, не зависящую отъ  $x$ , имѣемъ:

$$\sin mx = C \sin x \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{m} \right) \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{2\pi}{m} \right) \dots \left( \sin^2 x - \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} \right),$$

или, что одно и то же, полагая

$$C \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{2\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} C',$$

пишемъ:

$$\sin mx = C' \sin x \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} \right) \dots \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right).$$

Въ этой формулѣ  $m$  обозначаетъ цѣлое нечетное число и  $x$  — какую-угодно вещественную или мнимую дугу.

При  $x$  бесконечно-маломъ первая часть можетъ быть замѣнена черезъ  $mx$ , а вторая черезъ  $C'x$ ; значить  $C'$  равно  $m$ , и формула принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\sin mx = m \sin x \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} \right) \dots \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right). \quad (2)$$

Полагаемъ  $mx = z$  и пусть  $m$  растеть безпредѣльно, въ то время какъ  $z$  остается безъ измѣненія; вторая часть явится произведеніемъ бесконечнаго числа множителей. Поищемъ его предѣльное выраженіе.

Когда  $m$  безгранично увеличивается,  $x$ , равное  $\frac{z}{m}$ , стремится къ нулю; значить,  $\sin x$  можно замѣнить черезъ  $\frac{z}{m}$ , и  $m \sin x$  черезъ  $z$ . Какой-угодно изъ множителей

$$1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}},$$

по той же причинѣ, можно замѣнить предѣльнымъ значеніемъ

$$1 - \frac{x^2}{\frac{k^2 \pi^2}{m^2}} = 1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2};$$

такимъ образомъ, уравненіе (2) обращается въ предѣлѣ въ

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \dots, \quad (3)$$

но это доказательство, какъ не строгое, необходимо дополнить.

Въ самомъ дѣлѣ, хотя вѣрно, что во второй части формулы (2) множитель, порядокъ котораго опредѣляется числомъ  $k$ , приближается къ поставленному ему предѣлу сколь-угодно близко, но, для каждаго значенія  $m$ , произведеніе содержитъ такихъ множителей, для которыхъ приведенная нами подстановка невозможна, такъ какъ при  $k$ , сравнимомъ по величинѣ съ  $m$ ,  $\frac{k\pi}{m}$  не будетъ весьма малымъ, и разсужденіе теряетъ свое значеніе. Итакъ, два произведенія

$$\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}}\right), \quad (4)$$

$$\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right), \quad (5)$$

стремящіяся совпасть въ своихъ первыхъ множителяхъ, не согласуются между собою для тѣхъ, порядокъ которыхъ сравнимъ по величинѣ съ числомъ  $m$ . Нужно, однако, доказать, что они стремятся къ общему предѣлу. Для этого достаточно установить, что въ каждомъ произведеніи при достаточно большомъ, но конечномъ числѣ множителей произведенія тѣхъ изъ нихъ, которые, въ томъ и въ другомъ, остаются соотвѣтственно отличными другъ отъ друга, приближаются сколь-угодно близко къ единицѣ; дѣйствительно, тогда эти множители не имѣютъ болѣе вліянія на предѣльный результатъ, и, такимъ образомъ, отпадаетъ самый вопросъ, можно или нѣтъ замѣнять каждый изъ нихъ отдѣльно въ одномъ изъ произведеній соотвѣтственнымъ ему въ другомъ.

Для выполненія этого двойного условія очевидно достаточно, чтобы произведенія (4) и (5) были оба сходящимися, а для этого (§ 403) чтобы въ рядахъ

$$\frac{z^2}{\pi^2} + \frac{z^2}{4\pi^2} + \frac{z^2}{9\pi^2} + \dots,$$

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \dots,$$

какъ вещественныя части, такъ и коэффициенты при  $\sqrt{-1}$  представляли сходящіеся ряды независимо отъ знаковъ ихъ членовъ. Но эти ряды могутъ быть написаны въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{z^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right),$$

$$\frac{m^2 \sin^2 x}{\pi^2} \left( \frac{\frac{\pi^2}{m^2}}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} + \frac{1}{4} \frac{\frac{4\pi^2}{m^2}}{\sin^2 \frac{2\pi}{m}} + \frac{1}{9} \frac{\frac{9\pi^2}{m^2}}{\sin^2 \frac{3\pi}{m}} + \dots \right).$$

Множители въ скобкахъ, одни только содержащіе  $\sqrt{-1}$ , не вліяють, очевидно, на сходимость испытываемыхъ рядовъ, и все сводится къ доказательству, что ряды съ положительными членами въ скобкахъ—сходящіеся; это ясно для перваго изъ нихъ, а что то же имѣетъ мѣсто и для втораго, слѣдуетъ изъ того, что такъ какъ отношеніе дуги, меньшей  $\frac{\pi}{2}$ , къ ея синусу меньше  $\frac{\pi}{2}$ , то члены втораго ряда меньше соответственныхъ членовъ сходящагося ряда

$$\frac{\pi^2}{4} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right).$$

Отсюда заключаемъ, что оба произведенія (4) и (5) — сходящіеся и, значитъ, можно, какъ мы сказали выше, утверждать, что они стремятся къ общему предѣлу.

Итакъ, имѣемъ, наконецъ, для всякаго вещественнаго или мнимаго значенія  $x$ :

$$\sin x = x \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots$$

§ 405. Выраженіе  $\cos x$ . — Имѣемъ:

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x};$$

слѣдовательно,

$$\cos x = \frac{2x \left( 1 - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{4x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{4x^2}{9\pi^2} \right) \dots}{2x \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \dots},$$

или, по сокращеніи числителя и знаменателя на общихъ множителей,

$$\cos x = \left( 1 - \frac{4x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{4x^2}{9\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{4x^2}{25\pi^2} \right) \dots$$

#### ВЫРАЖЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ДРУГИХЪ ФУНКЦІЙ

§ 406. Умѣя выражать синусъ и косинусъ въ видѣ произведеній, мы можемъ выразить всякую тригонометрическую функцію, приводящуюся къ произведенію или частному какого-угодно числа синусовъ и косинусовъ.

Напр., имѣемъ:

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} = \frac{\sin \left( \frac{a+x}{2} \right) \sin \left( \frac{a-x}{2} \right)}{\sin^2 \frac{a}{2}};$$



слѣдовательно,

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x+a}{2}\right)\left(\frac{a-x}{2}\right) \left[1 - \frac{(x+a)^2}{4\pi^2}\right] \left[1 - \frac{(a-x)^2}{4\pi^2}\right] \left[1 - \frac{(x+a)^2}{4 \cdot 4\pi^2}\right] \left[1 - \frac{(a-x)^2}{4 \cdot 4\pi^2}\right] \dots}{\frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{a^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{4 \cdot 4\pi^2}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{9 \cdot 4\pi^2}\right)^2 \dots}$$

Но, очевидно,

$$\frac{1 - \frac{(a+x)^2}{n^2 \cdot 4\pi^2}}{1 - \frac{a^2}{4\pi^2 n^2}} = 1 - \frac{2ax + x^2}{4n^2\pi^2 - a^2} = \left(1 - \frac{x}{2n\pi - a}\right) \left(1 + \frac{x}{2n\pi + a}\right);$$

$$\frac{1 - \frac{(a-x)^2}{n^2 \cdot 4\pi^2}}{1 - \frac{a^2}{4\pi^2 n^2}} = 1 + \frac{2ax - x^2}{4n^2\pi^2 - a^2} = \left(1 + \frac{x}{2n\pi - a}\right) \left(1 - \frac{x}{2n\pi + a}\right);$$

значитъ, предыдущая формула приметъ видъ:

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi - a}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi + a}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi - a}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi + a}\right) \dots,$$

т.-е.

$$\frac{\cos x - \cos a}{1 - \cos a} =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left[1 - \frac{x^2}{(2\pi - a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(2\pi + a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(4\pi - a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(4\pi + a)^2}\right] \dots$$

Точно такъ же доказываются слѣдующія формулы:

$$\frac{\cos x + \cos a}{1 + \cos a} = \left[1 - \frac{x^2}{(\pi - a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(\pi + a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(3\pi - a)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(3\pi + a)^2}\right] \dots,$$

$$\frac{\sin x + \sin a}{\sin a} =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi - a}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi + a}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi + a}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi - a}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi - a}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi + a}\right) \dots$$

§ 407. Два слѣдующихъ выраженія:

$$\begin{aligned}\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x, \\ \cos x - \operatorname{cot} \frac{1}{2} a \sin x\end{aligned}$$

даютъ замѣчательныя разложенія. Замѣчая, что

$$\begin{aligned}\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x &= \frac{\cos \left( \frac{a}{2} - x \right)}{\cos \frac{a}{2}}, \\ \cos x - \operatorname{cot} \frac{1}{2} a \sin x &= \frac{\sin \left( \frac{a}{2} - x \right)}{\sin \frac{a}{2}}.\end{aligned}$$

не трудно оба выраженія представить въ видѣ безконечныхъ произведеній. Находимъ, послѣ очевидныхъ упрощеній,

$$\begin{aligned}\cos x + \operatorname{tang} \frac{1}{2} a \sin x &= \\ &= \left( 1 + \frac{2x}{\pi - a} \right) \left( 1 - \frac{2x}{\pi + a} \right) \left( 1 + \frac{2x}{3\pi - a} \right) \left( 1 - \frac{2x}{3\pi + a} \right) \left( 1 + \frac{2x}{5\pi - a} \right) \left( 1 - \frac{2x}{5\pi + a} \right) \dots, \\ \cos x - \operatorname{cot} \frac{1}{2} a \sin x &= \\ &= \left( 1 - \frac{2x}{a} \right) \left( 1 + \frac{2x}{2\pi - a} \right) \left( 1 - \frac{2x}{2\pi + a} \right) \left( 1 + \frac{2x}{4\pi - a} \right) \left( 1 - \frac{2x}{4\pi + a} \right) \dots\end{aligned}$$

§ 408. Буквы, входящія въ предыдущія формулы, могутъ быть какъ вещественныя, такъ и мнимыя. Замѣняя  $x$  черезъ  $x\sqrt{-1}$  въ выраженіяхъ  $\sin x$  и  $\cos x$ , получаемъ слѣдующія формулы:

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \left( 1 + \frac{4x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 + \frac{4x^2}{9\pi^2} \right) \left( 1 + \frac{4x^2}{25\pi^2} \right) \dots, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x \left( 1 + \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 + \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 + \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots\end{aligned}$$

Та же подстановка въ формулахъ § 406-го даетъ:

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x} - 2\cos a}{2(1 - \cos a)} &= \left( 1 + \frac{x^2}{a^2} \right) \left[ 1 + \frac{x^2}{(2\pi - a)^2} \right] \left[ 1 + \frac{x^2}{(2\pi + a)^2} \right] \dots, \\ \frac{e^x + e^{-x} + 2\cos a}{2(1 + \cos a)} &= \left[ 1 + \frac{x^2}{(\pi - a)^2} \right] \left[ 1 + \frac{x^2}{(\pi + a)^2} \right] \left[ 1 + \frac{x^2}{(3\pi - a)^2} \right] \dots\end{aligned}$$

О НѢКОТОРЫХЪ РЯДАХЪ, ВЫТЕКАЮЩИХЪ ИЗЪ ПРЕДЫДУЩИХЪ ФОРМУЛЪ

§ 409. Уравненіе

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \quad (1)$$

даетъ

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \ln \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \ln \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) + \dots; \quad (2)$$

отсюда, беря производныя отъ обѣихъ частей, выводимъ:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{4\pi^2 - x^2} - \frac{2x}{9\pi^2 - x^2} - \dots, \quad (3)$$

а такъ какъ

$$-\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = -\frac{1}{k\pi - x} + \frac{1}{k\pi + x}, \quad (4)$$

то

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \quad (5)$$

Замѣняя въ этой формулѣ  $x$  черезъ  $\pi x$ , получаемъ:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \dots \quad (6)$$

Подставляя на мѣсто  $x$  въ формулѣ (5)  $\frac{\pi}{2} - x$ , находимъ:

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{5\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{5\pi}{2} + x} + \dots, \quad (7)$$

что можно получить и непосредственно, исходя изъ выраженія  $\cos x$ .

Складывая формулы (5) и (7), имѣемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \\ &+ \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Полагая здѣсь  $2x = a\pi$ , выводимъ:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} + \frac{1}{2+a} - \frac{1}{2-a} + \frac{1}{3-a} - \frac{1}{3+a} + \frac{1}{4+a} - \frac{1}{4-a} + \dots \quad (9)$$

Всѣ эти формулы, данныя Эйлеромъ, весьма извѣстны и важны.

§ 410. Развертывая обѣ части полученныхъ выше равенствъ и приравнивая затѣмъ другъ другу соотвѣтственные члены обоихъ разложеній, получаемъ также замѣчательные ряды.

Обращаемся снова къ формулѣ

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots; \quad (1)$$

имѣемъ:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

Составляя произведеніе въ формулѣ (1) по правиламъ алгебраическаго умноженія, видимъ, что коэффициентъ при  $-x^3$  есть сумма дробей

$$\frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{1}{4\pi^2}, \quad \frac{1}{9\pi^2}, \dots,$$

коэффициентъ при  $x^5$  есть сумма ихъ произведеній по два, при  $-x^7$  — сумма ихъ произведеній по три, и т. д. Поэтому мы можемъ написать:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

Зная сумму произведеній по два, по три, и т. д., какого-угодно числа количествъ, можно, какъ извѣстно, составить сумму ихъ квадратовъ, сумму ихъ кубовъ, и т. д.; этимъ способомъ мы составимъ сумму подобныхъ степеней какой-угодно четной степени величинъ, обратныхъ натуральнымъ числамъ. Не останавливаясь, однако, на численномъ вычисленіи каждой изъ такихъ суммъ, мы дадимъ ихъ общее выраженіе, связанное, какъ сейчасъ увидимъ, съ числами Бернулли.

§ 411. Возьмемъ опять формулу (§ 409)

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \dots \quad (1)$$

Имѣемъ (§ 387):

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1 \cdot 2} x - \frac{2^4 B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^3 - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} x^{2n-1} - \dots; \quad (2)$$

кроме того, для всякаго значенія  $k$  очевидно равенство

$$\frac{1}{k\pi + x} - \frac{1}{k\pi - x} = -\frac{2x}{k^2\pi^2 - x^2} = -\frac{2x}{k^2\pi^2} \left( 1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} + \frac{x^4}{k^4\pi^4} + \dots \right).$$

Не трудно, поэтому, развернуть вторую часть уравненія (1) въ рядъ по степенямъ  $x$  и, приравнявая другъ другу коэффициенты при  $x^{2n-1}$ , получить:

$$\frac{2^{2n} B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \dots \quad (3)$$

§ 412. Предыдущая формула даетъ приближенное выраженіе для чиселъ Бернулли, когда указатель  $n$  является числомъ значительнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, вторая часть уравненія (3) слишкомъ мало отличается отъ единицы, и мы имѣемъ, съ тѣмъ меньшею ошибкою, чѣмъ  $n$  больше,

$$B_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{2^{2n} - 1 \cdot \pi^{2n}}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что числа Бернулли возрастаютъ съ чрезвычайною быстротою. Изъ уравненія (4) вытекаетъ, что въ рядѣ

$$1 - \frac{x}{2} + B_1 \frac{x^2}{1 \cdot 2} - B_2 \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} + \dots$$

отношеніе какого-нибудь члена къ его предыдущему имѣетъ предѣломъ  $\frac{x^2}{4\pi^2}$ . Такимъ образомъ, этотъ рядъ, представляющій  $\frac{x}{e^x - 1}$ , будетъ расходящимся для значеній  $x$ , превышающихъ  $2\pi$ , что вполне согласуется съ изложеннымъ въ § 378-мъ. Дѣйствительно, функція  $\frac{x}{e^x - 1}$  бесконечна при  $x = 2\pi \sqrt{-1}$  и, слѣдовательно, не можетъ быть развернута въ рядъ по степенямъ  $x$  для значеній, модуль которыхъ превышаетъ  $2\pi$ .

§ 413. Когда  $x$  превышаетъ  $2\pi$ , формула

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} - \frac{B_2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (1)$$

болѣе не приложима; тѣмъ не менѣе, можно доказать, что прерывая разложеніе на какомъ-нибудь членѣ, мы дѣлаемъ ошибку меньше, чѣмъ на слѣдующій членъ.



Найденный въ § 409-мъ рядъ для  $\cot x$  даетъ:

$$1 - x \cot x = 2x^2 \left( \frac{1}{\pi^2 - x^2} + \frac{1}{4\pi^2 - x^2} + \frac{1}{9\pi^2 - x^2} + \dots \right); \quad (2)$$

такъ какъ это уравненіе выведено изъ уравненія, распространяющагося на мнимыя значенія  $x$ , то мы можемъ замѣнить здѣсь  $x$  черезъ  $\frac{x}{2} \sqrt{-1}$ ; въ такомъ случаѣ, по раздѣленіи обѣихъ частей на  $-x^2$ , имѣемъ:

$$\frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \frac{1}{x^2 + 4\pi^2} + \frac{1}{x^2 + 16\pi^2} + \dots + \frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2} + \dots \right), \quad (3)$$

а такъ какъ для всякаго значенія  $x$

$$\frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{4n^2\pi^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{4n^2\pi^2} + \frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^2} - \dots + (-1)^{m+1} \frac{\theta x^{2m}}{(4n^2\pi^2)^m} \right],$$

гдѣ  $\theta$  меньше единицы, то, замѣняя каждый членъ въ формулѣ (3) его разложеніемъ и замѣчая, что

$$\sum \frac{\theta}{(4n^2\pi^2)^{m+1}} = \theta \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}},$$

гдѣ  $\theta$ , какъ всегда, обозначаетъ неопредѣленное число, содержащееся между нулемъ и единицею, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) &= 2 \sum \frac{1}{4n^2\pi^2} - 2x^2 \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^2} + 2x^4 \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^3} - \dots \\ &\quad \pm 2x^{2m-2} \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^m} \mp 2\theta x^{2m} \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Но

$$\sum \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{B_p \pi^{2p} \cdot 2^{2p-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p}$$

и, слѣдовательно,

$$2 \sum \frac{1}{(4n^2\pi^2)^p} = \frac{B_p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p};$$

поэтому формула (4) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) &= \frac{B_1}{1 \cdot 2} - \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^2 + \frac{B_3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^4 - \dots \\ &\quad \pm \frac{B_n x^{2n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \mp \frac{\theta B_{n+1} x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+2)}. \end{aligned}$$

Наконецъ, умножая обѣ части на  $x^2$  и измѣняя  $x$  на  $-x$ , находимъ:

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2} = \frac{B_1 x^2}{1 \cdot 2} - \frac{B_2 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \pm \frac{B_n x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \mp \theta B_{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+2)};$$

последній членъ во второй части неопредѣленно увеличивается, когда  $x$  больше  $2\pi$ , но формула остается точною, каково бы ни было  $x$ .

#### § 414. Уравненіе

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \dots$$

приводить также къ замѣчательнымъ численнымъ рядамъ. Дифференцируя  $n$  разъ обѣ части, имѣемъ:

$$\frac{d^n \pi \cot \pi x}{dx^n} = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \left[ \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}} + \dots \right].$$

При  $x = \frac{1}{4}$  вторая часть обращается въ

$$\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \left[ \frac{4^{n+1}}{1} + \frac{4^{n+1}}{(-3)^{n+1}} + \frac{4^{n+1}}{5^{n+1}} + \frac{4^{n+1}}{(-7)^{n+1}} + \dots \right];$$

вычисляя при этомъ численную величину первой части, получаемъ формулы

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots,$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots,$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots$$

Изъ нихъ формулы съ четными показателями не существенно отличаются отъ формулъ, полученныхъ въ § 411-мъ.

#### § 415. Имѣемъ (§ 404):

$$\sin nx = nx \left( 1 - \frac{n^2 x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{n^2 x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{n^2 x^2}{9\pi^2} \right) \dots;$$

замѣняя  $\sin x$  его выраженіемъ (§ 293) и приравнивая другъ другу коэффициенты при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ  $n$ , получаемъ замѣчательные ряды. Имѣемъ:

$$\sin nx = n \sin x - \frac{n(n^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x - \dots;$$

коэффициентъ при  $n$  во второй части есть

$$\sin x + \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{1.9}{1.2.3.4.5} \sin^5 x + \dots,$$

а въ первой части, очевидно, равенъ  $x$ . Следовательно,

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{1.9}{1.2.3.4.5} \sin^5 x + \dots;$$

это—рядъ, полученный уже много разъ (§§ 302, 294).

Приравнивая другъ другу коэффициенты при  $n^3$ , получаемъ замѣчательную формулу

$$\frac{x^3}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \frac{\sin^3 x}{1.2.3} + \frac{\sin^5 x}{1.2.3.4.5} (1 + 9) + \frac{\sin^7 x}{1.2.3.4.5.6.7} (9 + 25 + 9.25) + \dots,$$

откуда, замѣняя коэффициентъ при  $x^3$  его значеніемъ, выводимъ:

$$x^3 = \sin^3 x + \frac{3.3}{4.5} \left( 1 + \frac{1}{3^2} \right) \sin^5 x + \frac{3.5.3}{4.6.7} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) \sin^7 x + \dots$$

$$+ \frac{3.5.7 \dots (2n-1).3}{4.6.8 \dots 2n(2n+1)} \left[ 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right] \sin^{2n+1} x;$$

эта замѣчательная формула дана впервые Шольтцемъ (Scholtz).

#### ФОРМУЛА ВАЛЛИСА

§ 416. Если въ уравненіи

$$\sin x = x \left( 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots$$

положить  $x = \frac{\pi}{2}$ , то получится формула

$$1 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2^2.4} \right) \left( 1 - \frac{1}{2^2.9} \right) \dots;$$

разлагая въ ней каждый множитель на произведеніе суммы на разность, имѣемъ:

$$1 = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{4} \right) \left( 1 + \frac{1}{4} \right) \left( 1 - \frac{1}{6} \right) \left( 1 + \frac{1}{6} \right) \dots,$$

откуда выводимъ знаменитую формулу

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \dots,$$

открытую Валлисомъ (Wallis) совершенно другимъ путемъ.

§ 417. Предыдущую формулу уже давно связывали съ формулою Стирлинга, дающею приближенное выраженіе произведенія  $1 \cdot 2 \dots x$  для большихъ значеній цѣлаго числа  $x$ .

Формула Стирлинга, къ которой мы сейчасъ переходимъ, очевидно, содержитъ формулу Валлиса; обратный выводъ былъ показанъ Серре (Serret) слѣдующимъ образомъ:

Формула Валлиса даетъ:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2 (2n+1)} = \lim 2^{2n} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^2 [2 \cdot 4 \dots (2n-2) 2n]^2}{[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n]^2 (2n+1)} = \\ &= \lim 2^{4n} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)^4}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n)^2 (2n+1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Если положить

$$\varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x}{\sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$

то не трудно замѣтить, что уравненіе (1) будетъ равносильно уравненію

$$\lim \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = 1. \quad (3)$$

Но можно доказать непосредственно, что также имѣемъ:

$$\lim \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1, \quad (4)$$

а тогда изъ сравненія уравненій (3) и (4) выводимъ, что  $\varphi(n)$  имѣетъ предѣломъ единицу.

Для доказательства уравненія (4) замѣчаемъ, что по уравненію (2)

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+(x+\frac{1}{2})\log(1+\frac{1}{x})};$$

обозначая же черезъ  $\theta'$  и  $\theta''$  числа, содержащіяся между нулемъ и единицею, имѣемъ:

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\theta}{2x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\theta'}{3x^3};$$

слѣдовательно,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\theta'}{3x^3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\theta}{2x^2}\right) = 1 + \frac{\theta'}{3x^2} - \frac{\theta}{4x^2}.$$

или, наконецъ,

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\theta''}{x^2},$$

гдѣ  $\theta''$  обозначаетъ нѣкоторое третье число, меньшее единицы по абсолютной величинѣ. Значитъ,

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\theta''}{x^2}}.$$

Изъ этой формулы, замѣняя послѣдовательно  $x$  черезъ  $x+1, x+2, \dots, 2x-1$  и обозначая черезъ  $\theta_1'', \theta_2'', \dots, \theta_{x-1}''$  числа, содержащіяся между  $-1$  и  $+1$ , выводимъ:

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\theta_1''}{(x+1)^2}}, \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\theta_2''}{(x+2)^2}}, \dots, \frac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta_{x-1}''}{(2x-1)^2}}.$$

Перемножаемъ эти уравненія по-членно и, замѣчая, что сумма

$$\frac{\theta''}{x^2} + \frac{\theta_1''}{(x+1)^2} + \dots + \frac{\theta_{x-1}''}{(2x-1)^2}$$

по абсолютной величинѣ меньше  $\frac{1}{x^2} \cdot x$ , т.-е. меньше  $\frac{1}{x}$ , можемъ, по сокращеніи всѣхъ общихъ множителей въ числитель и знаменатель первой части полученнаго уравненія, написать:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\theta}{x}}.$$

Это уравненіе показываетъ, что при безпредѣльномъ возрастаніи  $x$  выраженіе  $\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}$  стремится въ предѣлѣ къ единицѣ, а такъ какъ  $\frac{\varphi(x)^2}{\varphi(2x)}$  имѣетъ предѣломъ также единицу, то отношеніе двухъ этихъ дробей, т.-е.  $\varphi(x)$ , стремится тоже къ единицѣ.

Другими словами, для большихъ значеній  $x$  имѣемъ приближенно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}};$$

чѣмъ  $x$  больше, тѣмъ соответственная ошибка меньше. Это и есть теорема Стирлинга.

**§ 418.** Серре, давая это изящное доказательство, показалъ, что оно приводитъ къ сходящемуся ряду, выражающему точно логарифмъ произведенія  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$ , при чемъ полученная для послѣдняго формула представляетъ первый членъ ряда. Въ самомъ дѣлѣ, пусть попрежнему

$$\varphi(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x}{\sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}, \quad (1)$$

имѣемъ тождественно:

$$\ln \varphi(x) = \ln \frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} + \ln \frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} + \dots + \ln \frac{\varphi(x+m)}{\varphi(x+m+1)} + \ln \varphi(x+m+1).$$



При безпредѣльномъ возрастаніи  $n$  функція  $\varphi(x+n+1)$  стремится къ единицѣ, а ея логарифмъ—къ нулю; значитъ, имѣемъ:

$$\ln \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)}.$$

Но уравненіе (1), служащее опредѣленіемъ  $\varphi(x)$ , даетъ:

$$\ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x) = \frac{1}{2} \ln 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x + \ln \varphi(x);$$

замѣчая же, что

$$\frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{x+n}\right)^{x+n+\frac{1}{2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\ln \frac{\varphi(x+n)}{\varphi(x+n+1)} = \left(x+n+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1,$$

выводимъ окончательно:

$$\ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x) = \frac{1}{2} \ln 2\pi - x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left(x+n+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1 \right].$$

Эта формула дана впервые Гудерманомъ (Gudermann). Изъ самаго доказательства ясно, что рядъ—сходящійся; впрочемъ, въ этомъ легко убѣдиться непосредственно. Дѣйствительно, общій членъ

$$\left[ \left(x+n+\frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x+n}\right) - 1 \right]$$

равенъ

$$\left(x+n+\frac{1}{2}\right) \left[ \frac{1}{x+n} - \frac{1}{2(x+n)^2} + \frac{\theta}{3(x+n)^3} \right] - 1,$$

гдѣ  $\theta$  меньше единицы; выполняя умноженія, видимъ, что это выраженіе приводится къ суммѣ

$$\left(\frac{\theta}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{\theta}{6(x+n)^3},$$

представляющей общій членъ очевидно сходящагося ряда.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Если въ уравненіи

$$\sin \alpha = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

считать  $\sin \alpha$  заданнымъ, а  $x$  принять за неизвѣстную, то, такъ какъ одинъ изъ корней есть  $\alpha$ , всѣ корни выразятся черезъ  $\alpha \pm 2n\pi$ ,  $\pi - \alpha \pm 2n\pi$ ; отсюда, прилагая теорію алгебраическихъ уравненій конечной степени относительно разложенія многочлена на множителей, заключаемъ:

$$\frac{\sin x - \sin \alpha}{\sin \alpha} = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\pi - \alpha}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi + \alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi + \alpha}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi - \alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi - \alpha}\right) \dots;$$

это уравненіе точно, хотя доказательство и не строго.

2. Если въ уравненіи

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

считать  $\cos \alpha$  заданнымъ, а  $x$  принять за неизвѣстную, то, такъ какъ одинъ изъ корней есть  $\alpha$ , всѣ корни выразятся черезъ  $\pm (2n\pi \pm \alpha)$ ; отсюда такъ же, какъ и въ предыдущемъ упражненіи, выводимъ:

$$\frac{\cos x - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \left[1 - \frac{x^2}{(2\pi - \alpha)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(2\pi + \alpha)^2}\right] \left[1 - \frac{x^2}{(4\pi - \alpha)^2}\right] \dots;$$

подобно предыдущей и эта формула тоже точна.

3. Формула Валлиса

$$\frac{2}{\pi} = \frac{(1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2n-1)^2 (2n+1))}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2}$$

равносильна ряду

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots$$

4. Преобразовать рядъ

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

зконечное произведеніе

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 - \frac{1}{7^n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) \dots},$$

въ  $p$  обозначаетъ какое-угодно простое число.

5. Точно такъ же

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \dots = \\ = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \left(1 + \frac{1}{7^n}\right) \left(1 - \frac{1}{11^n}\right) \dots \left(1 \pm \frac{1}{p^n}\right) \dots}, \end{aligned}$$

гдѣ знакъ  $+$  берется при простомъ числѣ  $p$  вида  $4n - 1$  и знакъ  $-$  въ противномъ случаѣ.

6. Изъ двухъ предыдущихъ теоремъ выводится:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7^2}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11^2}{10 \cdot 12} \dots$$

Для второе уравненіе на квадратъ перваго, находимъ:

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \dots$$

Для составленія этихъ дробей дѣлать каждое простое нечетное число на двѣ части, различающіяся между собою на одну единицу, и четныя части ставятъ въ числителяхъ, а нечетныя въ знаменателяхъ.

7. Если выраженіе  $\cos \frac{\pi x}{6} + \cot \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi x}{6}$  преобразовать въ произведеніе и затѣмъ развернуть это произведеніе въ рядъ по степенямъ  $x$ , то, приравнивая тождественно другъ другу коэффициенты этого разложенія и того разложенія, которое получается непосредственно, находимъ нѣсколько замѣчательныхъ рядовъ; первый изъ нихъ есть

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \dots$$

8. Имѣемъ:

$$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n} \cdot \frac{2n-m}{2n} \cdot \frac{2n+m}{2n} \cdot \frac{4n-m}{4n} \cdot \frac{4n+m}{4n} \dots,$$

$$\sin \frac{2m\pi}{2n} = \frac{2m\pi}{2n} \cdot \frac{2n-2m}{2n} \cdot \frac{2n+2m}{2n} \cdot \frac{4n-2m}{4n} \cdot \frac{4n+2m}{4n} \dots;$$

отсюда выводимъ:

$$\cos \frac{m\pi}{2n} = \frac{2n-2m}{2n-m} \cdot \frac{2n+2m}{2n+m} \cdot \frac{4n-2m}{4n-m} \cdot \frac{4n+2m}{4n+m} \dots$$

Полагая  $n = 3m$ ,  $n = 2m$ ,  $n = \frac{5m}{2}$ , находимъ:

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{20}{17} \dots,$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{14}{15} \dots,$$

$$1 + \sqrt{5} = 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \dots$$

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### Разложенія въ непрерывныя дроби

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ

§ 419. Разложеніе функціи въ непрерывную дробь часто бываетъ полезно для численнаго опредѣленія ея значенія. Однако мы не станемъ вдаваться въ большія подробности относительно этого способа разложенія, до сихъ поръ не игравшаго большой роли въ изученіи аналитическихъ свойствъ, составляющемъ нашу главную цѣль.

Прежде всего напомнимъ, что подъ именемъ *непрерывной дроби* понимаютъ выраженіе вида

$$a + \frac{\alpha_1}{a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2 + \frac{\alpha_3}{a_3 + \dots}}},$$

гдѣ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, a_1, a_2, a_3, \dots$  могутъ имѣть какія-угодно значенія. Непрерывная дробь, представляющая алгебраическое или численное выраженіе, будетъ поэтому, очевидно, неопредѣленною. Если же поставить условіемъ, чтобы числители  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  были всѣ по единицѣ, а знаменатели — цѣлыми числами, то задача тогда представитъ только одно рѣшеніе. Такая непрерывная дробь владѣетъ весьма замѣчательными свойствами и ея подходящія являются наиболѣе простыми приближенными значеніями, какія только возможны для данной степени приближенія. Но въ наши планы не входитъ заниматься здѣсь этой теоріей, хорошо извѣстной изъ элементарной алгебры.

#### ПРЕОБРАЗОВАНІЕ РЯДА ВЪ НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

§ 420. Данъ рядъ

$$S = \frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} + \dots$$

Имѣемъ тождественно:

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} = \frac{1}{A_1 + \frac{A_1^2}{A_2 - A_1}}.$$

Если въ этомъ уравненіи измѣнить  $\frac{1}{A_2}$  на  $\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}$ , или, что то же самое,  $A_2$  на  $A_2 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2}$ , то будемъ имѣть:

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} = \frac{1}{A_1 + \frac{A_1^2}{A_2 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2} - A_1}} = \frac{1}{A_1 + \frac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2}}}.$$

Измѣняя въ этомъ тождественномъ уравненіи  $\frac{1}{A_3}$  на  $\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4}$ , т.-е.  $A_3$  на  $A_3 + \frac{A_3^2}{A_4 - A_3}$ , такъ же найдемъ:

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_4} = \frac{1}{A_1 + \frac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2 + \frac{A_3^2}{A_4 - A_3}}}};$$

отсюда заключаемъ, что безконечный рядъ равенъ дроби

$$\frac{1}{A_1 + \frac{A_1^2}{A_2 - A_1 + \frac{A_2^2}{A_3 - A_2 + \frac{A_3^2}{A_4 - A_3 + \dots}}}}.$$

Эта дробь—сходящаяся одновременно съ рядомъ и притомъ совершенно одинаково съ послѣднимъ; дѣйствительно, прерывая ее на какомъ-угодно числѣ составляющихъ дробей, мы получаемъ вполнѣ точно сумму столькихъ же членовъ ряда.

§ 421. Разсмотримъ, напр., рядъ

$$12 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots;$$

по предыдущему имѣемъ:

$$12 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

По той же формулѣ, приложенной къ ряду

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$



находимъ знаменитую формулу

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}}$$

данную въ первый разъ безъ доказательства Брункеромъ (Brounker). Очевидно, что эти дроби сходятся съ тою же медленностью, какъ и рядъ, отъ котораго онѣ произошли, и изъ доказательства общей формулы слѣдуетъ, что дробь, оканчивающаяся составляющею дробью порядка  $n$ , равна суммѣ  $n$  первыхъ членовъ ряда.

§ 422. Чтобы приложить предыдущую формулу къ ряду

$$S = B_1 - B_2 + B_2 - B_4 + \dots,$$

очевидно, достаточно замѣнить  $A_1$  черезъ  $\frac{1}{B_1}$ ,  $A_2$  черезъ  $\frac{1}{B_2}$  и т. д. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$S = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{B_1} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} + \frac{1}{\frac{1}{B_3} - \frac{1}{B_2} + \dots}}}}}}$$

или, послѣ упрощеній,

$$S = \frac{B_1}{1 + \frac{B_2}{B_1 - B_2 + \frac{B_1 B_3}{B_2 - B_3 + \frac{B_2 B_4}{B_3 - B_4 + \dots}}}}$$

Въ этой общей формулѣ члены преобразованнаго ряда были предположены попеременно положительными и отрицательными. Это предположеніе нисколько не уменьшаетъ общности результата, потому что здѣсь дѣло идетъ объ алгебраическомъ преобразованіи, гдѣ буквы могутъ представлять безразлично какъ положительныя, такъ и отрицательныя числа.

§ 423. Разсмотримъ, напр., рядъ

$$S = 1 + qz + q^4 z^3 + q^9 z^3 + \dots + q^{n^2} z^n + \dots$$

По предыдущей формулѣ пишемъ.

$$S = \frac{1}{1 - \frac{qz}{1 + qz - \frac{q^4 z^2}{qz + q^4 z^2 - \frac{q^{10} z^4}{q^4 z^2 + q^9 z^3 - \dots - \frac{q^{n^2 + (n-2)^2} z^{2n-2}}{q^{(n-1)^2} z^{n-1} + q^{n^2} z^n - \dots}}}}$$

что легко преобразовывается въ

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{qz} - \frac{1}{q^3 z} - \frac{1}{1 + \frac{1}{q^5 z} - \dots - \frac{1}{q^{2n-1} z} - \frac{1}{1 + \frac{1}{q^{2n+1} z} - \dots}}}}$$

А такъ какъ тождественно

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{qz} - k}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{qz} - k},$$

то, слѣдовательно,

$$S = 1 + \frac{1}{\frac{1}{qz} - \frac{1}{1 + \frac{1}{q^3 z} - \frac{1}{1 + \frac{1}{q^5 z} - \dots}}}$$

или

$$S = 1 + \frac{qz}{1 - \frac{q^3 z}{1 + q^3 z - \frac{q^5 z}{1 + q^5 z - \dots - \frac{q^{2n-1} z}{1 + q^{2n-1} z - \dots}}}}$$

Дробь, остановленная на  $n$ -ой составляющей, представить сумму  $n$  первыхъ членовъ ряда,

**§ 424.** Также можно преобразовать въ непрерывную дробь рядъ

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \dots;$$

въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{A + \frac{A}{B-1}}.$$

Чтобы отъ этого выраженія перейти къ суммѣ трехъ первыхъ членовъ ряда, нужно замѣнить  $\frac{1}{B}$  черезъ  $\frac{1}{B} - \frac{1}{BC}$ , т.-е. замѣнить  $B$  черезъ

$$\frac{1}{\frac{1}{B} - \frac{1}{BC}} = B + \frac{B}{C-1}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} = \frac{1}{A + \frac{A}{B-1 + \frac{B}{C-1}}}.$$

Чтобы перейти отъ этого выраженія къ выраженію четырехъ первыхъ членовъ ряда, нужно замѣнить  $\frac{1}{C}$  черезъ  $\frac{1}{C} - \frac{1}{CD}$  и, значитъ,  $C$  черезъ  $C + \frac{C}{D-1}$ . Такимъ образомъ,

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} = \frac{1}{A + \frac{A}{B-1 + \frac{B}{C-1 + \frac{C}{D-1}}}}.$$

Законъ очевиденъ и безконечный рядъ равенъ безконечной непрерывной дроби

$$\frac{1}{A + \frac{A}{B-1 + \frac{B}{C-1 + \frac{C}{D-1 + \frac{D}{E-1 + \dots}}}}}.$$

§ 425. Напр., имѣемъ:

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

и, слѣдовательно,

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots}}}}}.$$

или, беря отъ обѣихъ частей обратныя величины и вычитая по единицѣ, пишемъ:

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \frac{5}{5 + \dots}}}}}$$

ВЫРАЖЕНІЕ ФУНКЦІИ ПОДЪ ВИДОМЪ НЕПРЕРЫВНОЙ ДРОБИ

§ 426. Разысканіе безконечной непрерывной дроби, равнозначной данной функціи, представляетъ задачу неопредѣленную, но имѣющую только одно рѣшеніе, если выборъ составляющихъ дробей подчинить условію, чтобы эти послѣднія давали, при малыхъ значеніяхъ переменнѣй, наибольшее возможное приближеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $\varphi(x)$  будетъ функція отъ  $x$  и  $a$  — значеніе, которое она принимаетъ при  $x = 0$ ; полагаемъ

$$\varphi(x) = \frac{a}{1 + y},$$

гдѣ  $y$  обращается въ нуль одновременно съ  $x$ . Пусть  $b$  будетъ предѣломъ отношенія  $\frac{y}{x}$ , когда  $x$  стремится къ нулю; полагаемъ

$$y = \frac{bx}{1 + z}.$$

Пусть  $c$  будетъ предѣломъ  $\frac{z}{x}$ , когда  $x$  стремится къ нулю; полагаемъ

$$z = \frac{cx}{1 + u}.$$

продолжая такимъ образомъ до безконечности, получимъ для  $\varphi(x)$  непрерывную дробь вида

$$\frac{a}{1 + \frac{bx}{1 + \frac{cx}{1 + \frac{dx}{1 + \dots}}}}$$

самую выгодную изъ всѣхъ, какія только возможны для малыхъ значеній  $x$ .

Но понятно, что если какое-либо изъ количествъ  $y, z, u, \dots$  сравнимо съ такою степенью  $x$ , показатель которой отличенъ отъ единицы, т.-е. если одна изъ величинъ  $a, b, c, \dots$  обращается въ нуль или въ безконечность, то такое количество надо представить функціею вида

$$\frac{kx^m}{1 + t};$$

соотвѣтственная составляющая дробь въ такомъ случаѣ имѣла бы множителемъ въ числитель степенъ  $x$ .

§ 427. Разсмотримъ, напр., функцію  $(1 + x)^m$ ; полагаемъ

$$(1 + x)^m = \frac{1}{1 + y}$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{1 - (1 + x)^m}{(1 + x)^m}.$$

Знаменатель этой дроби приводится къ единицѣ при  $x = 0$ , и отношеніе  $\frac{y}{x}$  имѣетъ предѣломъ производную отъ числителя, иначе говоря, значеніе выраженія

$$-m(1 + x)^{m-1}$$

при  $x = 0$ , т.-е.  $-m$ .

Итакъ, полагаемъ

$$(1 + x)^m = \frac{1}{1 - \frac{mx}{1 + z}},$$

откуда

$$z = -\frac{mx(1 + x)^m}{1 - (1 + x)^m} - 1;$$

замѣняя  $(1 + x)^m$  его разложеніемъ, находимъ безъ труда, что, при  $x = 0$ ,  $\frac{z}{x} = \frac{m+1}{2}$  такимъ образомъ,

$$(1 + x)^m = \frac{1}{1 - \frac{mx}{1 + \frac{\frac{m+1}{2}x}{1 + u}}}.$$

Прилагая этотъ методъ много разъ, мы можемъ получить какое-угодно число дробей, но онъ всё-же является мало пригоднымъ для выясненія самаго закона составленія, который мы вскорѣ получимъ другимъ путемъ.

§ 428. Разсмотримъ еще функцію

$$y = \operatorname{arctang} x.$$

Когда  $x$  бесконечно-мало,  $y$  равно  $x$ ; полагаемъ, поэтому,

$$y = \frac{x}{1 + y_1};$$



отсюда выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y_1} - \frac{x}{(1+y_1)^2} \frac{dy_1}{dx}.$$

Замѣняя производную  $\frac{dy}{dx}$  ея значеніемъ  $\frac{1}{1+x^2}$  и освобождаясь отъ знаменателей, будемъ имѣть:

$$x(1+x^2) \frac{dy_1}{dx} - x^2(1+y_1) + y_1(1+y_1) = 0. \quad (1)$$

Извѣстно, что для бесконечно-малаго значенія  $x$  разность  $(y-x)$  — третьяго порядка; отсюда слѣдуетъ, что  $y_1$  — бесконечно-малая второго порядка; но и предыдущаго уравненія достаточно, чтобы доказать это положеніе и въ то же время опредѣлить приближенное значеніе  $y_1$ . Дѣйствительно, полагаемъ

$$y_1 = \alpha x^m,$$

гдѣ  $m$  — неизвѣстная постоянная и  $\alpha$  — функція отъ  $x$ , остающаяся конечною при  $x$  бесконечно-маломъ. Уравненіе (1) приметъ видъ (§ 45):

$$x(1+x^2)m\alpha x^{m-1}(1+\epsilon) - x^2(1+\alpha x^m) + \alpha x^m(1+\alpha x^m) = 0,$$

гдѣ  $\epsilon$  бесконечно-мало одновременно съ  $x$ . Если въ этомъ уравненіи предположить  $x$  бесконечно-малымъ, то первый членъ будетъ порядка  $m$ , второй — второго порядка и третій — порядка  $m$ . А такъ какъ очевидно, что сумма коэффициентовъ членовъ наивысшаго порядка должна быть нулемъ, то, если  $m$  меньше 2,

$$1 = 0,$$

что невозможно, а если  $m$  превышаетъ 2, то

$$m\alpha + \alpha = 0,$$

что также невозможно, потому что, по предположенію,  $\alpha$  имѣетъ конечное значеніе. Значитъ, нужно принять  $m = 2$ , и тогда

$$2\alpha - 1 + \alpha = 0,$$

или

$$\alpha = \frac{1}{3}.$$

Такимъ образомъ, приближенное значеніе  $y_1$  есть  $y_1 = \frac{x^2}{3}$  и мы положимъ

$$y_1 = \frac{x^2}{3 + y_2},$$

гдѣ  $y_2$  бесконечно-мало одновременно съ  $x$ .

Увидимъ безъ труда, что  $y_2$  удовлетворяетъ уравненію

$$x(1 + x^2) \frac{dy_2}{dx} - x^2(4 + y_2) + (3 + y_2)y_2 = 0.$$

Отсюда выводимъ, что  $y_2$ , при безконечно-маломъ значеніи  $x$ , есть величина второго порядка и приближенное ея значеніе равно  $\frac{4}{5}x^2$ ; поэтому полагаемъ

$$y_2 = \frac{4x^2}{5 + y_3}.$$

Точно такъ же увидимъ, что  $y_3$  удовлетворяетъ уравненію

$$x(1 + x^2) \frac{dy_3}{dx} - (9 + y_3)x^2 + (5 + y_3)y_3 = 0,$$

изъ котораго выводимъ, что приближенное значеніе  $y_3$ , при безконечно-маломъ значеніи  $x$ , равно  $\frac{9x^2}{7}$ ; поэтому полагаемъ

$$y_3 = \frac{9x^2}{7 + y_4}.$$

Продолжая такъ же и далѣе, будемъ имѣть:

$$\operatorname{arctang} x = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{4x^2}{5 + \frac{9x^2}{7 + \frac{16x^2}{9 + \dots}}}}}$$

**§ 429.** Преобразование рядовъ представляетъ часто наивыгоднѣйшій способъ для полученія разложеній въ видѣ непрерывныхъ дробей и изученія ихъ законовъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Начнемъ съ преобразования ряда

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z(z+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{a^3}{z(z+1)(z+2)} + \dots, \quad (1)$$

даннаго Лежандромъ (Legendre) въ Примѣчаніи къ его *Геометріи*; изъ него онъ вывелъ замѣчательныя слѣдствія.

По уравненію (1) пишемъ:

$$\varphi(z+1) = 1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(z+1)(z+2)} + \dots;$$

вычитая по-членно это послѣднее уравненіе изъ (1) и выполняя вычитаніе соответственныхъ членовъ во вторыхъ частяхъ, находимъ:

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} + \frac{a^2}{z(z+1)(z+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots$$

т.-е., по опредѣленію  $\varphi(z)$ ,

$$\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} \varphi(z+2). \quad (2)$$

Дѣлимъ на  $\varphi(z+1)$  обѣ части этого уравненія и полагаемъ

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \psi(z);$$

уравненіе (2), какъ легко видѣть, приметъ видъ:

$$\psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}. \quad (3)$$

Замѣняя послѣдовательно въ этомъ уравненіи  $z$  на  $z+1$ ,  $z+2$ , ..., будемъ имѣть:

$$\psi(z+1) = \frac{a}{(z+1) + \psi(z+2)},$$

$$\psi(z+2) = \frac{a}{(z+2) + \psi(z+3)},$$

$$\dots \dots \dots$$

и, слѣдовательно,

$$\psi(z) = \frac{a}{z + \frac{a}{(z+1) + \frac{a}{(z+2) + \frac{a}{(z+3) + \dots}}}} \quad (4)$$

гдѣ  $\psi(z)$ , по опредѣленію, представляетъ частное

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{(z+1)(z+2)} + \dots}{1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z(z+1)} + \dots} \quad (5)$$

Если положить  $z = \frac{1}{2}$ , то непрерывная дробь, очевидно, может быть представлена подъ видомъ:

$$\frac{2a}{1 + \frac{4a}{3 + \frac{4a}{5 + \frac{4a}{7 + \frac{4a}{9 + \dots}}}}}$$

гдѣ числители всѣ, кромѣ перваго, по  $4a$ , а знаменатели образуютъ рядъ нечетныхъ чиселъ; самая же функція  $\psi(z)$ , представленная этою дробью, приметъ, при предположеніи  $z = \frac{1}{2}$ , слѣдующій видъ:

$$2a \cdot \frac{1 + \frac{4a}{2 \cdot 3} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{64a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots}$$

Легко видѣть, что эта дробь равносильна выраженію

$$\sqrt{a} \frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}}.$$

Слѣдовательно,

$$2\sqrt{a} \frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}} = \frac{4a}{1 + \frac{4a}{3 + \frac{4a}{5 + \frac{4a}{7 + \dots}}}}$$

Полагая  $4a = x^2$ , находимъ:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{3 + \frac{x^2}{5 + \frac{x^2}{7 + \dots}}}}$$

При  $x = \frac{1}{2}$  эта формула даетъ:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots},$$

или

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots$$

А такъ какъ

$$\frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{2}{e - 1},$$

то

$$\frac{2}{e - 1} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots$$

и

$$\frac{e - 1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{4n + 2} + \dots}$$

Эта формула, данная Эйлеромъ, наиболѣе выгодна для вычисленія  $e$ .

§ 430. Предыдущій методъ имѣетъ большое сходство съ методомъ Гаусса, примѣненнымъ имъ къ разложенію въ непрерывную дробь слѣдующаго весьма общаго ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1) \cdot \beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdot \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x^3 + \dots,$$

который, при надлежаще выбранныхъ значеніяхъ  $\alpha, \beta, \gamma$ , можетъ представить большую часть извѣстныхъ разложеній, полученныхъ до сихъ поръ.

Не трудно установить, на основаніи тождества коэффиціентовъ при однѣхъ и тѣхъ же степеняхъ  $x$  въ обѣихъ частяхъ, слѣдующее равенство:

$$F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} x F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, x). \quad (1)$$

Далѣе, полагая

$$\frac{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = G(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

и замѣчая, что функція  $F$  симметрична относительно буквъ  $\alpha$  и  $\beta$ , будемъ также имѣть:

$$\frac{F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\beta, \alpha + 1, \gamma + 1, x)}{F(\beta, \alpha, \gamma, x)} G(\beta, \alpha, \gamma, x).$$



Уравнение (1), раздѣленное на  $F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, x)$ , приметъ видъ:

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} x G(\beta + 1, \alpha, \gamma + 1, x),$$

или

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} x \cdot G(\beta + 1, \alpha, \gamma + 1, x)}. \quad (2)$$

Та же формула посредствомъ простыхъ измѣненій буквъ даетъ:

$$G(\beta + 1, \alpha, \gamma + 1, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\beta + 1)(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)} x \cdot G(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, x)}.$$

Функция  $G$ , стоящая въ знаменателѣ этого послѣдняго уравненія, въ свою очередь выразится при помощи той же самой формулы, и мы окончательно будемъ имѣть:

$$G(\beta, \alpha, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \frac{dx}{1 - \frac{ex}{1 - \dots}}}}}}. \quad (3)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)}, & b &= \frac{(\beta + 1)(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, \\ c &= \frac{(\alpha + 1)(\gamma + 1 - \beta)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)}, & d &= \frac{(\beta + 2)(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)}, \\ e &= \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 2 - \beta)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)}, & f &= \frac{(\beta + 3)(\gamma + 3 - \alpha)}{(\gamma + 5)(\gamma + 6)}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

При  $\beta = 0$ , очевидно, имѣемъ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1,$$

и, слѣдовательно, уравненіе (3) при замѣнѣ въ немъ  $\gamma$  на  $\gamma - 1$  приметъ видъ:

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \frac{dx}{1 - \dots}}}}}$$

гдѣ

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{\gamma}, & b &= \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma + 1)}, \\ c &= \frac{(\alpha + 1)\gamma}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)}, & d &= \frac{2(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)}, \\ e &= \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 1)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)}, & f &= \frac{3(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)}, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

и двойной законъ составленія  $a, c, e, \dots$  и  $b, d, f, \dots$  очевиденъ.

§ 431. Предыдущее уравненіе даетъ разложеніе многихъ простыхъ функцій.

Не трудно замѣтить, что

$$(1 + x)^n = F(-n, 1, 1, -x),$$

и, слѣдовательно, формула (4) при  $\alpha = -n$ ,  $\gamma = 1$  и при замѣнѣ  $x$  на  $-x$  даетъ:

$$(1 + x)^n = \frac{1}{1 - \frac{nx}{1 + \frac{\frac{n+1}{2}x}{1 - \frac{\frac{n-1}{2 \cdot 3}x}{1 + \frac{\frac{2(n+2)}{3 \cdot 4}x}{1 - \frac{\frac{2(n-2)}{4 \cdot 5}x}{1 + \dots}}}}}}$$

§ 432. Имѣемъ:

$$1(1+x) = xF(1, 1, 2, -x);$$

слѣдовательно,

$$1(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1 + \frac{\frac{1}{6}x}{1 + \frac{\frac{2}{6}x}{1 + \frac{\frac{2}{10}x}{1 + \frac{\frac{3}{10}x}{1 + \frac{\frac{3}{14}x}{1 + \dots + \frac{\frac{n}{4n-2}x}{1 + \frac{\frac{n}{4n+2}x}{1 + \dots}}}}}}}}$$

§ 433. Разложене  $e^x$  есть предѣлъ выраженія

$$F\left(1, k, 1, \frac{x}{k}\right).$$

Когда  $k$  растётъ безпредѣльно, находимъ:

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + \frac{\frac{1}{2}x}{1 - \frac{\frac{1}{6}x}{1 + \frac{\frac{1}{6}x}{1 - \frac{\frac{1}{10}x}{1 + \frac{\frac{1}{10}x}{1 + \dots}}}}}}$$

## У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Имѣемъ:

$$e^x = \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + \frac{x}{2 - \frac{x}{3 + \frac{2x}{4 - \frac{2x}{5 + \frac{3x}{6 - \frac{3x}{7 + \dots}}}}}}}}$$

при чемъ общее выраженіе составляющихъ дробей есть

$$y_{2r} = \frac{rx}{2r + y_{2r+1}},$$

$$y_{2r+1} = \frac{-rx}{2r + 1 + y_{2r+2}}.$$

2. Имѣемъ:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1 + \frac{x}{2 + \frac{x}{3 + \frac{2x}{2 + \frac{2x}{5 + \frac{3x}{2 + \frac{3x}{7 + \frac{4x}{2 + \dots}}}}}}}}$$

при чемъ общее выраженіе составляющихъ дробей есть

$$y_{2r-1} = \frac{rx}{2r + y_{2r}},$$

$$y_{2r} = \frac{rx}{2r + 1 + y_{2r+1}}.$$

3. Имѣемъ:

$$\operatorname{tang} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \dots}}}}}$$

4. Полагая  $\sin \frac{1}{2} x = y$ , выводимъ, что функція

$$\frac{2x - \sin 2x}{\sin^3 x}$$

равносильна ряду

$$\frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} y + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7} y^2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} y^3 + \dots$$

и непрерывной дроби

$$\begin{array}{c} \frac{4}{3} \\ \hline 1 - \frac{\frac{6}{5} y}{1 + \frac{\frac{2}{5 \cdot 7} y}{1 - \frac{\frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 9} y}{1 - \frac{\frac{1 \cdot 4}{9 \cdot 11} y}{1 - \frac{\frac{7 \cdot 10}{11 \cdot 13} y}{1 - \dots}}}} \end{array}$$

Законъ составленія коэффициентовъ  $\frac{6}{5}, -\frac{2}{5 \cdot 7}, \frac{5 \cdot 8}{7 \cdot 9}, \dots$  слѣдующій:  $n$ -ый членъ этого ряда при  $n$  четномъ равенъ  $\frac{n(n-3)}{(2n+1)(2n+3)}$ , а при  $n$  нечетномъ  $\frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)}$ .



## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### Теорія вычетовъ

§ 434. Пусть функція  $\varphi(x)$  обращается въ безконечность при нѣкоторомъ частномъ значеніи  $a$  переменнѣй  $x$ , отъ которой она зависитъ; Коши (Cauchy) назвалъ *вычетомъ* (*résidu*) этой функціи относительно числа  $a$  коэффициентъ при  $\frac{1}{x-a}$  въ разложеніи функціи въ рядъ по степенямъ  $x-a$ .

Это опредѣленіе требуетъ нѣкоторыхъ поясненій. Въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что одна и та же функція будетъ представлена нѣсколькими различными рядами, расположенными всѣ по положительнымъ или отрицательнымъ степенямъ  $x-a$ , при чемъ ихъ сходимость соотвѣтствуетъ различнымъ предѣламъ, въ которыхъ измѣняется переменная. Пусть, напр.,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x(x-1)};$$

имѣемъ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots,$$

при чемъ разложеніе приложимо ко всякому значенію  $x$ , модуль котораго превосходитъ единицу. Но также имѣемъ:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x} - 1 - x - x^2 - x^3 - \dots;$$

этотъ второй рядъ—сходящійся для значеній  $x$ , модуль которыхъ меньше единицы. Когда, поэтому, говорятъ безъ всякаго объясненія о коэффициентѣ при  $\frac{1}{x}$  въ разложеніи функціи  $\frac{1}{x(x-1)}$ , то приходится дѣлать выборъ между 0 и  $-1$ , на которое умножается  $\frac{1}{x}$  въ двухъ нашихъ разложеніяхъ; неопредѣленность въ другихъ случаяхъ можетъ быть значительно больше.

Такимъ образомъ, чтобы дополнить опредѣленіе, прибавимъ, что разложеніе, къ которому оно относится, должно быть сходящимся для малыхъ значеній разности  $x-a$ , по степенямъ которой оно расположено. Въ предыдущемъ примѣрѣ только второе разло-

женіе—сходящееся для малыхъ значенийъ  $x$  и, слѣдовательно, вычетъ  $\frac{1}{x(x-1)}$  относительно  $x=0$  есть  $-1$ , а не  $0$ .

§ 435. Вообще мы допустимъ, что если рассматриваемая функція  $\varphi(x)$  обращается въ безконечность при  $x=a$ , то существуетъ такое цѣлое число  $m$ , при которомъ произведение  $(x-a)^m\varphi(x)$  имѣетъ конечный предѣлъ, когда  $x$  стремится къ  $a$ . Тогда теорема Тэйлора дастъ возможность развернуть это произведение въ рядъ по положительнымъ степенямъ  $x-a$ , сходящійся для малыхъ значенийъ этой разности. Для такой рядъ на  $(x-a)^m$ , получаемъ разложение, въ которомъ  $\frac{1}{x-a}$  будетъ имѣть коэффициентомъ вычетъ  $\varphi(x)$  относительно частнаго значенія  $a$  переменнй  $x$ .

Слѣдуетъ замѣтить, что согласно только-что приведеннымъ объясненіямъ функція, обращаясь въ безконечность при  $x=a$ , можетъ въ то же время не имѣть соответственнаго вычета. Такъ, напр., функція  $\lg x$  хотя и обращается въ безконечность при  $x=0$ , однако произведение  $x^m \lg x$  ни при какомъ значеніи  $m$  не развертывается въ рядъ по положительнымъ степенямъ  $x$ , такъ какъ  $(m+1)$ -ая производная отъ этого произведенія обращается въ безконечность при  $x=0$ . Поэтому функція  $\lg x$  не допускаетъ разложения по положительнымъ или отрицательнымъ степенямъ  $x$  и опредѣленіе вычетовъ къ ней не приложимо. То же можемъ сказать о функціи  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  при  $x=0$ , о  $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$  при  $x=1$  и о безчисленномъ множествѣ другихъ. Всѣ эти случаи исключаются въ этой главѣ. Притомъ мы увидимъ, что они и не могутъ представиться, если дѣло идетъ о функціи вполне опредѣленной, имѣющей для каждаго значенія переменнй единственное и опредѣленное значеніе. Функціи  $\lg x$  и  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  не удовлетворяютъ этому двойному условію и заставить ихъ удовлетворять ему, суживая самый смыслъ, соединяемый съ этими функціями, невозможно (§ 377).

#### НАХОЖДЕНІЕ ВЫЧЕТА

§ 436. Предыдущія объясненія облегчаютъ рѣшеніе слѣдующей задачи: *Найти вычетъ данной функціи для значенія переменнй, обращающей ее въ безконечность.*

Пусть  $x=a$  есть корень уравненія

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Пусть  $m$  степень его кратности, другими словами, пусть  $m$  есть такое цѣлое число, при которомъ произведение  $(x-a)^m\varphi(x)$  имѣетъ, для  $x=a$ , конечное значеніе.

Полагаемъ

$$(x-a)^m\varphi(x) = F(x);$$

такъ какъ функція  $F(x)$  не обращается въ безконечность при  $x=a$ , то она, вообще

говоря, можетъ быть развернута въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ  $x - a$ .  
Пусть

$$F(x) = F(a + x - a) = F(a) + (x-a)F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} F''(a) + \dots + \frac{(x-a)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} F^{(m)}(a) + \dots;$$

отсюда выводимъ:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^m} &= \frac{F(a)}{(x-a)^m} + \frac{F'(a)}{(x-a)^{m-1}} + \frac{F''(a)}{1 \cdot 2 \cdot (x-a)^{m-2}} + \dots \\ &+ \frac{F^{(m-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)(x-a)} + \frac{F^{(m)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} + \dots, \end{aligned}$$

и коэффициентъ при  $\frac{1}{x-a}$ , т.-е. вычетъ  $\varphi(x)$  относительно значенія  $a$  переменной  $x$ , есть

$$\frac{F^{(m-1)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \left\{ \frac{d^{m-1}[\varphi(x) \cdot (x-a)^m]}{dx^{m-1}} \right\}_{x=a}.$$

Когда число  $m$  приводится къ единицѣ, вычетъ  $\varphi(x)$  принимаетъ видъ

$$[(x-a)\varphi(x)]_{x=a}.$$

Предположимъ, что въ этомъ случаѣ функція  $\varphi(x)$  есть дробь  $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ , знаменатель которой  $\psi(x)$  при  $x=a$  обращается въ нуль. Вычетомъ будетъ предѣлъ произведенія

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}(x-a),$$

когда  $x$  стремится къ  $a$ , и этотъ предѣлъ, очевидно, равенъ

$$\frac{f(a)}{\psi'(a)};$$

итакъ, вычетъ равенъ числителю, раздѣленному на производную отъ знаменателя, но это правило теряетъ свою силу, если  $a$  есть простой корень уравненія  $f(x) = 0$ .

**§ 437.** Приложимъ предыдущія правила къ разысканію вычета функціи  $\cot \frac{1}{x}$  для значенія  $x = \frac{1}{n\pi}$ , обращающаго ее въ безконечность.

Произведеніе

$$\left(x - \frac{1}{n\pi}\right) \cot \frac{1}{x}$$

имѣетъ для  $x = \frac{1}{n\pi}$  конечный предѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$x = \frac{1}{n\pi + h},$$

гдѣ  $h$  бесконечно-мало, видимъ, что  $\cot \frac{1}{x}$  можно замѣнить черезъ  $\frac{1}{h}$ ; преобразованное произведение

$$\frac{1}{h} \left( \frac{1}{n\pi + h} - \frac{1}{n\pi} \right),$$

очевидно, имѣетъ предѣломъ  $-\frac{1}{n^2\pi^2}$ , что, слѣдовательно, и будетъ искомымъ вычетомъ.

Отыщемъ еще вычетъ

$$\frac{1}{x^2 \operatorname{tang} x} \quad (1)$$

относительно  $x = 0$ . Произведение функции на  $x^3$  имѣетъ въ этомъ случаѣ конечный предѣлъ и вычетомъ будетъ значеніе, которое принимаетъ, при  $x = 0$ , выраженіе

$$\frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x}{\operatorname{tang} x} \right).$$

Производимъ вычисленія:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{\operatorname{tang} x} \right) &= \frac{\operatorname{tang} x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang}^2 x} = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x}{\operatorname{tang} x} \right) &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x - 1)\sin^2 x - 2\sin x \cos x (\sin x \cos x - x)}{\sin^4 x} = \\ &= \frac{-2\sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x + 2x \sin x \cos x}{\sin^4 x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Когда  $x$  очень мало, то мы, отбрасывая бесконечно-малыя пятого порядка, имѣемъ:

$$\sin^4 x = x^4,$$

$$\sin^2 x \cos^2 x = \left( x - \frac{x^3}{6} \right)^2 \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} - x^4 = x^2 - \frac{4}{3} x^4,$$

$$x \sin x \cos x = x \left( x - \frac{x^3}{6} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) = x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{6} = x^2 - \frac{2}{3} x^4;$$

при подстановкѣ этихъ значеній дробь (2) приводится къ  $-\frac{2}{3}$ , что и служить ея предѣломъ; слѣдовательно, вычетъ равенъ  $-\frac{1}{3}$ .

#### Обозначенія Коши

§ 438. Коши ввелъ для обозначенія вычета функций  $\varphi(x)$  знакъ  $\oint$ ; но такъ какъ важно знать, къ какому корню уравненія  $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$  относится рассматриваемый вычетъ,

то онъ предложилъ указывать его явно посредствомъ одного и того же множителя въ числитель и знаменатель, заключая его въ знаменатель въ двойныя скобки. Такъ, напр.,

$$\oint \frac{\varphi(x) \cdot (x - a)}{[(x - a)]}$$

есть вычетъ функціи  $\varphi(x)$ , относящійся къ значенію  $x = a$ , для котораго эта функція обращается въ безконечность.

При отсутствіи всякаго подобнаго указанія  $\oint \varphi(x)$  обозначаетъ сумму вычетовъ, относящихся ко всѣмъ корнямъ уравненія  $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ . Такое выраженіе Коши называлъ *интегральнымъ вычетомъ*. Для обозначенія суммы вычетовъ, относящихся только къ нѣкоторымъ корнямъ уравненія  $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ , вводятъ въ числитель и знаменатель множителей, соотвѣтствующихъ этимъ корнямъ, заключая ихъ въ знаменатель въ двойныя скобки. Такъ, напр.,

$$\oint \frac{\varphi(x) \cdot (x - a)(x - b)(x - c)}{[(x - a)][(x - b)][(x - c)]}$$

обозначаетъ сумму вычетовъ  $\varphi(x)$ , взятыхъ въ послѣдовательномъ порядкѣ относительно  $a, b, c$ .

Для обозначенія суммы вычетовъ, относящихся къ тѣмъ изъ корней, вещественныя части которыхъ содержатся между двумя предѣлами  $\alpha$  и  $\alpha'$ , а коэффициенты при  $\sqrt{-1}$  между  $\beta$  и  $\beta'$ , пишутъ:

$$\oint_{\beta \alpha}^{\beta' \alpha'} \varphi(x);$$

но, принимая это обозначеніе, согласились считать только половину вычетовъ, относящихся къ корнямъ, для которыхъ достигнутъ одинъ изъ предѣловъ, и только четверть для тѣхъ, для которыхъ и вещественная часть, и коэффициентъ при  $\sqrt{-1}$  достигаютъ оба указаннаго предѣла.

Цѣль послѣднихъ соглашеній — употреблять безъ ограниченій слѣдующую формулу:

$$\oint_{\beta \alpha}^{\beta' \alpha'} \varphi(x) = \oint_{\beta \alpha}^{b a} \varphi(x) + \oint_{\beta \alpha}^{b \alpha'} \varphi(x) + \oint_{b \alpha}^{\beta' a} \varphi(x) + \oint_{b \alpha}^{\beta' \alpha'} \varphi(x),$$

гдѣ, по предположенію,  $a$  содержится между  $\alpha$  и  $\alpha'$ , а  $b$  между  $\beta$  и  $\beta'$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если представить мнимое выраженіе  $x + y\sqrt{-1}$  точкою на плоскости, координаты которой  $x$  и  $y$ , то первая часть этого равенства будетъ суммою вычетовъ относительно корней, соотвѣтствующихъ точкамъ, расположеннымъ внутри нѣкотораго прямоугольника, а вторая часть — суммою вычетовъ относительно корней, соотвѣтствующихъ внутреннимъ точкамъ четырехъ меньшихъ прямоугольниковъ, на которые можно разбить первый. Такимъ образомъ равенство, очевидно, но при условіи считать только половину вычетовъ относительно точекъ, расположенныхъ на линіяхъ



дѣленія, такъ какъ они входятъ въ сумму, очевидно, по два раза, а если функція обращается въ безконечность при  $x = a + b\sqrt{-1}$ , то вычетъ относительно этого значенія, какъ входящій четыре раза въ сумму, долженъ быть по нашему соглашенію умноженъ въ каждомъ слагаемомъ на  $\frac{1}{4}$ .

#### ТЕОРЕМЫ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ ВЫЧЕТАМЪ

§ 439. Если функція  $\varphi(x)$  обращается въ безконечность при  $x = a$ , то разность

$$\varphi(x) - \zeta \frac{\varphi(z)(z-a)}{(x-z)(z-a)} \quad (1)$$

имѣетъ всегда конечное значеніе при  $x = a$ .

Другими словами, чтобы удалить изъ функція  $\varphi(x)$  часть, обращающуюся въ безконечность при  $x = a$ , достаточно вычесть изъ нея вычетъ функція  $\frac{\varphi(z)}{x-z}$ , относящійся къ  $z = a$ .

Предположимъ, что функція  $\varphi(x)$  развертывается въ рядъ вида

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m} + B + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \dots; \quad (2)$$

замѣняя  $x$  черезъ  $z$  и дѣля на  $x-z$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{x-z} = & \frac{A_1}{(z-a)(x-z)} + \frac{A_2}{(z-a)^2(x-z)} + \dots + \frac{A_m}{(z-a)^m(x-z)} + \\ & + \frac{B}{x-z} + \frac{B_1(z-a)}{x-z} + \dots; \end{aligned} \quad (3)$$

$\frac{1}{x-z}$  для значеній  $z$ , близкихъ къ  $a$ , развертывается въ рядъ по степенямъ  $z-a$ , и мы имѣемъ:

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a) - (z-a)} = \frac{1}{x-a} \left[ 1 + \frac{z-a}{x-a} + \frac{(z-a)^2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{(z-a)^m}{(x-a)^m} + \dots \right];$$

замѣняя  $\frac{1}{x-z}$  этимъ разложеніемъ въ каждомъ изъ членовъ второй части уравненія (3), получимъ рядъ, въ которомъ коэффиціентъ при  $\frac{1}{z-a}$ , очевидно, равенъ

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m},$$

что представляет сумму членовъ въ разложеніи  $\varphi(x)$ , обращающихся въ бесконечность при  $x = a$ , а такъ какъ эта сумма есть въ то же время вычетъ функціи  $\frac{\varphi(z)}{x - z}$ , то теорема доказана.

§ 440. По формулѣ, данной для вычета функціи въ § 436-мъ, легко видѣть, что вычетъ функціи

$$\frac{\varphi(z)}{x - z},$$

относящейся къ  $z = a$ , есть сумма дробей вида  $\frac{C_p}{(x - a)^p}$ ; такимъ образомъ, по теоремѣ Коши мы находимъ такую рациональную дробь, вычитая которую изъ данной функціи отъ  $x$ , мы заставляемъ исчезнуть, при  $x = a$ , часть этой функціи, обращающую ее въ бесконечность. Найдемъ, напр., рациональную дробь, вычитая которую изъ  $\frac{1}{1 - \cos x}$ , получаемъ, при  $x = 0$ , конечную разность. Эта дробь, по предыдущей теоремѣ, равна

$$\oint \frac{z}{(1 - \cos z)(x - z)((z))},$$

т.-е. равна вычету функціи  $\frac{1}{(x - z)(1 - \cos z)}$ , относящемуся къ  $z = 0$ . Такъ какъ  $z = 0$  есть двойной корень уравненія  $1 - \cos z = 0$ , то вычетъ есть (§ 436) значеніе, при  $z = 0$ , производной

$$\frac{d}{dz} \frac{z^2}{(x - z)(1 - \cos z)};$$

производимъ вычисленіе:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(x - z)(1 - \cos z)} &= \frac{2z(1 - \cos z)(x - z) - z^2 \sin z(x - z) + z^2(1 - \cos z)}{(1 - \cos z)^2(x - z)^2} = \\ &= \left( \frac{1}{x - z} \right) \frac{2z(1 - \cos z) - z^2 \sin z}{(1 - \cos z)^2} + \frac{z^2}{(x - z)^2(1 - \cos z)}. \end{aligned}$$

Первый членъ во второй части имѣетъ предѣломъ нуль, потому что знаменатель представляетъ бесконечно-малую четвертого порядка, а въ числитель по замѣнѣ синуса и косинуса ихъ рядами первые члены, послѣ упрощеній, будутъ пятого порядка. Во второмъ членѣ второй части дробь  $\frac{z^2}{1 - \cos z}$ , равная  $\frac{z^2}{2 \sin^2 \frac{z}{2}}$ , имѣетъ предѣломъ 2, и весь

второй членъ приводится, при  $z = 0$ , къ  $\frac{2}{x^2}$ . Такова функція, вычитая которую изъ  $\frac{1}{1 - \cos x}$ , получаемъ остатокъ, имѣющій конечное значеніе при  $x = 0$ . Иногда говорятъ выразительно, что  $\frac{2}{x^2}$  есть бесконечная часть функціи  $\frac{1}{1 - \cos x}$ , хотя это и не совсѣмъ правильно.

§ 441. Разложение рациональных дробей на простѣйшія. — Если вычесть изъ рациональной дроби  $\varphi(x)$  интегральный вычетъ  $\mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{x-z}$ , относящійся ко всѣмъ корнямъ уравненія  $\frac{1}{\varphi(z)} = 0$ , то разность

$$\varphi(x) - \mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{x-z}$$

не обратится, по предыдущей теоремѣ, въ бесконечность, ни для одного изъ значеній  $x$ , обращающихъ функцію  $\varphi(x)$  въ бесконечность; и такъ какъ вычетъ никогда не бываетъ бесконечностью, то эта разность, представляющая собою, очевидно, рациональную функцію отъ  $x$ , не обращается въ бесконечность ни для какого конечнаго значенія переменной: она приводится, слѣдовательно, къ цѣлой функціи, и, значитъ, интегральный вычетъ

$$\mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{x-z}$$

будетъ суммою простѣйшихъ дробей, входящихъ въ составъ  $\varphi(x)$ . Когда въ  $\varphi(x)$  степень знаменателя превышаетъ степень числителя, выраженіе не имѣетъ цѣлой части, и

$$\varphi(x) = \mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{x-z}.$$

Пусть, напр.,

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)};$$

будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x+1)} &= \mathcal{E} \frac{1}{(x-z)[(z+1)][(z-1)]^2} = \\ &= \mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z-1)^2[(z+1)]} + \mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z+1)[(z-1)]^2}, \end{aligned}$$

но (§ 436)

$$\mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z-1)^2[(z+1)]} = \frac{1}{4(x+1)},$$

$$\mathcal{E} \frac{1}{(x-z)(z+1)[(z-1)]^2} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

СУММА ВЫЧЕТОВЪ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦІИ

§ 442. Возьмемъ снова уравненіе

$$\varphi(x) = \mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{x-z}, \quad (1)$$

которое предполагает только, что рациональная функция  $\varphi(x)$  обращается в нуль для бесконечно-большого значения  $x$ . Умножаем обѣ части на  $x$  и замѣчаемъ, что такъ какъ вычеты, сумма которыхъ составляетъ вторую часть, взяты относительно значеній буквы  $z$ , обращающихся  $\varphi(z)$  вѣ бесконечность, то умноженіе на  $x$  можетъ быть выполнено подѣ знакомъ  $\mathcal{E}$ ; будемъ имѣть:

$$x\varphi(x) = \mathcal{E} \frac{[(\varphi(z))]}{1 - \frac{z}{x}}, \quad (2)$$

и если  $x$  станетъ безпредѣльно расти, то получимъ:

$$x\varphi(x) = \mathcal{E} \varphi(z). \quad (3)$$

Если произведеніе  $x\varphi(x)$  подобно  $\varphi(x)$  обращается вѣ нуль для бесконечно-большого значенія  $x$ , или, другими словами, если степень знаменателя  $\varphi(x)$  превышаетъ болѣе, чѣмъ на единицу, степень числителя, то будемъ имѣть:

$$\mathcal{E} \varphi(z) = 0, \quad (4)$$

т.-е. что сумма всѣхъ вычетовъ функции  $\varphi(z)$  равна нулю. Эта формула отличается только по виду отъ весьма важной формулы, данной Эйлеромъ.

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{x^p}{F(x)},$$

гдѣ  $F(x)$  — многочленъ степени выше  $p + 1$ ; предположимъ, что всѣ его множители неравны между собою; если  $x = a$  одинъ изъ этихъ множителей, то вычетъ, отвѣчающій  $x = a$ , будетъ (§ 436)

$$\frac{a^p}{F'(a)}.$$

Если, поэтому,  $a, b, c, \dots, k, l$  — корни уравненія  $F(x) = 0$ , то формула (4) равносильна

$$\frac{a^p}{F'(a)} + \frac{b^p}{F'(b)} + \dots + \frac{l^p}{F'(l)} = 0. \quad (5)$$

Не слѣдуетъ забывать, что показатель  $p$  въ этомъ уравненіи долженъ быть ниже степени многочлена  $F(x)$ , по крайней мѣрѣ, на двѣ единицы. Если разность между  $p$  и степенью многочлена  $F(x)$  только единица, то первая часть уже болѣе не нуль, и ея значеніе равно предѣлу выраженія  $\frac{x^{p+1}}{F(x)}$ , т.-е. обратному значенію перваго коэффиціента функции  $F(x)$ .

§ 443. Коши дополнилъ предыдущую теорему, давъ выраженіе для суммы вычетовъ раціональной функціи, не равной нулю для бесконечно-большого значенія переменнѣй. Какова бы ни была раціональная функція  $\varphi(x)$ , имѣемъ:

$$\mathcal{L} \varphi(x) = \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^2)]},$$

гдѣ опредѣленіе суммы всѣхъ вычетовъ, сколько бы ихъ ни было, приводится къ вычисленію единственнаго вычета, относящагося, согласно описанному приему, къ значенію нуль переменнѣй  $z$ .

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ (§ 439):

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)](z-u)} + \varpi(z),$$

гдѣ  $\varpi(z)$  не обращается въ бесконечность при  $z = 0$ . Кромѣ того,

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \dots + \frac{u^p}{z^p} + \dots \right);$$

слѣдовательно,

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \dots + \frac{u^p}{z^p} + \dots \right) + \varpi(z).$$

Функція  $\varphi(x)$ , обращаясь въ бесконечность вмѣстѣ съ  $x$ , допускаетъ для уравненія

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)} = 0$$

корень  $u = 0$ . Пусть  $m$  — степень его кратности: члены въ скобкахъ съ показателемъ, превышающимъ  $m+1$ , не обращаются въ бесконечность для  $u = 0$  и, слѣдовательно, не вліяютъ на вычетъ; значитъ, можно написать:

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{u}{z} + \frac{u^2}{z^2} + \dots + \frac{u^{m+1}}{z^{m+1}} \right) + \varpi(z),$$

или, что одно и то же,

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} = \frac{1}{z} \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \frac{1}{z^2} \mathcal{L} \frac{u\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \frac{1}{z^3} \mathcal{L} \frac{u^2\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \dots + \frac{1}{z^{m+2}} \mathcal{L} \frac{u^{m+1}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \varpi(z).$$



Полагая  $\frac{1}{z} = x$  и  $z^2 \varpi(z) = F(x)$ , находимъ, по раздѣленіи обѣихъ частей на  $x^2$ ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \mathcal{E} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \mathcal{E} \frac{u\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + \dots + x^m \mathcal{E} \frac{u^{m+1}\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} + F(x).$$

Беремъ теперь вычеты отъ обѣихъ частей этого уравненія относительно  $x$ , и для всѣхъ корней уравненія  $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ , принимая во вниманіе очевидныя равенства  $\mathcal{E} \frac{1}{x} = 1$ ,  $\mathcal{E} 1 = 0$ ,  $\mathcal{E} x = 0$ , ...,  $\mathcal{E} x^m = 0$ , напомнимъ:

$$\mathcal{E} \varphi(x) = \mathcal{E} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]} \mathcal{E} F(x).$$

Но  $F(x)$  обозначаетъ здѣсь  $z^2 \varpi(z)$ ; поэтому, произведеніе  $x F(x)$  равно  $z \varpi(z)$  и, слѣдовательно, обращается въ нуль, когда  $x$  предполагается бесконечно-огромнымъ, или, что одно и то же,  $z$  равнымъ нулю; такимъ образомъ имѣемъ (§ 442):

$$\mathcal{E} F(x) = 0,$$

и, значитъ, окончательно

$$\mathcal{E} \varphi(x) = \mathcal{E} \frac{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}{[(u^2)]},$$

что и требовалось показать.

#### ИЗМѢНЕНІЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМѢННОЙ

**§ 444.** Когда измѣняютъ переменную, чрезъ которую выражена функція, то вычеты послѣдней, вообще говоря, измѣняются по значенію. Разсмотримъ, напр., функцію  $\frac{1}{x}$ , вычетъ которой, относящійся къ  $x = 0$ , есть единица; полагая  $x = z^2$ , преобразовываемъ нашу функцію въ  $\frac{1}{z^2}$ , и соотвѣтственный вычетъ относительно  $z = 0$  уже будетъ нуль. Такимъ образомъ вычеты зависятъ отъ выбора переменной. Коши доказалъ слѣдующую теорему:

Если функція  $\varphi(x)$  обращается въ бесконечность при  $x = a$  и если положить  $x = \psi(z)$ , то, обозначая чрезъ  $z_1$  значеніе  $z$ , соотвѣтствующее  $x = a$ , будемъ имѣть:

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(x)(x-a)}{[(x-a)]} = \mathcal{E} \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]}. \quad (1)$$

Предположимъ сначала, что произведение  $(x - a)\varphi(x)$  имѣетъ, при  $x = a$ , конечное значеніе; имѣемъ (§ 436):

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(x)(x - a)}{[(x - a)]} = \lim(x - a)\varphi(x), \quad (2)$$

но

$$(x - a)\varphi(x) = [\psi(z) - \psi(z_1)]\varphi[\psi(z)] = \frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1} \varphi[\psi(z)](z - z_1).$$

Когда  $x$  стремится къ  $a$ ,  $z$  стремится къ  $z_1$ , и отношеніе

$$\frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1}$$

имѣетъ предѣломъ  $\psi'(z_1)$ , а произведеніе

$$\psi'(z)\varphi[\psi(z)](z - z_1)$$

имѣетъ предѣломъ вычетъ выраженія  $\psi'(z)\varphi[\psi(z)]$ , относящійся къ  $z = z_1$ ; поэтому имѣемъ:

$$\mathcal{E} \frac{\varphi(x)(x - a)}{[(x - a)]} = \mathcal{E} \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z - z_1)}{[(z - z_1)]}. \quad (3)$$

Должно замѣтить, что всякій разъ какъ для значенія  $z_1$  переменной  $z$  производная  $\psi'(z)$  обращается въ нуль или въ бесконечность, предыдущее разсужденіе теряетъ свою силу. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ  $\psi'(z)$  и  $\frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1}$ , являясь оба, при  $z = z_1$ , нулями, не будутъ вслѣдствіе этого равными бесконечно-малыми, и нельзя будетъ ихъ замѣнять одно другимъ. Пусть, напр.,  $\psi(z) = z^\mu$  и  $z_1 = 0$ ; имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1} &= z^{\mu-1}, \\ \psi'(z) &= \mu z^{\mu-1}, \end{aligned}$$

и нужно, чтобы формула (3) оставалась точною, раздѣлить вторую часть на  $\mu$ .

Предположимъ, во-вторыхъ, что при  $m$  цѣломъ произведеніе  $\varphi(x)(x - a)^m$  имѣетъ, для  $x = a$ , конечный предѣлъ; полагаемъ:

$$\varphi(x)(x - a)^m = F(x), \quad (4)$$

будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{F(a)}{(x - a)^m} + \frac{F'(a)}{(x - a)^{m-1}} + \frac{F''(a)}{1 \cdot 2 \cdot (x - a)^{m-2}} + \dots \\ &+ \frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \dots (m-1)(x - a)} + \frac{F^m(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Здѣсь для насъ важенъ членъ съ  $\frac{1}{x-a}$ , обозначаемъ сумму всѣхъ остальныхъ черезъ  $\varpi(x)$  и пишемъ:

$$\varphi(x) = \varpi(x) + \frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)(x-a)}.$$

Это уравненіе послѣ введенія перемѣнной  $z$  приметъ видъ:

$$\varphi[\psi(z)] = \varpi[\psi(z)] + \frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \cdot \frac{1}{\psi(z) - \psi(z_1)}. \quad (6)$$

Умножаемъ обѣ части на  $\psi'(z)$  и беремъ вычеты относительно  $z = z_1$ :

$$\oint \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]} = \oint \frac{\varpi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]} + \frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \oint \frac{\psi'(z)}{[(\psi(z) - \psi(z_1))]} \quad (7)$$

Первый членъ второй части равенъ нулю. Дѣйствительно, вычетъ  $\varpi(x)$ , относящійся къ значенію  $a$  перемѣнной, равенъ нулю, такъ какъ для составленія  $\varpi(x)$  изъ разложенія  $\varphi(x)$  былъ вычтенъ членъ съ  $\frac{1}{x-a}$ . Отсюда вытекаетъ, что  $\varpi(x)$  представляетъ производную отъ функціи, развертывающейся по степенямъ  $x-a$ , и, слѣдовательно, произведение

$$\varpi[\psi(z)]\psi'(z)$$

явится производною по  $z$  отъ той же самой функціи, которая будетъ, вообще, развертывающеюся въ рядъ по степенямъ  $z-z_1$ , и, значитъ, вычетъ этой производной (§ 314) равенъ нулю.

Такимъ образомъ предыдущее уравненіе приводится къ

$$\oint \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]} = \frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \oint \frac{\psi'(z)}{[(\psi(z) - \psi(z_1))]} \quad (8)$$

А такъ какъ  $\frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}$  есть вычетъ (§ 436)  $\varphi(x)$  относительно  $x=a$ , то теорема будетъ доказана, если мы покажемъ, что

$$\oint \frac{\psi'(z)}{[(\psi(z) - \psi(z_1))]} = 1.$$

Для этого полагаемъ

$$1 \mid \frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1} = \mathcal{F}(z)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z) - \psi(z_1)} - \frac{1}{z - z_1} = \mathcal{F}'(z).$$

Вычетъ  $\frac{1}{z-z_1}$  равенъ единицѣ. Что же касается вычета производной  $\mathcal{F}'(z)$ , то онъ равенъ нулю, потому что если развернуть  $\mathcal{F}(z)$  по степенямъ  $\frac{1}{z-z_1}$ , то ни одинъ изъ членовъ не дастъ производной вида  $\frac{A}{z-z_1}$ ; отсюда заключаемъ, что

$$\mathcal{C} \frac{\psi'(z)}{[(\psi(z) - \psi(z_1))]} = 1, \quad (9)$$

и уравненіе (8) приводится къ уравненію

$$\frac{F^{m-1}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} = \mathcal{C} \frac{\varphi[\psi(z)]\psi'(z)(z-z_1)}{[(z-z_1)]}, \quad (10)$$

доказывающему, что вычетъ  $\varphi(x)$  относительно  $x=a$  равенъ вычету преобразованной функціи  $\varphi[\psi(z)]$ , умноженной на производную  $\psi'(z)$ .

Должно замѣтить, что всякій разъ какъ  $\psi'(z_1)$  обращается въ нуль или въ безконечность, выведенная формула, совершенно подобно формулѣ (3), теряетъ свою силу; дѣйствительно, такъ какъ въ этомъ случаѣ дробь

$$\frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{z - z_1}$$

является также нулемъ или безконечностью для  $z = z_1$ , то ея логарифмъ не развертывается въ рядъ по степенямъ  $(z - z_1)$ .

Покажемъ, какъ слѣдуетъ тогда измѣнить формулу (10).

§ 445. Предположимъ, что дробь

$$\frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{(z - z_1)^\mu},$$

въ которой  $\mu$  обозначаетъ какое-угодно число, принимаетъ, для  $z = z_1$ , конечное значеніе, отличное отъ нуля; полагаемъ

$$1 \frac{\psi(z) - \psi(z_1)}{(z - z_1)^\mu} = F(z), \quad (1)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{\psi'(z)}{\psi(z) - \psi(z_1)} = F'(z) + \frac{\mu}{z - z_1}. \quad (2)$$

Беря вычеты отъ обѣихъ частей этого уравненія (2) относительно  $z = z_1$  и замѣчая, что вычетъ  $F'(z)$  равенъ нулю, а отъ  $\frac{\mu}{z - z_1}$  равенъ  $\mu$ , пишемъ:

$$\mathcal{C} \frac{\psi'(z)}{\psi(z) - \psi(z_1)} = \mu. \quad (3)$$

Этимъ уравненіемъ должно замѣнить уравненіе (9) предыдущаго параграфа и, слѣдовательно, первая часть уравненія (10) должна быть умножена на  $\mu$ .

## § 446. Если уравнение

$$x = \psi(z),$$

связывающее прежнюю переменную съ новою, даетъ для каждаго значенія  $x$  по нѣсколько различныхъ значеній  $z$ , то ясно, что въ предыдущихъ формулахъ  $z$  представляетъ только одно изъ нихъ, которое притомъ можно выбрать произвольно. Поэтому, если требуется преобразовать интегральный вычетъ

$$\oint \varphi(x), \quad (1)$$

то должно принимать его равнымъ не интегральному вычету

$$\oint \varphi[\psi(z)]\psi'(z), \quad (2)$$

относящемуся ко всѣмъ значеніямъ  $z$ , а частному этого вычета на число различныхъ значеній  $z$ , соотвѣствующихъ одному и тому же значенію  $x$ .

Если  $\mu$  значеній  $z$  для одного изъ корней  $x = a$  уравненія  $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$  являются равными между собою, то соотвѣтственный вычетъ входитъ только одинъ разъ въ выраженіе (2); но тогда, въ силу предыдущаго параграфа, онъ равенъ произведенію на  $\mu$  замѣняемаго имъ вычета, относящагося къ  $x = a$ , и, слѣдовательно, соотношеніе между выраженіями (4) и (2) остается тѣмъ же самымъ.

## Нѣкоторыя приложенія теоріи вычетовъ

§ 447. Коши много знаменитыхъ и важныхъ формулъ получилъ посредствомъ приложенія къ какимъ-угодно функціямъ теоремъ, доказанныхъ для раціональныхъ дробей. Несмотря на малую строгость такого распространенія, мы всё-же приведемъ здѣсь на это нѣсколько примѣровъ.

Разсматриваемъ функцію  $\cot \frac{1}{x}$  и прилагаемъ къ ней формулу, доказанную въ § 443-мъ. Корнями уравненія

$$\frac{1}{\cot \frac{1}{x}} = 0$$

являются

$$x = \pm \frac{1}{\pi}, \quad x = \pm \frac{1}{2\pi}, \quad \dots, \quad x = \pm \frac{1}{n\pi}, \quad \dots,$$

и вычетъ, относящійся къ  $\frac{1}{n\pi}$ , равенъ  $-\frac{1}{n^2\pi^2}$  (§ 437); вычетъ функціи  $\frac{\cot z}{z^2}$ , относящійся къ  $z = 0$ , равенъ  $-\frac{1}{3}$ ; отсюда выводимъ:

$$0 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{4\pi^2} + \dots + \frac{2}{n^2\pi^2} + \dots, \quad (1)$$



т.-е.

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (2)$$

Формула § 443-го, приложенная къ той же самой функціи  $\cot \frac{1}{x}$ , даетъ:

$$\cot \frac{1}{x} = \mathcal{L} \frac{[(\cot \frac{1}{z})]}{x - z} + \mathcal{L} \frac{\cot z}{[(z)](1 - xz)}. \quad (3)$$

Но для значенія  $z = \frac{1}{n\pi}$

$$\mathcal{L} \frac{[(\cot \frac{1}{z})]}{x - z} = -\frac{1}{n^2 \pi^2} \frac{1}{x - \frac{1}{n\pi}}, \quad (4)$$

$$\mathcal{L} \frac{\cot z}{[(z)](1 - xz)} = x. \quad (5)$$

Слѣдовательно, соединяя вычеты, относящіеся къ  $z = \frac{1}{n\pi}$  и къ  $z = -\frac{1}{n\pi}$ , пишемъ формулу (3) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cot \frac{1}{x} = x - 2x \left( \frac{1}{\pi^2 x^2 - 1} + \frac{1}{4\pi^2 x^2 - 1} + \frac{1}{9\pi^2 x^2 - 1} + \dots \right),$$

что вполне согласуется съ формулою, найденною раньше (§ 409).

#### ВЫЧИСЛЕНІЕ СИММЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ

§ 448. Пусть  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  — какая-угодно раціональная дробь и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни уравненія  $\psi(x) = 0$ , всѣ, по предположенію, различные. Полагая

$$\frac{\varphi(x)}{\psi'(x)} = F(x), \quad (1)$$

будемъ имѣть, для какого-угодно корня  $x_p$ ,

$$F(x_p) = \mathcal{L} \frac{\varphi(x)(x - x_p)}{\psi(x)[(x - x_p)]}, \quad (2)$$

и, слѣдовательно,

$$F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n) = \mathcal{L} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}. \quad (3)$$

Вторая часть, представляющая сумму всѣхъ вычетовъ дроби  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ , можетъ (§ 443) быть выражена посредствомъ одного вычета, и мы такимъ образомъ получимъ выраженіе симметрической функціи корней уравненія  $\psi(x) = 0$ .

Пусть, напр.,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_m, \\ F(x) &= x^n;\end{aligned}$$

нужно взять

$$\varphi(x) = x^n [m x^{m-1} + (m-1) A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1}] = x^n \psi'(x),$$

и формула (3) будетъ:

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = \oint \frac{x^n \psi'(x)}{\psi(x)}. \quad (4)$$

Но по § 443-му

$$\oint \frac{x^n \psi'(x)}{\psi(x)} = \oint \frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})] \psi\left(\frac{1}{z}\right)} = \oint \frac{\frac{m}{z^{m-1}} + \frac{(m-1)A_1}{z^{m-2}} + \dots + A_{m-1}}{[(z^{n+2})] \left(\frac{1}{z^m} + \frac{A_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{A_{m-1}}{z} + A_m\right)},$$

что можно написать въ видѣ:

$$\oint \frac{x^n \psi'(x)}{\psi(x)} = \oint \frac{m + (m-1)A_1 z + \dots + A_{m-1} z^{m-1}}{[(z^{n+1})](1 + A_1 z + \dots + A_m z^m)},$$

или (§ 436)

$$\oint \frac{x^n \psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{m + (m-1)A_1 z + \dots + A_{m-1} z^{m-1}}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_m z^m} \right),$$

гдѣ переменная  $z$  послѣ дифференцированій должна быть замѣнена нулемъ.

**§ 449.** Предыдущая формула для приложенія была бы слишкомъ тяжела, но ее можно преобразовать и замѣнить другою, гораздо болѣе изящною. Мы нашли:

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n = \oint \frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^{n+2})] \psi\left(\frac{1}{z}\right)}.$$

Для преобразованія этого вычета замѣтимъ, что при  $z = 0$  выраженіе

$$\frac{\psi'\left(\frac{1}{z}\right)}{z \psi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

имѣть предѣломъ  $m$ ; имѣемъ же тождественно:

$$\frac{\mathcal{L} \psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{[(z^{n+2})\psi] \left( \frac{1}{z} \right)} = \mathcal{L} \frac{1}{[(z^{n+1})]} \left[ \frac{\psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{z\psi \left( \frac{1}{z} \right)} - m \right] + \mathcal{L} \frac{m}{[(z^{n+1})]},$$

и такъ какъ, очевидно,

$$\mathcal{L} \frac{m}{[(z^{n+1})]} = 0,$$

то это уравненіе приводится къ

$$\mathcal{L} \frac{\psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{[(z^{n+2})\psi] \left( \frac{1}{z} \right)} = \mathcal{L} \frac{1}{[(z^{n+1})]} \left[ \frac{\psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{z\psi \left( \frac{1}{z} \right)} - m \right];$$

но

$$\frac{\psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{z^2\psi \left( \frac{1}{z} \right)} - \frac{m}{z} = - \frac{d[z^m\psi \left( \frac{1}{z} \right)]}{dz},$$

и, слѣдовательно,

$$\mathcal{L} \frac{\psi' \left( \frac{1}{z} \right)}{[(z^{n+2})\psi] \left( \frac{1}{z} \right)} = - \mathcal{L} \frac{1}{z^n} \frac{d[z^m\psi \left( \frac{1}{z} \right)]}{dz} = \frac{1}{1.2.3 \dots (n-1)} \left[ \frac{d^n [z^m\psi \left( \frac{1}{z} \right)]}{dz^n} \right]_{z=0}.$$

Чтобы вычислить значеніе, которое принимаетъ, при  $z=0$ ,  $n$ -ая производная отъ  $z^m\psi \left( \frac{1}{z} \right)$ , достаточно развернуть въ рядъ функцію

$$1 \left[ z^m\psi \left( \frac{1}{z} \right) \right] = 1(A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \dots + A_1 z + 1)$$

и умножить на  $1.2.3 \dots n$  коэффициентъ при  $z^n$ ; но, полагая

$$u = A_m z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \dots + A_1 z,$$

имѣемъ:

$$1(1 + A_1 z + \dots + A_m z^m) = 1(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots - \frac{(-1)^n}{n} u^n + \dots$$

Называя через  $p, q, r, \dots$  цѣлыя числа, меньшія  $n$ , видимъ, что коэффициентъ при  $z^n$  въ  $\frac{(-1)^k u^k}{k}$  есть сумма дробей вида

$$\frac{(-1)^k}{k} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q) \dots (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots t)} A_1^p A_2^q \dots A_m^t,$$

въ которыхъ

$$\begin{aligned} p + q + \dots + t &= k, \\ p + 2q + \dots + mt &= n, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, искомый вычетъ, т.-е.

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_m^n,$$

выразится суммою

$$\sum^n \frac{(-1)^{p+q+\dots+t}}{p+q+\dots+t} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p+q+\dots+t)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q) \dots (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots t)} A_1^p A_2^q \dots A_m^t,$$

гдѣ  $p, q, \dots, t$  представляютъ  $m$  такихъ цѣлыхъ чиселъ, что

$$p + 2q + \dots + mt = n.$$

**§ 450.** Теорію вычетовъ можно также приложить къ вычисленію нѣкоторыхъ симметрическихъ функцій рѣшеній двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Пусть  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $\psi(x, y) = 0$  будутъ два данныхъ уравненія съ  $x$  и  $y$ . Ищемъ сумму значеній, принимаемыхъ функціею

$$\frac{\mathcal{F}(x, y)}{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi}{dy} \frac{d\varphi}{dx}}, \quad (1)$$

для всѣхъ системъ значеній  $x$  и  $y$ , удовлетворяющихъ обоимъ уравненіямъ. Числитель—какая-угодно функція отъ  $x$  и  $y$ ; достойно замѣчанія, что эта сумма всегда равна нулю, какова бы ни была функція  $\mathcal{F}$ , лишь бы ея степень была болѣе, чѣмъ на двѣ единицы ниже суммы степеней функцій  $\varphi$  и  $\psi$ .

Въ самомъ дѣлѣ, если мы  $x$  припишемъ определенное значеніе, уравненіе  $\varphi(x, y) = 0$  дастъ для  $y$  извѣстное число соотвѣтственныхъ значеній  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Полагаемъ

$$\frac{f(x, y_1)}{\psi(x, y_1)} + \frac{f(x, y_2)}{\psi(x, y_2)} + \dots + \frac{f(x, y_n)}{\psi(x, y_n)} = F(x). \quad (2)$$

Извѣстно, что  $F(x)$  — рациональная функція отъ  $x$ ; ищемъ интегральный вычетъ этой функціи  $F(x)$ :

$$\mathcal{E} F(x) = \mathcal{E} \frac{f(x, y_1)}{\psi(x, y_1)} + \mathcal{E} \frac{f(x, y_2)}{\psi(x, y_2)} + \dots + \mathcal{E} \frac{f(x, y_n)}{\psi(x, y_n)}. \quad (3)$$

Вычеты должны быть взяты для всѣхъ значеній  $x$ , обращающихъ функціи въ безконечность, будутъ ли то значенія, обращающія знаменателей въ нуль, или значенія, обращающія числителей въ безконечность.

Значенія  $x$ , обращающія знаменателей  $\psi(x, y_1), \psi(x, y_2), \dots, \psi(x, y_n)$  въ нуль, образуютъ вмѣстѣ съ соотвѣтственными значеніями  $y_1, y_2, \dots, y_n$  всѣ рѣшенія системы

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Вычисляемъ сначала вычеты, соотвѣтствующіе этимъ рѣшеніямъ. Пусть  $\alpha$  одно изъ такихъ значеній  $x$ , а  $\beta$  — соотвѣтственное значеніе для  $y$ ; имѣемъ:

$$\oint \frac{f(x, y_p)(x - \alpha)}{\psi(x, y_p)((x - \alpha))} = \frac{f(\alpha, \beta)}{\left[ \frac{d\psi(x, y_p)}{dx} \right]_{\alpha}}. \quad (4)$$

При вычисленіи производной  $\frac{d\psi(x, y_p)}{dx}$  слѣдуетъ замѣтить, что  $y_p$  есть функція отъ  $x$ , опредѣляемая уравненіемъ  $\varphi(x, y) = 0$ ; слѣдовательно,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} \frac{dy}{dx},$$

гдѣ  $\frac{dy}{dx}$  получается изъ уравненія

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

отсюда заключаемъ, что

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

и вычетъ, относящійся къ  $x = \alpha$ , будетъ

$$\oint \frac{f(x, y_p)(x - \alpha)}{\psi(x, y_p)((x - \alpha))} = \frac{f(\alpha, \beta) \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)_{\alpha, \beta}}{\left( \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy} \right)_{\alpha, \beta}}. \quad (5)$$

Буквы  $\alpha, \beta$ , стоящія внизу скобокъ, съ правой стороны, показываютъ, что послѣ выполненія дѣйствій нужно  $x$  замѣнить черезъ  $\alpha$  и  $y$  черезъ  $\beta$ . Функція  $f(x, y)$  до сихъ поръ была произвольна; если мы положимъ

$$f(x, y) = \frac{\mathcal{F}(x, y)}{\frac{d\varphi}{dy}},$$



то вычетъ приметъ видъ

$$\frac{\mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\left(\frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dy}\right)_{\alpha, \beta}},$$

и сумма этихъ вычетовъ есть какъ разъ симметрическая функція, которую хотимъ вычислить.

Вторая часть уравненія (3) содержитъ еще вычеты, относящіеся къ значеніямъ  $x$ , обращающимъ одного изъ числителей въ бесконечность. Когда выборъ для функціи  $f(x, y)$  сдѣланъ, такими значеніями окажутся тѣ, для которыхъ  $\frac{d\varphi}{dy} = 0$  и для которыхъ, слѣдовательно, два корня уравненія  $\varphi(x, y) = 0$  являются равными между собою. Но мы сейчасъ покажемъ, что дроби, отвѣчающія этимъ двумъ корнямъ и обращающіяся обѣ въ бесконечность, имѣютъ бесконечно-огромную сумму; тогда, очевидно, сумма ихъ вычетовъ равна нулю, и, слѣдовательно, вторая часть уравненія (3) приводится къ суммѣ уже вычисленныхъ вычетовъ, т.-е. къ симметрической функціи, значеніе которой мы ищемъ.

Пусть

$$\frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\frac{d\varphi}{dy_1} \psi(x, y_1)} + \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\frac{d\varphi}{dy_2} \psi(x, y_2)} \quad (6)$$

будутъ два члена уравненія (2), обращающіеся для одного и того же значенія  $x$ ,  $x = x'$ , одновременно въ бесконечность. Если положить  $x = x' + \varepsilon$ , гдѣ  $\varepsilon$  бесконечно-мало, то корни  $y_1$  и  $y_2$ , которые, по предположенію, становятся равными при  $x = x'$ , будутъ бесконечно-мало отличаться другъ отъ друга. Пусть

$$\begin{aligned} y_1 &= y' + \eta_1, \\ y_2 &= y' + \eta_2, \end{aligned}$$

при чемъ  $y_1, y_2, \dots, y_n$  выведены изъ уравненія  $\varphi(x, y) = 0$ ; будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \varphi(x' + \varepsilon, y' + \eta_1) &= 0, \\ \varphi(x' + \varepsilon, y' + \eta_2) &= 0, \end{aligned}$$

и такъ какъ  $\varepsilon, \eta_1$  и  $\eta_2$  бесконечно-малы и, по предположенію,

$$\begin{aligned} \varphi(x', y') &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dy'} &= 0, \end{aligned}$$

то эти уравненія приводятся къ

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx'} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dy'^2} \eta_1^2 &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx'} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dy'^2} \eta_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что  $\eta_1$  и  $\eta_2$  могутъ быть рассматриваемы, какъ равныя, но съ противоположными знаками, и притомъ, какъ бесконечно-большія относительно  $\varepsilon$ , которое

сравнимо съ ихъ квадратомъ. Отсюда вытекаетъ, что множители  $\frac{d\varphi}{dy_1}$  и  $\frac{d\varphi}{dy_2}$  въ знаменателяхъ формулы (6) пропорціональны  $\eta_1$  и  $\eta_2$ ; дѣйствительно, такъ какъ производная  $\frac{d\varphi}{dy}$  обращается въ нуль при  $x = x'$ ,  $y = y'$ , то она, когда  $x'$  переходитъ въ  $x' + \varepsilon$  и  $y'$  въ  $y' + \eta$ , принимаетъ значеніе

$$\frac{d^2\varphi}{dy'dx'}\varepsilon + \frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta,$$

которое мы приводимъ, пренебрегая членомъ съ  $\varepsilon$ , къ

$$\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta.$$

Такимъ образомъ. обозначая черезъ  $\beta_1$  и  $\beta_2$  дроби

$$\frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\psi(x, y_1)}, \quad \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\psi(x, y_2)},$$

мы приводимъ сумму двухъ дробей (6) къ

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\frac{d^2\varphi}{dy'^2}\eta_1},$$

гдѣ  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — функціи отъ  $x$ , принимающія, для  $x = x'$ , одно и то же значеніе, и если ихъ разность того же порядка, что и  $\eta_1$ , то сумма (6) имѣетъ конечный предѣлъ. Но это очевидно имѣетъ мѣсто, такъ какъ для полученія  $\beta_1$  и  $\beta_2$  нужно въ одной и той же функціи замѣнить  $x$  черезъ  $x'$  и  $y$  черезъ  $y' + \eta_1$ ,  $y' - \eta_1$ , и ясно, что разность полученныхъ значеній пропорціональна  $\eta_1$ .

Слѣдовательно, мы можемъ привести вторую часть уравненія (3) къ суммѣ вычетовъ относительно значеній  $x$ , обращающихъ знаменателей въ нуль, и окончательно имѣемъ:

$$\mathcal{E} F(x) = \sum \frac{\mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\frac{d\varphi}{d\beta} \frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\psi}{d\beta}}.$$

Извѣстно (§ 442), что интегральный вычетъ  $\mathcal{E} F(x)$  будетъ равенъ нулю, если только произведеніе  $x F(x)$  приводится къ нулю для бесконечно-большого значенія  $x$ ; ищемъ, въ какомъ случаѣ это условіе выполняется. Имѣемъ:

$$F(x) = \frac{\mathcal{F}(x, y_1)}{\frac{d\varphi}{dy_1} \psi(x, y_1)} + \frac{\mathcal{F}(x, y_2)}{\frac{d\varphi}{dy_2} \psi(x, y_2)} + \dots + \frac{\mathcal{F}(x, y_n)}{\frac{d\varphi}{dy_n} \psi(x, y_n)}.$$

Когда  $x$  растетъ безпредѣльно,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  приближаются къ корнямъ однороднаго уравненія съ  $x$  и  $y$ , и ихъ отношенія къ  $x$  стремятся, вообще, къ конечнымъ предѣламъ, такъ что порядокъ величины различныхъ дробей, составляющихъ вторую часть, есть порядокъ степени  $x$ , имѣющей показателемъ избытокъ степени числителя надъ степенью знаменателя. Если  $m$  — степень  $\psi$  и  $n$  — степень  $\varphi$ , то знаменатель — степени  $m + n - 1$ . Значитъ, если  $\mathcal{F}$  — степени  $m + n - 3$ , то вторая часть сравнима съ  $\frac{1}{x^2}$ , и ея произведение на  $x$  стремится къ нулю, когда  $x$  растетъ безпредѣльно; такимъ образомъ, имѣемъ:

$$\mathcal{L} F(x) = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\sum \frac{\mathcal{F}(\alpha, \beta)}{\frac{d\varphi}{d\beta} \frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\varphi}{d\alpha} \frac{d\psi}{d\beta}} = 0.$$

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Обозначая черезъ  $\varphi(z)$  какую-угодно функцію отъ  $z$ , имѣемъ:

$$\mathcal{L}[(\varphi(z))] = \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z^2)]}.$$

Подставляя на мѣсто  $\varphi(z)$  дробь  $\frac{f(z)}{z-x}$ , выводимъ изъ этой формулы:

$$f(x) = \mathcal{L} \frac{[(\varphi(z))]}{z-x} + \mathcal{L} \frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{[(z)](1-zx)}.$$

При  $f(x) = \cot \frac{1}{x}$  эта формула даетъ:

$$\cot \frac{1}{x} = x - 2x \left( \frac{1}{\pi^2 x^2 - 1} + \frac{1}{4\pi^2 x^2 - 1} + \frac{1}{9\pi^2 x^2 - 1} + \dots \right).$$

2. Прилагая къ уравненію  $\frac{\sin \pi z}{z} = 0$  общій методъ, указанный въ § 449-мъ для полученія суммы степеней его корней съ показателемъ  $-2n$ , имѣемъ:

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = -\frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} \left( \frac{d^{n-1} \frac{\sin \pi z}{z}}{dz^{n-1}} \right)_{z=0};$$

слѣдовательно, сумма есть коэффициентъ при  $z^n$  въ разложеніи произведенія

$$-\frac{n}{2} \pi^n \frac{z}{\sin z}$$

въ рядъ по степенямъ  $z$ .

3. Обозначая через  $\varphi(x)$  четную функцию отъ переменнѣной  $x$ , имѣемъ:

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) + \dots = \mathcal{E} \frac{\varphi(z)}{z} \left[ \left( \frac{z\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} \right) \right].$$

4. Изъ предыдущей формулы выводимъ:

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \dots = -\frac{1}{2} \mathcal{E} \frac{d \sin \pi z}{dz} \frac{1}{[(z^{2m})]},$$

$$1 + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^{2m}} + \dots = -\mathcal{E} \frac{d \sin \pi z}{dz} \frac{1}{(4z+1)^{2m}},$$

$$\frac{1}{s^m} + \frac{1}{(s+1)^m} + \frac{1}{(s-1)^m} + \frac{1}{(s+2)^m} + \dots = -\mathcal{E} \frac{d \sin \pi z}{dz} \frac{1}{[(s+z)^m]}.$$

5. Предполагая въ предыдущей формулѣ  $m=1$ , приводимъ ее къ

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} + \dots = \pi \cot \pi s.$$


---

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### Выраженія неопредѣленнаго вида и теорія особенныхъ точекъ

Дроби, принимающія видъ  $\frac{0}{0}$

§ 451. Когда оба члена дроби, будучи функциями отъ одной и той же переменн<sup>ой</sup>  $x$ , одновременно обращаются въ нуль или въ безконечность, дробь принимаетъ неопредѣленный видъ, и часто бываетъ важно сумѣть вычислить ея истинное значеніе, т.-е. тотъ предѣлъ, къ которому она стремится, когда  $x$  приближается къ частному значенію, создающему это затрудненіе.

Пусть

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

будетъ разсматриваемая дробь и  $x_0$  — частное значеніе, для котораго

$$\varphi(x_0) = 0, \quad \psi(x_0) = 0;$$

при этомъ предположеніи имѣемъ (§ 273):

$$\frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta h)}{\psi'(x_0 + \theta_1 h)},$$

гдѣ  $\theta$  и  $\theta_1$  оба меньше единицы; отсюда, подводя  $h$  къ нулю, заключаемъ:

$$\lim \frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} = \frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Такимъ образомъ, искомый предѣлъ равенъ отношенію производныхъ обоихъ членовъ разсматриваемой дроби.

Если бы производныя  $\varphi'(x_0)$  и  $\psi'(x_0)$  обратились въ нуль одновременно съ  $\varphi(x_0)$  и  $\psi(x_0)$ , то для вычисленія предѣла дроби

$$\frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)}$$



пришлось бы взять большее число членовъ ряда Тэйлора. Пусть для обѣихъ функцій  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  первыми производными, не обращающимися въ нуль при  $x = x_0$ , будутъ  $\varphi^p(x)$  и  $\psi^q(x)$ . Теорема Тэйлора дастъ:

$$\frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)} = \frac{\frac{h^p}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \varphi^p(x_0 + \theta h)}{\frac{h^q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots q} \psi^q(x_0 + \theta h)};$$

отсюда ясно, что предѣлъ второй части при  $h$ , стремящемся къ нулю, равенъ нулю, если  $p$  больше  $q$ , обращается въ безконечность, если  $p$  меньше  $q$ , и равенъ

$$\frac{\varphi^p(x_0)}{\psi^q(x_0)},$$

если  $p = q$ .

Изъ этого вытекаетъ слѣдующее правило: Когда дробь  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  при  $x = x_0$  принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ , ея истинное значеніе равно отношенію производныхъ  $\frac{\varphi'(x_0)}{\psi'(x_0)}$ ; если и это отношеніе принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ , нужно его замѣнить отношеніемъ вторыхъ производныхъ  $\frac{\varphi''(x_0)}{\psi''(x_0)}$ , и т. д., до тѣхъ поръ пока не получится двухъ производныхъ, не обращающихся въ нуль одновременно; ихъ отношеніе, которое можетъ быть нулемъ или безконечностью, есть истинное значеніе  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ .

Предыдущее доказательство предполагаетъ, что значеніе  $x_0$ , для котораго рассматриваемая дробь принимаетъ неопредѣленный видъ, представляетъ конечное количество; въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ нельзя было бы предложенную дробь замѣнить отношеніемъ  $\frac{\varphi(x_0 + h)}{\psi(x_0 + h)}$  и потомъ подводить  $h$  къ нулю, такъ какъ  $x_0$ , будучи безконечно-огромнымъ, не можетъ входить въ вычисленія, какъ опредѣленное количество. Чтобы избѣжать этой трудности, достаточно измѣнить переменную. Полагая  $x = \frac{1}{y}$ , представ-

ляемъ дробь  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  въ видѣ  $\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}$ ; тогда она приметъ неопредѣленный видъ уже

при  $y = 0$ , и къ ней можно примѣнить общую теорему, доказательство которой для преобразованнаго вида дроби сохранить свою силу; имѣемъ:

$$\lim \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{-\frac{1}{y^2} \varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{-\frac{1}{y^2} \psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)};$$

слѣдовательно, правило не подверглось никакому измѣненію.

§ 452. Когда дробь принимает видъ  $\frac{0}{0}$  для значеній, приписываемыхъ одновременно двумъ переменнымъ  $x$  и  $y$ , она является, вообще, совершенно неопредѣленною, и ея предѣлъ зависитъ отъ закона, по которому обѣ переменныя приближаются къ значеніямъ, создающимъ упомянутое затрудненіе.

Дѣйствительно, пусть

$$\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$$

будетъ дробь, которая для  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ ; полагая  $x = x_0 + h$ ,  $y = y_0 + k$  и замѣчая, что  $\varphi(x_0, y_0)$  и  $\psi(x_0, y_0)$  равны нулю, имѣемъ:

$$\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \frac{\varphi(x_0 + h, y_0 + k)}{\psi(x_0 + h, y_0 + k)} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 k + R}{\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)_0 k + R_1}.$$

Когда  $h$  и  $k$  бесконечно-малы,  $R$  и  $R_1$  могутъ быть отброшены, и мы будемъ имѣть:

$$\lim \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} = \lim \frac{\frac{d\varphi}{dx} h + \frac{d\varphi}{dy} k}{\frac{d\psi}{dx} h + \frac{d\psi}{dy} k} = \lim \frac{\frac{d\varphi}{dx} + \frac{k}{h} \frac{d\varphi}{dy}}{\frac{d\psi}{dx} + \frac{k}{h} \frac{d\psi}{dy}};$$

это выраженіе зависитъ отъ совершенно произвольнаго отношенія  $\frac{k}{h}$ .

ДРОБИ, ПРИНИМАЮЩІЯ ВИДЪ  $\frac{\infty}{\infty}$

§ 453. Когда оба члена дроби  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  обращаются въ бесконечность для значенія  $x = x_0$  переменной, то эту дробь можно представить подъ видомъ

$$\frac{\left[ \frac{1}{\psi(x)} \right]}{\left[ \frac{1}{\varphi(x)} \right]}, \quad (1)$$

и тогда оба члена будутъ обращаться въ нуль, т.-е. мы придемъ къ предыдущему случаю.

По выведенному выше правилу находимъ:

$$\lim \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \lim \frac{-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\varphi(x)^2}{\psi(x)^2}. \quad (2)$$

Обозначая через  $A$  искомый предѣлъ дроби  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ , переписываемъ послѣднее уравненіе въ слѣдующемъ видѣ:

$$A = A^2 \lim \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}, \quad (3)$$

откуда

$$A = \lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)};$$

слѣдовательно, дробь  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ , принимающая видъ  $\frac{\infty}{\infty}$ , можетъ быть замѣнена отношеніемъ производныхъ  $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ .

Предыдущее разсужденіе теряетъ свою силу, если количество  $A$  обращается въ нуль или въ безконечность, потому что въ этомъ случаѣ нельзя сократить обѣихъ частей уравненія (3) на общаго множителя, но правило всё-же сохраняетъ свое значеніе.

Пусть  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  будетъ дробь, принимающая, при  $x = x_0$ , видъ  $\frac{\infty}{\infty}$  и имѣющая предѣломъ нуль.

Разсматриваемъ выраженіе

$$\frac{\varphi(x) + a\psi(x)}{\psi(x)},$$

очевидно, принимающее также видъ  $\frac{\infty}{\infty}$ ; ясно, что оно имѣетъ предѣломъ произвольное число  $a$ ; значитъ, къ нему приложимо наше правило, и мы имѣемъ:

$$\lim \frac{\varphi'(x) + a\psi'(x)}{\psi'(x)} = a,$$

откуда

$$\lim \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = 0;$$

слѣдовательно, правило сохранило свое значеніе.

Если отношеніе  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$  обращается въ безконечность, то обратное отношеніе  $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$  имѣетъ предѣломъ нуль; тогда, по предыдущему, стремится къ нулю и отношеніе  $\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ , а это показываетъ, что  $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$  обращается въ безконечность.

**§ 454.** Должно замѣтить, что предыдущее правило позволяетъ только перейти отъ одного затрудненія къ другому. Въ самомъ дѣлѣ, если при  $x = x_0$  функція  $\varphi(x)$  обращается въ безконечность, то ея производная также обращается въ безконечность, и когда отношеніе двухъ функцій при конечномъ значеніи  $x = x_0$  переменнѣй принимаетъ видъ  $\frac{\infty}{\infty}$ , отношеніе производныхъ неизбѣжно принимаетъ тотъ же неопредѣленный видъ.

Дѣйствительно, остановимся на опредѣленномъ значеніи  $x_0 - h$  перемѣнной  $x$ , сколько угодно близкомъ къ  $x_0$ , и пусть  $x_0 - h'$  значеніе перемѣнной, стремящееся къ  $x_0$ ; имѣемъ:

$$\frac{\varphi(x_0 - h') - \varphi(x_0 - h)}{h - h'} = \varphi'[x_0 - h + \theta(h - h')].$$

Если  $h'$  стремится къ нулю, а  $h$  остается постояннымъ, то первая часть безпредѣльно растетъ; значитъ, то же должно быть и со второю, т.-е. производная  $\varphi'(x)$  будетъ сколько угодно большою для значенія  $x$ , взятаго между  $x_0 - h$  и  $x_0$ ; отсюда, очевидно, вытекаетъ, что она обращается въ безконечность при  $x = x_0$ .

**§ 455.** Данное нами доказательство предполагаетъ существованіе опредѣленнаго предѣла для рассматриваемой дроби  $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ; оно не приложимо, когда количество  $A$  (§ 453) въ дѣйствительности неопредѣленно. Можетъ также случиться, что отношеніе производныхъ неопредѣленно, тогда какъ дробь имѣетъ опредѣленный предѣлъ. Напр.,

$$\frac{x - \sin x}{x + \cos x}$$

при безпредѣльно возрастающемъ  $x$  стремится, очевидно, къ единицѣ; отношеніе же производныхъ

$$\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$$

остается вполнѣ неопредѣленнымъ.

#### ДРУГІЕ ВИДЫ НЕОПРЕДѢЛЕННОСТЕЙ

**§ 456.** Когда функція принимаетъ для частнаго значенія перемѣнной одинъ изъ видовъ  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $0 \times \infty$ , то всегда легко свести разысканіе истиннаго значенія на одинъ изъ двухъ предыдущихъ случаевъ. Въ самомъ дѣлѣ, логарифмъ функціи, принимающей одинъ изъ трехъ первыхъ только-что перечисленныхъ видовъ неопредѣленностей, очевидно, приметъ видъ  $0 \times \infty$ , приводящійся непосредственно къ  $\frac{0}{0}$  или къ  $\frac{\infty}{\infty}$ . Такимъ образомъ, здѣсь нѣтъ никакого новаго вопроса.

#### НѢКОТОРЫЕ ПРИМѢРЫ

**§ 457.** Намъ остается привести нѣсколько примѣровъ на нахожденіе истиннаго значенія функціи, выбирая такіе, на которыхъ можно было бы показать, какъ въ большинствѣ случаевъ выгодно вмѣсто общихъ методовъ употреблять пріемы, подсказанные привычкою къ вычисленіямъ.

Опредѣлить значеніе  $\frac{2}{x} - \cot \frac{1}{2} x$  при  $x = 0$ . — Имѣемъ:

$$\frac{2}{x} - \cot \frac{1}{2} x = \frac{2 - x \cot \frac{1}{2} x}{x}.$$

Но  $x \cot \frac{1}{2} x = \frac{x}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x}$ , что при  $x = 0$  имѣетъ предѣломъ, очевидно, 2. Функція, такимъ образомъ, принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ ; отношеніе производныхъ равно

$$\frac{-\cot \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x}}{1}.$$

Такъ какъ знаменатель имѣетъ конечное значеніе, то достаточно отыскать при  $x = 0$  истинное значеніе числителя, принимающаго всё-таки еще неопредѣленный видъ  $\infty - \infty$ . Принимая же во вниманіе равенство

$$-\cot \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} x}{\sin^2 \frac{1}{2} x} = \frac{x - \sin x}{2 \sin^2 \frac{1}{2} x},$$

мы, не прибѣгая къ производнымъ, видимъ, что числитель, будучи приближенно равенъ  $\frac{x^3}{6}$ , бесконечно-малъ по отношенію къ знаменателю; значитъ, истинное значеніе равно нулю и разность  $\frac{x}{2} - \cot \frac{1}{2} x$  при  $x = 0$  приводится къ нулю.

§ 458. Определить при  $x = 0$  истинное значеніе  $\frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$ .

Вмѣсто того чтобы брать производныя отъ обоихъ членовъ дроби, проще ихъ развернуть по формулѣ бинома въ ряды по степенямъ  $x$ , по одному виду которыхъ мы непосредственно узнаемъ искомое значеніе. Имѣемъ:

$$\sqrt{a^2 + ax + x^2} = a \sqrt{1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}} = a \left( 1 + \frac{x}{2a} + \frac{3}{8} \frac{x^2}{a^2} - \dots \right),$$

$$\sqrt{a^2 - ax + x^2} = a \sqrt{1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}} = a \left( 1 - \frac{x}{2a} + \frac{3}{8} \frac{x^2}{a^2} + \dots \right),$$

$$\sqrt{a+x} = \sqrt{a} \sqrt{1 + \frac{x}{a}} = \sqrt{a} \left( 1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \dots \right),$$

$$\sqrt{a-x} = \sqrt{a} \sqrt{1 - \frac{x}{a}} = \sqrt{a} \left( 1 - \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} - \dots \right).$$

Такимъ образомъ, предложенную функцію мы приведемъ, ограничиваясь первыми членами рядовъ, къ

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

и, слѣдовательно, истинное значеніе будетъ  $\sqrt{a}$ .



§ 459. Определить при  $x=0$  истинное значение  $\frac{l(1+x+x^2)+l(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x}$ .  
 Эта дробь при  $x=0$  принимает видъ  $\frac{0}{0}$ ; тотъ же видъ приметъ и отношеніе производныхъ отъ обоихъ ея членовъ. Поэтому здѣсь пришлось бы, по общему правилу, произвести два дифференцированія; ихъ можно избѣжать, замѣтивъ, что

$$\frac{l(1+x+x^2)+l(1-x+x^2)}{\sec x - \cos x} = \frac{\cos x l(1+x^2+x^4)}{\sin^2 x}.$$

Множитель  $\cos x$ , стремясь къ единицѣ, не оказываетъ никакого вліянія на предѣлъ; такъ какъ  $\frac{\sin^2 x}{x^2}$  стремится также къ единицѣ, то знаменатель можно замѣнить черезъ  $x^2$ , и искомый предѣлъ будетъ равенъ предѣлу

$$\frac{l(1+x^2+x^4)}{x^2}.$$

Но

$$l(1+x^2+x^4) = x^2 + x^4 - \frac{(x^2+x^4)^2}{2} + \dots,$$

гдѣ можно, при бесконечно-маломъ значеніи  $x$ , ограничиться первымъ членомъ  $x^2$ ; слѣдовательно, искомое значеніе есть единица.

§ 460. Определить при  $x=0$  истинное значение  $\frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$ . — Чтобы приложить къ этой дроби общее правило, пришлось бы шесть разъ взять производную отъ каждаго ея члена; разложеніе въ рядъ числителя приводитъ къ той же цѣли болѣе короткимъ путемъ. Имѣемъ:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} - \dots$$

Въ каждомъ изъ членовъ второй части замѣняемъ  $\sin x$  его рядомъ и отбрасываемъ члены степени выше 5, такъ какъ они, умноженные на  $x$  и раздѣленные на  $x^6$ , даютъ частное, равное въ предѣлѣ нулю; получаемъ:

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{1}{6} \left( x^3 - \frac{x^5}{2} \right) + \frac{x^5}{120} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}.$$

Также, пренебрегая высшими степенями, начиная съ  $x^7$ , пишемъ:

$$\sin^2 x = \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45};$$

такимъ образомъ, отбрасывая всюду члены съ высшими степенями, начиная съ  $x^7$ , имѣемъ

$$x \sin(\sin x) - \sin^2 x = x^6 \left( \frac{1}{10} - \frac{2}{45} \right) = \frac{x^6}{19};$$

отсюда заключаемъ, что частное

$$\frac{x \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$$

имѣетъ предѣломъ  $\frac{1}{18}$ .

§ 461. Определить при  $x = 0$  истинное значеніе  $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ .—Прилагая непосредственно общее правило неопредѣленное число разъ, мы пришли бы въ этомъ случаѣ къ замѣнѣ данной задачи другою, болѣе сложною и такого же характера. Наоборотъ, рѣшеніе выходитъ болѣе простымъ, если прибѣгнуть къ такимъ же приемамъ, какъ и въ предыдущихъ примѣрахъ. Прилагая вначалѣ общее правило, замѣняемъ данную функцію отношеніемъ производныхъ:

$$\frac{\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} - (1+x)^{\frac{1}{x}} \frac{l(1+x)}{x^2}}{1}; \quad (1)$$

при  $x = 0$  оба члена числителя обращаются въ безконечность, и, какъ видно, мы только и сдѣлали, что отъ одного затрудненія перешли къ другому.

Для нахожденія истиннаго значенія выраженія (1) придадимъ ему видъ

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1} \left[ \frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2} \right].$$

Такъ какъ  $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$ , очевидно, имѣетъ предѣломъ  $e$ , то достаточно отыскать истинное значеніе

$$\frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2}.$$

Замѣняемъ  $l(1+x)$  его рядомъ и отбрасываемъ въ произведеніи  $(1+x)l(1+x)$  всѣ высшія степени, начиная съ  $x^3$ ; находимъ:

$$\frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x + \frac{x^3}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2};$$

итакъ, искомый предѣлъ есть  $-\frac{1}{2}$ , и, слѣдовательно,

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}. \quad (2)$$

Отыщемъ еще предѣлъ функціи

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^3}, \quad (3)$$

которая, на основаніи предыдущаго, при  $x = 0$  принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ . Отношеніе производныхъ обоихъ членовъ равно

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}-1} \left[ \frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2} \right] + \frac{e}{2}}{2x}. \quad (4)$$

Такъ какъ знаменатель здѣсь  $2x$ , то мы можемъ, не вліяя на предѣлъ, отбросить при вычисленіи числителя всѣ высшія степени, начиная съ  $x^2$ .

Займемся сначала множителемъ

$$\frac{1}{x} - \frac{(1+x)l(1+x)}{x^2}.$$

Замѣняя въ немъ  $l(1+x)$  его разложеніемъ, приводимъ этотъ множитель къ  $-\frac{1}{2} + \frac{x}{6}$ , отбросивъ, конечно, всѣ члены со степенями  $x$  выше первой. Только-что полученнымъ приближеніемъ мы можемъ и ограничиться для рассматриваемаго множителя, такъ какъ множитель  $(1+x)^{\frac{1}{x}-1}$  имѣетъ конечный предѣлъ; этотъ же послѣдній замѣнить его предѣломъ  $e$  нельзя, потому что допускаемая при этомъ ошибка была бы сравнима съ  $x$  и, слѣдовательно, должна быть принята во вниманіе. Отбрасывая члены со степенями  $x$  выше первой, имѣемъ:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2},$$

и, значитъ, съ тою же степенью приближенія,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}-1} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x) = e - \frac{3}{2}ex.$$

Такимъ образомъ, выраженіе (4) переходитъ въ

$$\frac{\left(e - \frac{3}{2}ex\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\right) + \frac{e}{2}}{2x},$$

предѣлъ котораго равенъ  $\frac{11}{24}e$ , и мы окончательно находимъ:

$$\lim \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}.$$

Отсюда заключаемъ, что приближенное значеніе  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ , когда  $x$  очень мало и когда мы отбрасываемъ всѣ члены со степенями  $x$  выше второй, будетъ

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24}.$$

Это три первых члена разложения функции.

Къ той же цѣли мы пришли бы болѣе прямымъ путемъ при помощи непосредственнаго разложения. Полагаемъ

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}},$$

имѣемъ:

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + x) = \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right),$$

откуда

$$y = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots};$$

слѣдовательно,

$$y = e \left[ 1 - \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \dots \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} - \dots \right)^2 - \dots \right],$$

и первые члены, очевидно, будутъ

$$y = e \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} \right).$$

Слѣдующіе члены, получающіеся безъ всякаго затрудненія, даютъ предѣлы выраженій:

$$\frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11ex^2}{24}}{x^3},$$

$$\frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11ex^2}{24} + \frac{11ex^3}{24}}{x^4};$$

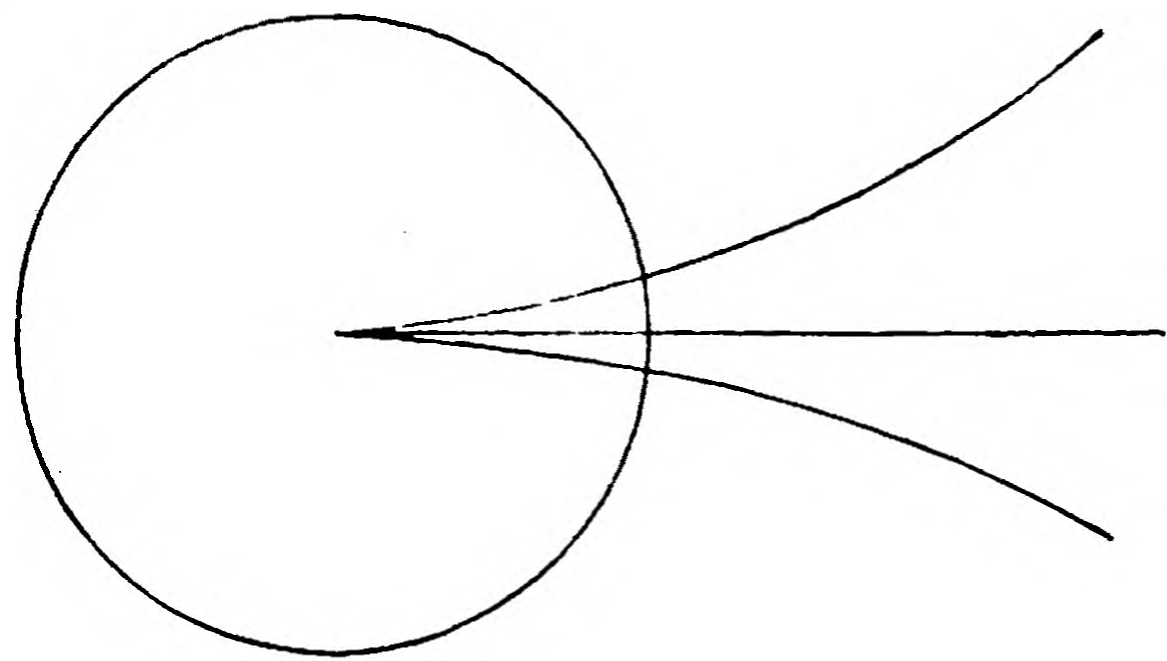
предѣлъ перваго изъ нихъ равенъ  $\frac{11e}{24}$  и втораго  $\frac{1221}{2880}e$ .

## Теорія особенныхъ точекъ

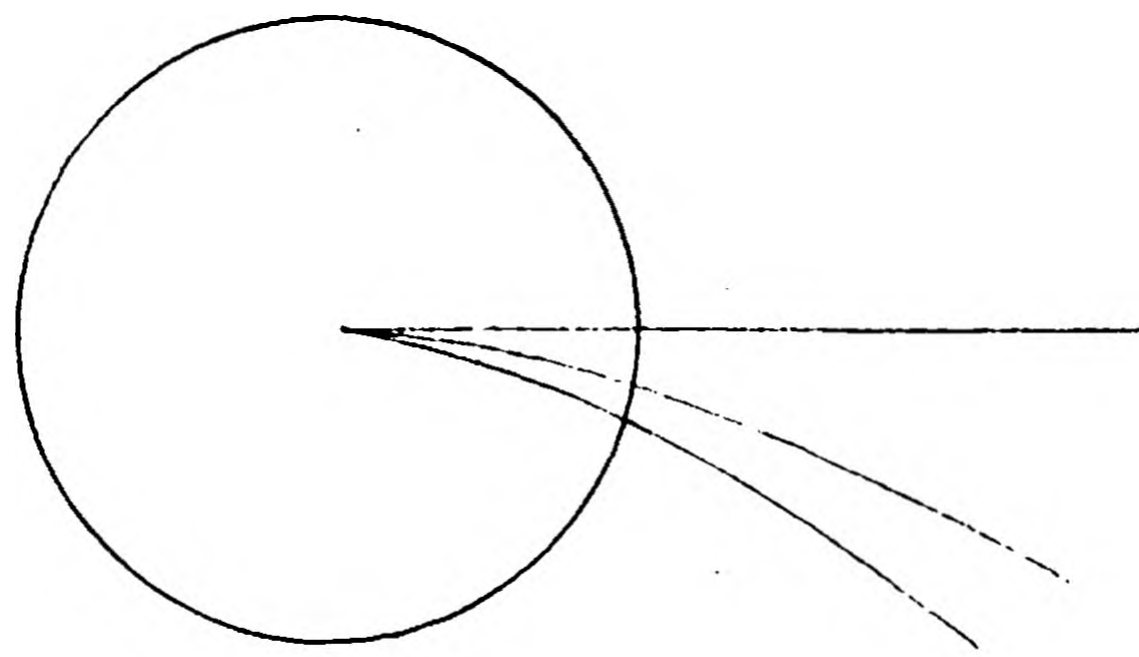
### ОПРЕДѢЛЕНІЯ

**§ 462.** Кругъ безконечно-малаго радіуса съ центромъ, расположеннымъ на плоской кривой, пересѣкаетъ, вообще говоря, эту послѣднюю въ двухъ точкахъ, которыя можно разсматривать, какъ діаметрально противоположныя, въ томъ смыслѣ, что радіусы, проведенные къ нимъ, составляютъ уголъ, безконечно-мало отличающійся отъ двухъ прямыхъ. Во всѣхъ случаяхъ, когда это условіе не выполнено, центръ круга разсматривается, какъ *особенная точка*. Этотъ терминъ обнимаетъ:

*Точки возврата*, когда бесконечно-малый кругъ, описанный изъ такой точки, какъ центра, пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ, радіусы которыхъ образуютъ бесконечно-малый уголъ; точки возврата различаютъ перваго и втораго рода, смотря по тому, будутъ ли двѣ вѣтви кривой расположены по разнымъ сторонамъ (черт. 33) общей касательной, или по одну (черт. 34).



Черт. 33



Черт. 34

*Точки прекращенія*, когда кругъ пересѣкаетъ кривую только въ одной точкѣ.

*Точки угловыя*, когда кругъ пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ, радіусы которыхъ образуютъ конечный уголъ.

*Точки кратныя*, въ которыхъ сходятся нѣсколько вѣтвей кривой, касательныхъ или нѣтъ одна къ другой; слѣдовательно, въ такихъ случаяхъ кругъ пересѣкаетъ кривую болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

*Точки уединенныя*, не смежныя ни съ какою другою, когда, слѣдовательно, вышеупомянутый бесконечно-малый кругъ не пересѣкаетъ кривой ни въ какой вещественной точкѣ.

#### АНАЛИТИЧЕСКІЙ ПРИЗНАКЪ ОСОБЕННЫХЪ ТОЧЕКЪ

**§ 463.** Особенныя точки безчисленнаго класса кривыхъ могутъ быть открыты при помощи слѣдующей теоремы:

*Если уравненіе кривой есть  $F(x, y) = 0$ , при чемъ функція  $F$  непрерывна и вполне определена для данныхъ значений  $x$  и  $y$ , то координаты особенной точки непременно удовлетворяютъ двумъ слѣдующимъ уравненіямъ:*

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0. \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $a$  и  $b$  координаты такой точки  $M$  кривой, для которой не удовлетворяются заразъ оба уравненія (1); пусть  $a + h$ ,  $b + k$  будутъ координаты точки пересѣченія кривой съ кругомъ радіуса  $R$ , центръ котораго находится въ  $M$ ; полагаемъ

$$h = R \cos u, \quad k = R \sin u;$$

въ такомъ случаѣ  $R$  и  $u$  можно считать за полярныя координаты точки пересѣченія: принимая за полюсъ точку  $M$  и за полярную ось прямую, параллельную оси  $X$ -овъ, будемъ имѣть:

$$F(a + R \cos u, b + R \sin u) = 0. \quad (2)$$



Примѣняя теорему Тэйлора и замѣчая, что  $F(a, b) = 0$ , приводимъ уравненіе (2) къ

$$0 = \frac{dF}{da} R \cos u + \frac{dF}{db} R \sin u + MR^2, \quad (3)$$

при чемъ  $M$  имѣетъ конечный предѣлъ, когда  $R$  стремится къ нулю; сокращая на  $R$ , пишемъ:

$$0 = \frac{dF}{da} \cos u + \frac{dF}{db} \sin u + MR;$$

значеніе  $a$ , удовлетворяющее этому послѣднему уравненію, при  $R$  бесконечно-маломъ, отличается, очевидно, весьма мало отъ значенія  $u_1$ , для котораго

$$\frac{dF}{da} \cos u_1 + \frac{dF}{db} \sin u_1 = 0,$$

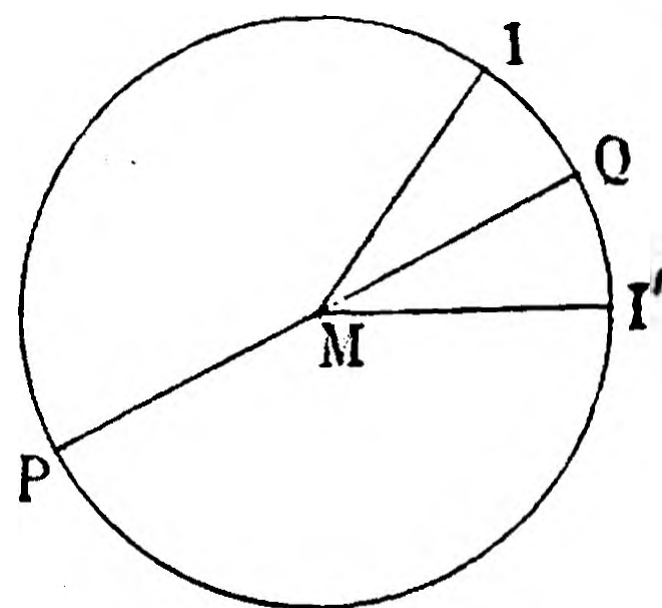
или, что одно и то же,

$$\operatorname{tang} u_1 = - \frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}},$$

а это соотвѣтствуетъ единственному и опредѣленному направленію, такъ какъ, по предположенію,  $\frac{dF}{da}$  и  $\frac{dF}{db}$  заразъ не нули.

Радиусы-векторы, соединяющіе точку  $M$  съ точками пересѣченія, образуютъ поэтому бесконечно-малые углы съ одною и тою же прямою, и кривая, слѣдовательно, имѣетъ въ  $M$  единственную касательную. Но это не исключаетъ еще всѣхъ видовъ особенныхъ точекъ, и нужно доказать, что въ точкѣ  $M$  нѣтъ ни точки возврата, ни кратной точки, гдѣ сходятся нѣсколько вѣтвей кривой, имѣющихъ одну и ту же касательную. Для этого покажемъ, что когда касательная, существованіе которой было доказано, пересѣкаетъ кругъ радіуса  $R$  въ двухъ діаметрально противоположныхъ точкахъ  $P$  и  $Q$ , данная кривая сама пересѣкаетъ кругъ въ двухъ только точкахъ, изъ которыхъ одна бесконечно-близка къ  $P$ , а другая — къ  $Q$ .

Въ самомъ дѣлѣ, отмѣчаемъ (черт. 35) на кругѣ  $PQ$ , справа и слѣва отъ точки  $Q$ ,



Черт. 35

двѣ точки  $I$  и  $I'$ , соотвѣтствующія радіусамъ  $MI$ ,  $MI'$ , наклоненнымъ къ  $MQ$  подъ даннымъ угломъ  $\alpha$ ; заставляемъ измѣняться  $u$ , непрерывнымъ образомъ, отъ значенія  $u_1$  —  $\alpha$ , соотвѣт-

ствующаго точкѣ  $I'$ , до  $u_1 + \alpha$ , соответствующаго точкѣ  $I$ , и рассматриваемъ соответственное измѣненіе первой части уравненія (3). Эта послѣдняя для  $u = u_1 - \alpha$  приметъ видъ:

$$\frac{dF}{da} \cos(u_1 - \alpha) + \frac{dF}{db} \sin(u_1 - \alpha) + MR,$$

а для  $u = u_1 + \alpha$  видъ:

$$\frac{dF}{da} \cos(u_1 + \alpha) + \frac{dF}{db} \sin(u_1 + \alpha) + M'R.$$

Полагаемъ

$$\frac{dF}{da} = k \sin u_1, \quad \frac{dF}{db} = -k \cos u_1,$$

что всегда возможно, такъ какъ  $\frac{dF}{da}$  и  $\frac{dF}{db}$  не нули и

$$-\frac{\frac{dF}{da}}{\frac{dF}{db}} = \tan u_1;$$

уравненіе кривой принимаетъ видъ:

$$k \sin(u_1 - u) + MR = 0, \quad (4)$$

гдѣ  $R$  безконечно-мало; заставляя измѣняться  $u$  отъ  $u_1 - \alpha$  до  $u_1 + \alpha$ , или отъ  $\pi + u_1 - \alpha$  до  $\pi + u_1 + \alpha$ , видимъ, что первая часть, очевидно, мѣняетъ знакъ въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ и притомъ только по одному разу, потому что производная по  $u$

$$-k \cos(u_1 - u) + R \frac{dM}{du}$$

не мѣняетъ знака ни въ одномъ изъ этихъ двухъ промежутковъ и, слѣдовательно, первая часть уравненія (4), постоянно возрастаая или постоянно убывая, можетъ проходить черезъ нуль только одинъ разъ.

§ 464. Когда оба уравненія

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0$$

удовлетворяются въ какой-нибудь точкѣ, то такъ какъ члены первой степени обращаются въ нуль въ разложеніи

$$F(a + R \cos u, b + R \sin u), \quad (1)$$

то, выполняя это разложеніе, можно опустить множитель  $R^2$  въ уравненіи кривой и такимъ образомъ написать:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 F}{da^2} \cos^2 u + 2 \frac{d^2 F}{dad b} \sin u \cos u + \frac{d^2 F}{db^2} \sin^2 u \right) + MR = 0, \quad (2)$$

гдѣ  $M$  есть множитель, опредѣляемый изъ ряда Тэйлора и зависящій отъ  $u$  и  $R$ .

Значенія  $u$ , удовлетворяющія уравненію (2), очевидно, отличаются бесконечно-мало отъ корней уравненія

$$\frac{d^2 F}{da^2} \cos^2 u + 2 \frac{d^2 F}{da db} \sin u \cos u + \frac{d^2 F}{db^2} \sin^2 u = 0. \quad (3)$$

Если эти корни—мнимые, уравненіе (2) невозможно, и рассматриваемая точка есть точка уединенная. Если они вещественные и неравные, то точка будетъ двойная, гдѣ сходятся двѣ вѣтви кривой, которыя, рассматриваемыя отдѣльно, не представляютъ никакой особенности. Это доказывается для каждой изъ нихъ совершенно такъ же, какъ было доказано для единственной вѣтви, изслѣдованной въ предыдущемъ параграфѣ.

Когда уравненіе (3) имѣетъ два равныхъ корня, кривая имѣетъ, въ рассматриваемой точкѣ, только одну касательную, но мы сейчасъ покажемъ, что она имѣетъ, вообще говоря, точку возврата.

Дѣйствительно, уравненіе кривой можетъ быть тогда представлено подѣ видомъ

$$(A \sin u + B \cos u)^2 + MR^2 = 0; \quad (4)$$

такъ какъ  $A$  и  $B$  постоянныя данныя, то можно всегда положить

$$A = k \cos u_1, \quad B = -k \sin u_1,$$

и уравненіе приметъ видъ:

$$k^2 \sin^2(u_1 - u) + MR^2 = 0.$$

Если въ этомъ уравненіи (5) измѣнять  $u$  отъ значенія  $u_1 - \alpha$  до  $u_1 + \alpha$ , при чемъ  $\alpha$  обозначаетъ весьма малый уголъ, то первый членъ въ первой части будетъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ для обоихъ предѣловъ, и то же самое будетъ со всею первою частью, лишь бы  $R$  было достаточно мало. То же самое относится и къ случаю, когда  $u$  измѣняется отъ  $\pi + u_1 - \alpha$  до  $\pi + u_1 + \alpha$ , и, слѣдовательно, въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ уравненіе имѣетъ четное число корней. Легко усмотрѣть тотчасъ же, что это четное число не превышаетъ 2. Въ самомъ дѣлѣ, вторая производная отъ первой части, взятая по  $u$ , имѣетъ конечное значеніе одинаково какъ при  $u = u_1$ , такъ и при  $u = \pi - u_1$ ; значитъ, она не мѣняетъ знака ни въ одномъ изъ обоихъ рассматриваемыхъ промежутковъ, каждый изъ которыхъ не можетъ поэтому содержать болѣе двухъ корней, и число точекъ пересѣченія въ каждомъ промежуткѣ равно 2 или нулю; ни одинъ же изъ двухъ членовъ, изъ которыхъ состоитъ уравненіе (5), не мѣняетъ знака при измѣненіи  $u$  отъ  $u_1 - \alpha$  до  $u_1 + \alpha$  или отъ  $\pi + u_1 - \alpha$  до  $\pi + u_1 + \alpha$ . Если, поэтому, въ одномъ изъ этихъ промежутковъ они одного знака, то рѣшенія нѣтъ; если же они противоположныхъ знаковъ, то  $R$  можно сдѣлать достаточно малымъ, чтобы первый членъ для предѣльныхъ значеній  $u$  поглотилъ, по абсолютной величинѣ, второй; наоборотъ, второй сообщаетъ всей первой части свой знакъ для промежуточнаго значенія  $u$ , обращающаго точно первый членъ въ нуль: значитъ, есть двѣ перемѣны знаковъ и, слѣдовательно, два корня. Но члены, сообщающіе  $R$  свой знакъ, третьей степени относительно  $\sin u$  и  $\cos u$ ; отсюда слѣдуетъ, что при  $u = u_1$  и  $u = \pi + u_1$  они противоположныхъ знаковъ; и если оба

члена уравнения (5) однихъ и тѣхъ же знаковъ при измѣненіи  $u$  отъ  $u_1 - \alpha_1$  до  $u_1 + \alpha_1$ , то они будутъ противоположныхъ знаковъ при измѣненіи  $u$  отъ  $\pi + u_1 + \alpha_1$  до  $\pi + u_1 - \alpha_1$ , и обратно. Поэтому существуютъ двѣ точки пересѣченія въ какомъ-либо одномъ изъ обоихъ промежутковъ и ни одной въ другомъ, что, очевидно, указываетъ на возвратъ кривой; и такъ какъ значеніе  $u = u_1$  или  $u = \pi + u_1$ , соответствующее касательной, придаетъ первой части знакъ, противоположный тому, который она принимаетъ для значеній, соответствующихъ предѣламъ малаго разсматриваемаго промежутка, то точки пересѣченія расположены по обѣимъ сторонамъ касательной, и возвратъ будетъ перваго рода.

Итакъ, въ томъ случаѣ, когда уравненіе (3) имѣетъ два равныхъ корня, кривая представляетъ вообще возвратъ перваго рода; но предыдущее разсужденіе покоится на предположеніи, которое въ исключительныхъ случаяхъ можетъ оказаться неточнымъ. Дѣйствительно, мы допустили, что члены, независимые отъ  $R$ , придающіе свой знакъ функции  $M$ , имѣютъ, при  $u = u_1$ , сумму, отличную отъ нуля, и, слѣдовательно, мѣняютъ знакъ, не измѣняясь по величинѣ, когда полагаютъ послѣдовательно  $u = u_1$ ,  $u = \pi + u_1$ . Если сумма этихъ членовъ при  $u = u_1$  вышла бы равною нулю, то наши заключенія были бы другія, и кривая пересѣкала бы, вообще, два раза кругъ въ каждомъ изъ разсмотрѣнныхъ нами промежутковъ, составляясь, такимъ образомъ, изъ двухъ вѣтвей, касательныхъ одна къ другой, каждая изъ которыхъ въ отдѣльности не представляетъ никакой особенности.

§ 465. Также можетъ случиться, что двѣ изъ точекъ пересѣченія исчезаютъ и что кривая представляетъ возвратъ втораго рода, но это требуетъ новаго условнаго уравненія.

Для изученія вида кривой и доказательства этихъ положеній выгодно замѣнить вводимый до сихъ поръ въ разсмотрѣніе кругъ двумя прямыми, параллельными оси  $Y$ -овъ и расположенными по обѣ стороны точки  $M$  на бесконечно-маломъ разстояніи, которое мы обозначимъ черезъ  $h$ ; ясно, что пересѣченія этихъ параллелей съ кривою опредѣляютъ число и расположеніе вѣтвей этой послѣдней. Итакъ, полагаемъ

$$x = a + h, \quad y = b + k;$$

употребляя прежнія обозначенія и принимая во вниманіе введенныя нами условія, пишемъ уравненіе кривой въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + \varphi_1(h, k) = 0, \quad (1)$$

гдѣ  $\varphi_1(h, k)$  содержитъ члены степени выше 2. Если раздѣлить уравненіе на  $k^2$  и положить  $\frac{h}{k} = u$ , то это уравненіе приметъ видъ:

$$Au^2 + 2Bu + C + hf_1(u) + h^2f_2(u) + h^3f_3(u) + \dots = 0, \quad (2)$$

гдѣ  $f_1(u)$ ,  $f_2(u)$ ,  $f_3(u)$ , ... цѣлыя функции отъ  $u$ , первая — третьей степени, вторая — четвертой, и т. д.

Въ изучаемыхъ нами случаяхъ три первыхъ члена образуютъ полный квадратъ и уравненіе приводится къ виду:

$$A(u - u_1)^2 + hf_1(u) + h^2f_2(u) + \dots = 0; \quad (3)$$

такъ какъ  $h$  очень мало, то рѣшенія, очевидно, весьма мало отличаются отъ  $u_1$ , и, слѣдовательно, существуетъ только одна касательная, составляющая съ осью  $X$ -овъ уголъ, тангенсъ котораго есть  $u_1$ . Если  $f_1(u_1)$  того же знака, что  $A$ , то рѣшеній будетъ два при  $h$  отрицательномъ и ни одного при  $h$  положительномъ; противоположное заключеніе имѣетъ мѣсто, если  $f_1(u_1)$  противоположна по знаку съ  $A$ ; кривая въ обоихъ случаяхъ представляетъ возвратъ перваго рода. Мы не станемъ повторять этого изслѣдованія, уже разъ произведеннаго при помощи круга. Остается испытать тотъ особенный случай, когда  $f_1(u_1) = 0$ . Полагаемъ тогда

$$f_1(u) = (u - u_1) \psi(u) \quad (4)$$

и замѣняемъ неизвѣстную  $u$  черезъ  $u_1 = \lambda h$ , гдѣ  $\lambda$  — новая неизвѣстная. Уравненіе (3) приметъ видъ:

$$A\lambda^2 h^2 + h^2 \lambda \psi(u_1 + \lambda h) + h^2 f_2(u_1 + \lambda h) + \dots = 0; \quad (5)$$

опуская множитель  $h^2$  и развертывая  $\psi(u_1 + \lambda h)$ ,  $f_2(u_1 + \lambda h)$  по теоремѣ Тэйлора, находимъ:

$$A\lambda^2 + \lambda \psi(u_1) + f_2(u_1) + Ph + Qh^2 + \dots = 0; \quad (6)$$

такъ какъ  $h$  бесконечно-мало, то значенія  $\lambda$  бесконечно-мало отличаются отъ значеній, удовлетворяющихъ уравненію

$$A\lambda^2 + \lambda \psi(u_1) + f_2(u_1) = 0. \quad (7)$$

Если это уравненіе имѣетъ два вещественныхъ корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то легко видѣть, что уравненіе (5) дастъ, при бесконечно-маломъ значеніи  $h$ , одно рѣшеніе, лежащее между  $\lambda_1 - \epsilon$  и  $\lambda_1 + \epsilon$ , и другое — между  $\lambda_2 - \epsilon$  и  $\lambda_2 + \epsilon$ , при чемъ  $\epsilon$  сколь угодно мало.

Такимъ образомъ, кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей съ общою касательною, каждая изъ которыхъ не представляетъ никакой особенности. Если уравненіе (7) имѣетъ корни равные, то называя черезъ  $\lambda_0$  ихъ общее значеніе, можно переписать соотношеніе (6) въ видѣ:

$$A(\lambda - \lambda_0)^2 + Ph + Qh^2 + \dots = 0.$$

Это уравненіе удовлетворяется только при такомъ значеніи  $\lambda$ , при которомъ членъ первой степени относительно  $h$  былъ бы противоположенъ по знаку члену съ  $A$ . Поэтому, если одна изъ параллелей оси  $Y$ -овъ, проведенныхъ по обѣ стороны точки  $M$ , пересѣкаетъ кривую, то другая ее не пересѣкаетъ, и получается возвратъ кривой. Этотъ возвратъ — второго рода, потому что два значенія  $\lambda$ , одно и другое, весьма мало отличаются отъ  $\lambda_0$ , и такъ какъ мы положили

$$u = u_0 + \lambda h,$$

то два значенія  $u$  соотвѣтствуютъ двумъ направленіямъ, расположеннымъ по одну и ту же сторону касательной, угловой коэффициентъ которой есть  $u_0$ .



§ 466. Полное изслѣдованіе вопроса представило бы гораздо большее число случаевъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы ограничились только тѣми изъ нихъ, въ которыхъ члены второй степени въ разложеніи Тэйлора не обращаются тождественно въ нуль. Если эти члены исчезаютъ одновременно съ членами первой степени, наши заключенія не имѣли бы мѣста, но мы не станемъ заниматься изслѣдованіемъ этихъ частныхъ случаевъ, когда въ рассматриваемой особенной точкѣ сходятся, вообще, три вѣтви кривой.

§ 467. Для опредѣленія особенныхъ точекъ кривой, представленной уравненіемъ

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

должно, по предыдущей теоріи, отыскать сначала значенія  $x$  и  $y$ , удовлетворяющія, если это возможно, тремъ уравненіямъ

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0. \quad (2)$$

Чтобы получить ихъ, мы должны исключить одну изъ неизвѣстныхъ, напр.  $y$ , между двумя первыми уравненіями; въ результатѣ получится уравненіе съ  $x$ , между корнями котораго будутъ находиться искомыя значенія  $x$ . Падула (Padula) замѣтилъ, что эти значенія всегда представляютъ многократные корни и что, слѣдовательно, не существуетъ особенныхъ точекъ, если получающееся послѣ исключенія уравненіе не имѣетъ равныхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ, для исключенія  $y$  между двумя первыми уравненіями (2) можно, напр., рѣшить второе уравненіе относительно  $y$  и полученное значеніе

$$y = f(x)$$

вставить въ первое; пишемъ:

$$F[x, f(x)] = \varphi(x) = 0;$$

$\varphi(x)$  есть результатъ исключенія, и мы, очевидно, имѣемъ:

$$\varphi'(x) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} f'(x).$$

Если, поэтому, заразъ  $\frac{dF}{dx} = 0$  и  $\frac{dF}{dy} = 0$ , то и  $\varphi'(x) = 0$ ; отсюда слѣдуетъ, что значеніе  $x$  есть кратный корень уравненія, которому оно удовлетворяетъ.

§ 468. Слѣдуетъ замѣтить, что предыдущая теорія, покоясь на разложеніи Тэйлора, абсолютно недостаточна для изученія кривыхъ, уравненія которыхъ приводятъ къ безконечнымъ или неопредѣленнымъ производнымъ.

Изучать такіе случаи, когда они представляются, должно, исходя изъ знакомства съ тѣми особенными функціями, которыя входятъ въ уравненіе.

Пусть, напр., дано уравненіе

$$y = \frac{1}{\ln x};$$

такъ какъ функція  $\frac{1}{\ln x}$  является мнимою при  $x$  отрицательномъ, то кривая имѣетъ точку прекращенія въ началѣ координатъ.

Возьмемъ еще примѣръ:

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

кривая, представленная этимъ уравненіемъ, проходитъ черезъ начало; при  $x = 0$  функція  $e^{\frac{1}{x}}$  разрывна; она бесконечно-мала при  $x$  бесконечно-маломъ и отрицательномъ и бесконечно-велика при  $x$  бесконечно-маломъ и положительномъ. Угловой коэффициентъ  $\frac{dy}{dx}$ , который въ началѣ координатъ равенъ, какъ извѣстно, предѣлу отношенія  $\frac{y}{x}$ , имѣетъ, поэтому, два значенія, изъ которыхъ одно есть единица, а другое — нуль; слѣдовательно, кривая имѣетъ угловую точку.

#### Особенныя точки поверхностей

§ 469. Предыдущая теорія распространяется на поверхности: мы ограничимся доказательствомъ слѣдующей теоремы:

*Если  $F(x, y, z) = 0$  есть уравненіе поверхности и если въ какой-нибудь точкѣ этой поверхности три уравненія*

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0$$

*не удовлетворяются одновременно, если, кромѣ того, функція  $F(x, y, z)$  и все ея производныя конечны и непрерывны, то рассматриваемая точка не представляетъ никакой особенности.*

Мы рассматриваемъ точку, какъ не представляющую никакой особенности, когда бесконечно-малый шаръ, описанный изъ нея, какъ изъ центра, пересѣкаетъ поверхность по замкнутой кривой, бесконечно-мало отличающейся отъ большого круга.

Пусть  $a, b, c$  будутъ координаты точки  $M$ , находящейся на поверхности, уравненіе которой есть  $F(x, y, z) = 0$ . Если  $a + x_1, b + y_1, c + z_1$  — координаты бесконечно-близкой точки на той же поверхности, то будемъ имѣть:

$$F(a + x_1, b + y_1, c + z_1) = 0, \quad (1)$$

или, по теоремѣ Тэйлора, принявъ еще во вниманіе, что точка  $M$  сама находится на поверхности,

$$x_1 \frac{dF}{da} + y_1 \frac{dF}{db} + z_1 \frac{dF}{dc} + M = 0, \quad (2)$$

гдѣ  $M$  обозначаетъ сумму всѣхъ членовъ не ниже второй степени относительно  $x_1, y_1, z_1$ .

Пусть  $R$  есть радиусъ шара, которымъ мы желаемъ пересѣчь поверхность,  $\alpha, \beta, \gamma$ —углы, составляемые съ осями радиусомъ-векторомъ, соединяющимъ точку  $M$  съ одною изъ точекъ пересѣченія; будемъ имѣть:

$$x_1 = R \cos \alpha, \quad y_1 = R \cos \beta, \quad z_1 = R \cos \gamma,$$

и уравненіе (2), по сокращеніи на множитель  $R$ , приметъ видъ:

$$\cos \alpha \frac{dF}{da} + \cos \beta \frac{dF}{db} + \cos \gamma \frac{dF}{dc} + RM_1 = 0, \quad (3)$$

гдѣ  $M_1$  есть функція отъ  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $R$ , имѣющая, вообще говоря, конечное значеніе при  $R = 0$ .

Уравненіе (3) показываетъ, что сумма

$$\cos \alpha \frac{dF}{da} + \cos \beta \frac{dF}{db} + \cos \gamma \frac{dF}{dc}$$

безконечно-мала одновременно съ  $R$ , и такъ какъ нормаль къ поверхности образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $\frac{dF}{da}, \frac{dF}{db}, \frac{dF}{dc}$ , то, значитъ, радиусъ-векторъ, составляющій съ осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , составляетъ съ этою нормалью уголъ, безконечно-мало отличающійся отъ прямого, и что точка, въ которой онъ встрѣчаетъ шаръ, находится на безконечно-маломъ разстояніи отъ большого круга, по которому этотъ шаръ пересѣкается касательною плоскостью.

Остается доказать, что пересѣченіе шара съ поверхностью есть замкнутая кривая. Для этого полагаемъ

$$\frac{dF}{da} = k \cos \lambda,$$

$$\frac{dF}{db} = k \cos \mu,$$

$$\frac{dF}{dc} = k \cos \nu$$

и называемъ черезъ  $\varphi$  уголъ, образуемый однимъ изъ радиусовъ-векторовъ съ направлениемъ нормали. Будемъ имѣть:

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu,$$

и уравненіе (3) приметъ видъ:

$$k \cos \varphi + M_1 R = 0. \quad (4)$$

Но ясно, что если точка движется по шару радиуса  $R$ , описывая дугу такой кривой, что значенія  $\varphi$ , соотвѣтствующія ея крайнимъ точкамъ, будутъ  $\frac{\pi}{2} - \epsilon$  и  $\frac{\pi}{2} + \epsilon$ , гдѣ  $\epsilon$

сколь-угодно мало, при достаточно-маломъ значеніи  $R$ , то уравненіе (4) удовлетворяется въ точкѣ этой дуги, которая, слѣдовательно, пересѣкаетъ кривую пересѣченія поверхности съ шаромъ радіуса  $R$ . Такимъ образомъ, всякая кривая, пересѣкающая большой кругъ, уравненіе котораго  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , пересѣкаетъ также пересѣченіе шара съ поверхностью; для этого нужно, чтобы эта линія была замкнутою и безконечно-мало отличалась бы отъ большого круга; итакъ, поверхность не представляетъ никакой особенности.

§ 470. Когда три уравненія

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0, \quad \frac{dF}{dc} = 0 \quad (1)$$

удовлетворены, соотвѣтственная точка  $M$  поверхности можетъ представить различныя особенности; мы ограничимся въ этомъ случаѣ, предполагая, что при этомъ никакого другого исключительнаго условія не представляется, опредѣленіемъ конуса, составляемаго прямыми, касательными въ точкѣ  $M$  къ кривымъ, проведеннымъ по поверхности.

Обозначая черезъ  $a + x_1$ ,  $b + y_1$ ,  $c + z_1$  координаты точки поверхности, смежной съ особенною точкою, координаты которой  $a, b, c$ , и принимая во вниманіе условія (1), мы можемъ по теоремѣ Тэйлора представить уравненіе  $F(x, y, z) = 0$  подъ видомъ:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 F}{da^2} x_1^2 + \frac{d^2 F}{db^2} y_1^2 + \frac{d^2 F}{dc^2} z_1^2 + 2 \frac{d^2 F}{dad b} x_1 y_1 + 2 \frac{d^2 F}{dad c} x_1 z_1 + 2 \frac{d^2 F}{dbdc} y_1 z_1 \right) + M = 0,$$

гдѣ  $M$  содержитъ члены не ниже третьяго порядка относительно  $x_1, y_1, z_1$ . Если пересѣчь поверхность шаромъ безконечно-малаго радіуса  $R$ , описаннымъ изъ точки  $M$ , какъ изъ центра, то, обозначая черезъ  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, составляемые осями координатъ съ радіусомъ-векторомъ, проведеннымъ въ одну изъ точекъ пересѣченія, будемъ имѣть:

$$x_1 = R \cos \alpha, \quad y_1 = R \cos \beta, \quad z_1 = R \cos \gamma.$$

При подстановкѣ этихъ значеній множитель  $R^3$  войдетъ во всѣ члены количества  $M$  и уравненіе, по сокращеніи на  $R^2$ , приметъ видъ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 F}{da^2} \cos^2 \alpha + \frac{d^2 F}{db^2} \cos^2 \beta + \frac{d^2 F}{dc^2} \cos^2 \gamma + \right. \\ & \left. + 2 \frac{d^2 F}{dad b} \cos \alpha \cos \beta + 2 \frac{d^2 F}{dbdc} \cos \beta \cos \gamma + 2 \frac{d^2 F}{dad c} \cos \alpha \cos \gamma \right) + M_1 R = 0; \end{aligned}$$

отсюда видно, что углы  $\alpha, \beta, \gamma$  — такіе, что многочленъ въ скобкахъ безконечно-малъ одновременно съ  $R$ , а это, очевидно, показываетъ, что всѣ кривыя, проведенныя на

поверхности, касательны къ производящимъ конуса, представляющаго геометрическое мѣсто прямыхъ, для которыхъ это условіе выполнено, и имѣющаго уравненіе

$$x_1^2 \frac{d^2 F}{da^2} + y_1^2 \frac{d^2 F}{db^2} + z_1^2 \frac{d^2 F}{dc^2} + 2x_1 y_1 \frac{d^2 F}{da db} + 2y_1 z_1 \frac{d^2 F}{db dc} + 2x_1 z_1 \frac{d^2 F}{da dc} = 0;$$

это—конусъ второго порядка. Если онъ—мнимый, поверхность не имѣетъ касательныхъ въ точкѣ  $M$ , которая, слѣдовательно, является въ этомъ случаѣ уединенною точкою.

§ 471. На нѣкоторыхъ поверхностяхъ существуютъ *особенныя линіи*, по которымъ эти поверхности касаются одной и той же плоскости, разысканіе которой естественно примыкаетъ къ предмету этой главы.

Пусть будетъ

$$z = \varphi(x, y) \quad (1)$$

уравненіе поверхности. Полагая

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

пишемъ уравненіе касательной плоскости:

$$v - z = p(t - x) + q(u - y). \quad (2)$$

Координаты точки касанія при безконечно-маломъ измѣненіи являются  $x + dx$ ,  $y + dy$ ,  $z + dz$ ; необходимыми и достаточными условіями, чтобы уравненіемъ касательной плоскости оставалось уравненіе (2), очевидно, будутъ:

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = 0, \quad dq = 0. \quad (3)$$

Первое изъ нихъ всегда имѣетъ мѣсто. Что же касается двухъ остальныхъ, то они могутъ быть написаны въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} dx + \frac{dp}{dy} dy &= 0, \\ \frac{dq}{dx} dx + \frac{dq}{dy} dy &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

чтобы эти равенства были совмѣстны, необходимо имѣть:

$$\frac{dp}{dx} \cdot \frac{dq}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dq}{dx}.$$

Полагая

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s,$$



придаемъ полученному условию видъ:

$$rt - s^2 = 0; \quad (5)$$

это уравненіе опредѣляетъ на поверхности кривую, по которой она можетъ касаться плоскости. Слѣдуетъ особенно замѣтить, что если на поверхности и найдена кривая, для точекъ которой уравненіе (5) удовлетворяется, то еще не извѣстно, будетъ ли касательная плоскость одна и та же во всѣхъ точкахъ этой кривой; въ самомъ дѣлѣ, нужно при этомъ, чтобы оба уравненія (4) удовлетворялись и тогда, когда  $dx$  и  $dy$  обозначаютъ бесконечно-малыя перемѣщенія по этой кривой. Если уравненіе  $rt - s^2 = 0$  удовлетворяется для всѣхъ точекъ поверхности, то въ каждой точкѣ можно пайти направление, по которому можно перемѣщать точку касанія касательной плоскости, не измѣняя положенія послѣдней; каждая касательная плоскость касается тогда поверхности по нѣкоторой линіи, и самая поверхность, являясь огибающею подвижной плоскости, уравненіе которой содержитъ, очевидно, лишь одинъ параметръ, есть поверхность развертывающаяся.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Никакая алгебраическая кривая не представляетъ точекъ прекращенія; другими словами, бесконечно-малый кругъ, проведенный изъ точки алгебраической кривой, какъ изъ центра, никогда не пересѣчетъ этой кривой только въ единственной точкѣ.

2. Никакая алгебраическая кривая не представляетъ угловыхъ точекъ; другими словами, бесконечно-малый кругъ, проведенный изъ точки алгебраической кривой, какъ изъ центра, никогда не пересѣчетъ этой кривой въ такихъ двухъ точкахъ, которыя были бы отдѣлены одна отъ другой дугою, отличною въ предѣлѣ отъ нуля или отъ полуокружности.

3. Кривая, представленная уравненіемъ

$$y^{2n+2} - (x-1)^{2n+1}x = 0,$$

гдѣ  $n$  обозначаетъ какое-угодно цѣлое число, не имѣетъ особенныхъ точекъ, хотя обѣ производныя отъ первой части обращаются въ нуль при  $y=0$ ,  $x=1$ .

4. Кривая, представленная уравненіемъ

$$4y^4 - 16xy^3 + 144x^4 + 4y^3 - 24x^2y - 48x^3 + y^2 + 4xy + 4x^2 = 0,$$

имѣетъ три точки возврата, изъ которыхъ одна помѣщается въ началѣ координатъ, другая — на оси  $x$ -овъ и третья — на оси  $y$ -овъ.

5. Поверхность, уравненіе которой есть

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2,$$

имѣетъ особенную точку въ началѣ. Найти уравненіе конуса, служащаго геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ къ кривымъ, проходящимъ черезъ эту точку и расположеннымъ на поверхности.

6. Поверхность волнъ, представленная уравненіемъ

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2 - b^2(a^2 + c^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0,$$

имѣетъ четыре особенныхъ точки, координаты которыхъ

$$y = 0, \quad x = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}};$$

найти конусъ, образуемый касательными къ поверхности въ одной изъ этихъ точекъ.

7. Развертывающійся геликондъ, представленный уравненіемъ

$$x \sin \left( \frac{2\pi z}{h} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a} \right) + y \cos \left( \frac{2\pi z}{h} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{a} \right) = a,$$

имѣетъ безчисленное множество особенныхъ точекъ, которыя образуютъ его ребро возврата и опредѣляются уравненіями

$$x = a \sin \frac{2\pi z}{h}, \quad y = a \cos \frac{2\pi z}{h}.$$


---

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### Теорія значеній maxima и minima

#### МАХІМА И МІНІМА ФУНКЦІЙ ОТЪ ОДНОЙ ПЕРЕМѢННОЙ

§ 472. Когда функція  $\varphi(x)$  для нѣкотораго значенія  $a$  переменнѣй больше своего значенія, соотвѣтствующаго всякому безконечно-близкому значенію переменнѣй, большому или меньшему  $a$ , то говорятъ, что такое значеніе функціи есть *maxim*. Если, наоборотъ, функція для нѣкотораго значенія  $a$  переменнѣй меньше, чѣмъ для всякаго значенія переменнѣй, безконечно-мало отличающагося отъ  $a$ , то говорятъ, что такое значеніе функціи есть *minim*. Мы уже замѣтили, что при непрерывномъ возрастаніи переменнѣй производная отъ функціи положительна, если функція возрастаетъ, и отрицательна, если функція убываетъ, она равна нулю для значеній, соотвѣтствующихъ значеніямъ maxima и minima. Это — основная теорема занимающей насъ теоріи, но она должна быть дополнена изученіемъ признаковъ, отличающихъ maximum отъ minimum'а и отъ случаевъ, когда при нулевомъ значеніи производной нѣтъ, однако, ни maximum'а, ни minimum'а.

§ 473. Пусть  $\varphi(x)$  есть непрерывная функція отъ переменнѣй  $x$ ; называя черезъ  $h$  безконечно-малое приращеніе, приписываемое  $x$ , имѣемъ:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x + \theta h), \quad (1)$$

гдѣ  $\theta$  — число, заключающееся между нулемъ и единицею. Если  $\varphi'(x)$  не нуль и  $\varphi''(x)$  остается конечною для рассматриваемыхъ значеній переменнѣй, то ясно, что при безконечно-маломъ  $h$  членъ первой степени относительно  $h$  придастъ свой знакъ второй части уравненія (1); слѣдовательно, разность  $\varphi(x+h) - \varphi(x)$  мѣняетъ свой знакъ вмѣстѣ съ  $h$ , и значеніе  $x$  не соотвѣтствуетъ ни maximum'у, ни minimum'у. Итакъ, общимъ условіемъ для maximum'а и minimum'а служитъ равенство нулю производной  $\varphi'(x)$ . Предполагая это условіе выполненнымъ для частнаго значенія  $x = a$ , по теоремѣ Тэйлора имѣемъ:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(a + \theta h). \quad (2)$$

Если  $\varphi''(a)$  не нуль, то первый членъ, для малыхъ значеній  $h$ , придаетъ свой знакъ второй части, и, слѣдовательно, разность  $\varphi(a+h) - \varphi(a)$ , каково бы ни было  $h$  по

знаку, одинакова по знаку съ  $\varphi''(a)$ . Значитъ, будетъ minimum при  $\varphi''(a)$  положительномъ и maximum въ противномъ случаѣ.

Когда  $\varphi''(a)$  равно нулю одновременно съ  $\varphi'(a)$ , то теорема Тэйлора даетъ:

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''(a) + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi^{IV}(a + \theta h). \quad (3)$$

Если  $\varphi'''(a)$  не равно нулю, то такъ какъ первый членъ придаетъ, для малыхъ значеній  $h$ , свой знакъ второй части, то знакъ разности  $\varphi(a+h) - \varphi(a)$  измѣняется вмѣстѣ со знакомъ  $h$ , и нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Такое же разсужденіе покажетъ, что если  $\varphi'''(a)$  равно нулю одновременно съ  $\varphi''(a)$  и  $\varphi'(a)$ , то будетъ maximum при  $\varphi^{IV}(a)$  отрицательномъ и minimum въ противномъ случаѣ.

Вообще, чтобы значеніе функціи  $\varphi(x)$  было maximum или minimum для значенія  $x = a$  переменнѣй, нужно, чтобы въ рядѣ производныхъ  $\varphi'(a)$ ,  $\varphi''(a)$ ,  $\varphi'''(a)$ , ... первая, неравная нулю, была четнаго порядка; если она отрицательна, то будетъ maximum, а если — положительна, то minimum.

Приложимъ предыдущее правило къ рѣшенію нѣкоторыхъ задачъ.

**§ 474. Задача I.** — Найти кратчайшее разстояніе плоской кривой, заданной ея уравненіемъ  $y = \varphi(x)$ , до точки, заданной въ ея плоскости координатами  $(\alpha, \beta)$ .

Квадратъ разстоянія, которое требуется сдѣлать minimum, выразится черезъ

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

Такъ какъ  $y$  дано въ функціи отъ  $x$ , то это выраженіе зависитъ только отъ одной переменнѣй. Значитъ, предыдущее правило приложимо. Приравнивая его производную нулю, имѣемъ:

$$x - \alpha + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1)$$

Это условіе, общее для maximum'a и minimum'a, выражаетъ, что данная точка, координаты которой  $\alpha$  и  $\beta$ , расположена на нормали, проведенной къ кривой черезъ точку, координаты которой  $x$  и  $y$ . Чтобы отличить maximum отъ minimum'a, нужно испытать знакъ второй производной

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (2)$$

Будетъ maximum, если это выраженіе отрицательно, и minimum, если оно положительно. Когда оно равно нулю, то, вообще говоря, нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Если точка, представленная координатами  $(\alpha, \beta)$ , движется по нормали данной кривой, при чемъ  $x$  и  $y$  — координаты основанія этой нормали, то выраженіе (2) измѣнитъ знакъ только одинъ разъ, и это будетъ при значеніи  $\beta$ , обращающемъ его въ нуль. Такимъ образомъ, на каждой нормали существуетъ точка, отдѣляющая точки, разстояніе

которыхъ до кривой, отсчитанное по этой нормали, представляетъ minimum, отъ точекъ, для которыхъ разстояніе то той же нормали есть maximum. Отрѣзокъ нормали отъ этой точки до кривой не представляетъ ни maximum'a, ни minimum'a, такъ что касательный къ кривой кругъ, описанный изъ этой точки, какъ центра, не будетъ въ смежности съ точкою касанія ни вполне внутреннимъ, потому что тогда разстояніе было бы minimum, ни вполне внешнимъ, потому что тогда оно вышло бы maximum; принимая же во вниманіе, что разстоянія его центра до точекъ кривой — одни больше, другія меньше его радіуса, заключаемъ, что онъ пересѣкаетъ кривую, къ которой онъ, однако, касателенъ, такъ какъ его центръ находится на нормали, проведенной въ общей ихъ точкѣ. Этотъ замѣчательный кругъ, называемый *соприкасающимся кругомъ*, играетъ большую роль въ теоріи кривыхъ, и намъ еще придется его разсматривать съ совсѣмъ другихъ точекъ зрѣнія.

§ 475. Предыдущіе результаты легко распространяются на кривыя двоякой кривизны. Пусть  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(x)$  — уравненія такой кривой и  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — координаты какой-нибудь точки въ пространствѣ; квадратъ разстоянія этой точки до точки на кривой, координаты которой  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , равенъ

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

Чтобы это разстояніе было maximum или minimum, нужно, чтобы производная обращалась въ нуль; такимъ образомъ, общее для обоихъ случаевъ условіе будетъ:

$$x - \alpha + (y - \beta) \frac{dy}{dx} + (z - \gamma) \frac{dz}{dx} = 0. \quad (1)$$

Это уравненіе выражаетъ, что точка  $(\alpha, \beta, \gamma)$  находится въ плоскости, нормальной къ кривой, проведенной черезъ точку  $(x, y, z)$ . Слѣдовательно, разстояніе maximum или minimum есть также нормаль, какъ и въ предыдущемъ случаѣ. Знакъ второй производной

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} + (z - \gamma) \frac{d^2z}{dx^2} \quad (2)$$

покажетъ, будетъ ли искомое разстояніе maximum или minimum. Имѣя основаніе нормали даннымъ, заключаемъ, что точки нормальной плоскости, разстояніе которыхъ до этого основанія есть minimum, отдѣляются отъ точекъ, для которыхъ это разстояніе есть maximum, прямою, одно изъ уравненій которой представитъ выраженіе (2), приравненное нулю, а другое, очевидно, будетъ уравненіе нормальной плоскости. Отличительное свойство точекъ этой прямой то, что ихъ разстоянія до точки  $(x, y, z)$ , хотя и нормальныя къ кривой, ни одно не будетъ ни maximum, ни minimum; она, какъ увидимъ ниже, служитъ осью соприкасающагося круга кривой двоякой кривизны.

§ 476. Только-что рѣшенная нами задача представляетъ въ частномъ случаѣ затрудненіе, которое не мѣшаетъ отмѣтить. Предполагаемъ, что данною кривою является кругъ, уравненіе котораго есть

$$x^2 + y^2 = R^2,$$



и что данная точка, лежащая на оси  $X$ -овъ, имѣетъ абсциссою  $\alpha$ ; квадратъ разсматриваемаго разстоянія будетъ

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2 - 2\alpha x + \alpha^2.$$

Приравнивая его производную нулю, находимъ:

$$-2\alpha = 0,$$

что невозможно. Слѣдуетъ ли отсюда заключить, вопреки очевидности, что разсматриваемое разстояніе не можетъ представить minimum'a? Общій методъ, очевидно, не годится въ настоящемъ случаѣ. Само доказательство, приведенное нами, исключаетъ этотъ случай. Дѣйствительно, мы допускали, что когда  $\varphi(\alpha)$  — minimum, разность  $\varphi(\alpha + h) - \varphi(\alpha)$  положительна, каковъ бы ни былъ знакъ весьма малаго количества  $h$ . Но въ настоящемъ случаѣ, гдѣ переменная  $x$  обозначаетъ абсциссу точки круга, оно содержится между  $-R$  и  $+R$ . Если, поэтому, приписать ему одно изъ этихъ предѣльныхъ значеній, то знакъ его приращенія будетъ установленъ, и рассужденіе, основанное на произвольности этого знака, теряетъ свой смыслъ. Значитъ, въ этомъ случаѣ всё-же можно, хотя производная и не обращается въ нуль, имѣть maximum или minimum разстоянія, что и имѣетъ мѣсто для точекъ, въ которыхъ кривая встрѣчаетъ ось  $X$ -овъ и абсциссы которыхъ будутъ  $\pm R$ .

**§ 477. Задача II.** — *Плоскость раздѣлена на двѣ части безграничною прямою  $OX$ ; свѣтъ распространяется въ каждой изъ двухъ срединъ по прямой линіи, со скоростью, измѣняющеюся, по извѣстному закону, вмѣстѣ съ направленіемъ луча. Спрашивается, по какому направленію долженъ пойти свѣтъ, чтобы изъ точки  $A$  первой срединъ достигнуть точки  $B$  второй срединъ въ кратчайшее время.*

Пусть  $a$  обозначаетъ разстояніе точки  $A$  надъ линіею  $OX$  и  $b$  — разстояніе до той же линіи точки  $B$ , находящейся подъ нею. Если  $M$  есть та точка, въ которой свѣтовой лучъ долженъ пересѣчь  $OX$  такъ, чтобы путь  $AMB$  былъ бы пройденъ свѣтомъ въ кратчайшее время, то, называя черезъ  $d$  разстояніе  $PQ$  между проекціями точекъ  $A$  и  $B$  на  $OX$  и черезъ  $\varphi$  и  $\psi$  углы, составляемые  $MA$  и  $MB$  съ нормалью къ  $OX$ , имѣемъ:

$$a \tan \varphi + b \tan \psi = d; \quad (1)$$

кромѣ того, обозначая черезъ  $u$  и  $v$  скорости свѣта по направленіямъ  $AM$  и  $MB$ , мы выразимъ время, потраченное имъ на прохожденіе изъ  $A$  въ  $B$ , черезъ

$$\frac{a}{u \cos \varphi} + \frac{b}{v \cos \psi}; \quad (2)$$

это и есть та сумма, для которой ищется minimum. Она, очевидно, зависитъ только отъ одной переменной, такъ какъ  $\varphi$  и  $\psi$  связаны уравненіемъ (1), а  $u$  и  $v$  — данныя отъ нихъ функціи. Дифференцируя уравненіе (1), находимъ:

$$\frac{a d\varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{b d\psi}{\cos^2 \psi} = 0; \quad (3)$$

принимая же во внимание, что дифференціалъ выраженія (2) обращается при minimum'ѣ въ нуль, мы должны одновременно имѣть:

$$\frac{a d\varphi \sin \varphi}{u \cos^2 \varphi} - \frac{a du}{u^2 \cos \varphi} + \frac{b d\psi \sin \psi}{v \cos^2 \psi} - \frac{b dv}{v^2 \cos \psi} = 0, \quad (4)$$

что въ силу уравненія (3) приводится къ

$$\frac{\sin \varphi}{u} - \frac{\cos \varphi}{u^2 \frac{d\varphi}{du}} = \frac{\sin \psi}{v} - \frac{\cos \psi}{v^2 \frac{d\psi}{dv}}. \quad (5)$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ соотношеніемъ (1) опредѣляетъ углы  $\varphi$  и  $\psi$ ; оно доступно замѣчательному геометрическому истолкованію. Величина, обратная первой части, есть

$$u \frac{-u \frac{d\varphi}{du}}{-u \frac{d\varphi}{du} \sin \varphi + \cos \varphi}; \quad (6)$$

принимая  $u$  и  $\varphi$  за полярныя координаты точки при полюсѣ въ точкѣ  $M$  и полярной оси, перпендикулярной къ  $OX$ , видимъ, что геометрическимъ мѣстомъ точекъ, соответствующихъ различнымъ значеніямъ  $\varphi$ , служитъ кривая, которую можно разсматривать, какъ данную, и касательная къ которой составляетъ съ радіусомъ-векторомъ уголъ  $V$ , опредѣляемый уравненіемъ

$$\text{tang } V = u \frac{d\varphi}{du};$$

выраженіе (6) принимаетъ тогда видъ:

$$\frac{-u \text{tang } V}{-\text{tang } V \sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{-u \sin V}{\cos(V + \varphi)}.$$

Количество  $\frac{u \sin V}{\cos(V + \varphi)}$  есть отрѣзокъ перпендикуляра къ полярной оси, заключающійся между полюсомъ и касательной къ кривой, т.-е. разстояніе отъ точки  $M$  до точки, гдѣ прямая  $XX'$  пересѣкается касательною, проведенною къ кривой въ точкѣ встрѣчи ея съ радіусомъ  $MA$ .

Если точно такъ же и съ той же стороны разграничительной линіи построить кривую, радіусы-векторы которой пропорціональны скоростямъ распространенія во второй срединѣ, то вторая часть уравненія (6) представитъ разстояніе отъ точки  $M$  до точки встрѣчи касательной къ этой второй кривой съ линіею  $XX'$ ; отсюда вытекаетъ, что обѣ касательныя должны встрѣчаться на линіи  $XX'$ , а это приводитъ къ слѣдующей теоремѣ:

Допуская, что свѣтъ распространяется по такому закону, что время его прохожденія есть minimum, продолжаютъ, чтобы узнать преломленный лучъ, соответствующій падаю-

щему  $AM$ , этотъ послѣдній до встрѣчи съ кривою, радіусы-векторы которой представляютъ скорости въ первой срединѣ, затѣмъ въ точкѣ пересѣченія проводятъ касательную къ этой кривой, наконецъ, изъ точки пересѣченія этой касательной съ разграничительною линіей ведутъ касательную ко второй кривой, радіусы-векторы которой представляютъ скорости распространенія во второй срединѣ. Точка касанія этой касательной лежитъ на преломленномъ лучѣ.

**§ 478. Задача III.** — *Найти ось сѣченія эллипсоида данною плоскостію, проходящею черезъ его центръ, принимая ихъ за наибольшій и наименьшій радіусы-векторы этого сѣченія.*

Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

будетъ уравненіе эллипсоида. Радіусъ-векторъ  $r$ , составляющій съ осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , опредѣляется по формулѣ

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2}. \quad (2)$$

Онъ зависитъ только отъ одной переменнѣй, потому что, называя черезъ  $l$ ,  $m$ ,  $n$  углы, составляемые съ осями нормалью къ плоскости разсматриваемаго сѣченія, очевидно, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1, \\ \cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos m + \cos \gamma \cos n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Такъ какъ maximum для  $\frac{1}{r^2}$  наступаетъ при minimum'ѣ для  $r$  и обратно, то мы рѣшимъ нашу задачу, приравнивая нулю дифференціалъ отъ  $\frac{1}{r^2}$  и разсматривая  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ , какъ функціи отъ  $\cos \alpha$ , опредѣляемыя уравненіями (3); будемъ имѣть:

$$\frac{\cos \alpha d \cos \alpha}{a^2} + \frac{\cos \beta d \cos \beta}{b^2} + \frac{\cos \gamma d \cos \gamma}{c^2} = 0. \quad (4)$$

Кромѣ того, дифференцированіе уравненій (3) даетъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma &= 0, \\ \cos l d \cos \alpha + \cos m d \cos \beta + \cos n d \cos \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Изъ этихъ двухъ уравненій нужно вывести  $d \cos \beta$  и  $d \cos \gamma$  и полученные значенія подставить въ (4); послѣднее приведется тогда къ произведенію  $d \cos \alpha$  на коэффициентъ, который мы должны приравнять нулю; но такое вычисленіе приводитъ, очевидно, къ исключенію  $d \cos \alpha$ ,  $d \cos \beta$ ,  $d \cos \gamma$  между уравненіями (4) и (5). Для послѣдней цѣли простѣйшій приѣмъ заключается въ сложеніи этихъ уравненій, изъ которыхъ два предварительно должны быть умножены на неопредѣленныхъ множителей  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , и затѣмъ въ приравненіи нулю коэффициентовъ при всѣхъ трехъ дифференціалахъ; изъ полученныхъ такимъ образомъ

уравнений два служат для опредѣленія множителей  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , такихъ, чтобы при сложении исчезли два изъ дифференціаловъ, третье же уравненіе является тогда какъ разъ результатомъ исключенія. Такимъ образомъ выводимъ соотношенія

$$\left. \begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{a^2} + \lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \cos l &= 0, \\ \frac{\cos \beta}{b^2} + \lambda_1 \cos \beta + \lambda_2 \cos m &= 0, \\ \frac{\cos \gamma}{c^2} + \lambda_1 \cos \gamma + \lambda_2 \cos n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Исключая между ними  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , находимъ соотношеніе, соотвѣтствующее maximum'у и minimum'у радіусовъ-векторовъ.

Умножаемъ уравненія (6) соотвѣтственно на  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  и складываемъ ихъ, принявъ при этомъ во вниманіе равенства (1) и (3); получаемъ:

$$\frac{1}{r^2} + \lambda_1 = 0. \quad (7)$$

Замѣняя теперь  $\lambda_1$  въ уравненіяхъ (6) его значеніемъ  $-\frac{1}{r^2}$ , переписываемъ ихъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_2 \cos l &= 0, \\ \cos \beta \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_2 \cos m &= 0, \\ \cos \gamma \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \lambda_2 \cos n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

откуда, на основаніи второго изъ уравненій (3), выводимъ:

$$\frac{\cos^2 l}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2 m}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}} + \frac{\cos^2 n}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}} = 0.$$

Это уравненіе, будучи второй степени относительно  $\frac{1}{r^2}$ , даетъ длины обѣихъ осей; рассматривая  $r$ , какъ извѣстное, изъ уравненій (8) опредѣляемъ  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ; въ самомъ дѣлѣ, непосредственно изъ нихъ пишемъ:

$$\frac{\frac{\cos l}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\cos m}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}}}{\cos \beta} = \frac{\frac{\cos n}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}}}{\cos \gamma},$$

и такъ какъ сумма квадратовъ трехъ косинусовъ равна единицѣ, то всѣ эти косинусы можно считать извѣстными.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РѢШЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ ЗАДАЧЪ

§ 479. Когда для функціи наступаетъ maximum или minimum, ея дифференціалъ обращается въ нуль, и соотвѣтственное измѣненіе для бесконечно-малаго приращенія перемѣнной, отъ которой она зависитъ, приводится къ нулю, если отбросить бесконечно-малыя второго порядка. Это разсужденіе можно примѣнять непосредственно въ большинствѣ случаевъ и часто получать весьма простой отвѣтъ на вопросы о maxima и minima.

Вернемся, напр., къ разобранной уже задачѣ (§ 474): *Найти кратчайшее разстояніе точки до кривой.*

Пусть  $O$  будетъ данная точка и  $OM$  — наименьшее разстояніе. Назовемъ черезъ  $M'$  точку, бесконечно-близкую къ  $M$  и находящуюся также на кривой; необходимо, чтобы разность  $OM' - OM$  обращалась въ нуль, когда отбрасываются бесконечно-малыя второго порядка. Замѣчая же, что эта разность равна (§ 21) произведенію  $MM'$  на косинусъ угла, составляемаго  $OM$  съ  $MM'$ , выводимъ, что этотъ косинусъ долженъ быть нулемъ, и, слѣдовательно, наименьшее или наибольшее разстояніе есть нормаль.

Какъ второй примѣръ, отыщемъ на данной кривой такую точку, чтобы сумма ея разстояній до двухъ данныхъ точекъ была minimum или maximum.

Пусть  $M$  есть искомая, а  $A$  и  $B$  — данныя точки; нужно, чтобы сумма  $AM + BM$  равнялась, когда отбрасываются бесконечно-малыя второго порядка, суммѣ  $AM' + BM'$ , составленной для бесконечно-близкой точки. Замѣчая, что приращенія для  $AM$  и  $BM$  равны (§ 21) произведеніямъ отрезка  $MM'$  на косинусы угловъ, составляемыхъ его направленіемъ съ линіями  $AM$  и  $BM$ , выводимъ, что эти косинусы должны быть равны между собою, но противоположны по знаку, и, слѣдовательно, сумма  $AM + BM$  представляетъ minimum, когда обѣ линіи  $AM$  и  $BM$  образуютъ равные углы съ данною кривою, на которой находится точка  $M$ .

## МАХІМА И МІНІМА ФУНКЦІЙ ОТЪ ДВУХЪ ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 480. Пусть  $\varphi(x, y)$  будетъ функція отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ  $x$  и  $y$ ; maxima и minima ея значеній таковы, что разность

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y)$$

сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были весьма малыя значенія, положительныя или отрицательныя, приписываемыя  $h$  и  $k$ . Теорема Тэйлора даетъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = h \frac{d\varphi}{dx} + k \frac{d\varphi}{dy} + R; \quad (1)$$

для бесконечно-малыхъ значеній  $h$  и  $k$  количество  $R$  ничтожно по отношенію къ двумъ первымъ членамъ и имъ можно пренебречь, всякій разъ какъ эти послѣдніе отличны



отъ нуля. Первые же два члена, опредѣляющіе знаки второй части, измѣняются по знаку безъ измѣненія величины, когда  $h$  мѣняется на  $-h$  и  $k$  на  $-k$ ; поэтому, приращеніе функціи можетъ сохранять знакъ только въ томъ случаѣ, если заразъ

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0; \quad (2)$$

это—общія условія для maximum'a и minimum'a.

Можно замѣтить, что функція  $\varphi(x, y)$ , будучи maximum или minimum, когда  $x$  и  $y$  оба — переменныя, должна и *подавно* быть такою, если одно изъ этихъ количествъ допустить постояннымъ. Тогда правило, относящееся къ функціямъ только съ одною переменною, примѣнимо и даетъ возможность написать непосредственно уравненія (2). Но этихъ двухъ уравненій недостаточно; когда они удовлетворены, теорема Тэйлора даетъ:

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = \frac{h^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + hk \frac{d^2\varphi}{dxdy} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + R, \quad (3)$$

при чемъ  $R$ , при малыхъ значеніяхъ  $h$  и  $k$ , ничтожно по отношенію къ тремъ первымъ членамъ второй части и имъ можно пренебречь. Если, поэтому, три производныхъ  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dxdy}$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$  не обращаются въ нуль, то знакъ второй части, при бесконечно-малыхъ значеніяхъ  $h$  и  $k$ , одинаковъ со знакомъ трехчлена

$$\frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + hk \frac{d^2\varphi}{dxdy} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2}; \quad (4)$$

мы будемъ имѣть maximum или minimum, если эта сумма остается постоянно отрицательною или постоянно положительною для всѣхъ весьма малыхъ значеній, придаваемыхъ  $h$  и  $k$ ; представляя выраженіе (4) въ видѣ

$$\frac{h^2}{2} \left[ \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2 \frac{k}{h} \frac{d^2\varphi}{dxdy} + \left( \frac{k}{h} \right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right],$$

замѣчаемъ, что его знакъ зависитъ только отъ второго множителя, являющагося функціею отъ отношенія  $\frac{k}{h}$ , которое можетъ измѣняться отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , и чтобы трехчленъ постоянно сохранялъ одинъ и тотъ же знакъ, должно имѣть:

$$\left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)^2 - \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right) < 0. \quad (5)$$

Это условіе требуетъ, очевидно, чтобы  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  и  $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$  имѣли бы одинъ и тотъ же знакъ; если они отрицательны, трехчленъ (4) отрицателенъ, и у насъ будетъ maximum; наоборотъ, мы получимъ minimum, когда, при существованіи неравенства (5),  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$  и  $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$  положительны.

Когда значенія  $x$  и  $y$ , обращающія въ нуль  $\frac{d\varphi}{dx}$  и  $\frac{d\varphi}{dy}$ , даютъ:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = 0,$$

трехчленъ (4) не можетъ мѣнять знака, но онъ можетъ обратиться въ нуль, и когда, при надлежащемъ значеніи отношенія  $\frac{k}{h}$ , члены второго порядка во второй части уравненія (3) исчезаютъ, разложенію придаетъ свой знакъ сумма членовъ третьяго порядка; но эти члены мѣняютъ знакъ, не измѣняя значенія, когда, оставляя  $\frac{k}{h}$  безъ перемѣны, измѣняютъ  $h$  на  $-h$  и  $k$  на  $-k$ ; значитъ, нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a, если при разсматриваемомъ значеніи отношенія  $\frac{k}{h}$  ихъ сумма отлична отъ нуля; если сумма членовъ третьяго порядка обращается въ нуль одновременно съ суммою членовъ второго, то разложенію, при этомъ значеніи отношенія  $\frac{k}{h}$ , придаютъ свой знакъ члены четвертаго порядка, и такъ какъ они, при измѣненіи  $h$  на  $-h$  и  $k$  на  $-k$ , не измѣняются по знаку, то для существованія maximum'a или minimum'a достаточно будетъ, чтобы этотъ знакъ былъ одинаковъ со знакомъ, какой сохраняетъ сумма членовъ второго порядка для значеній  $\frac{k}{h}$ , не обращающихъ ея въ нуль.

§ 481. Если три производныхъ второго порядка  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ ,  $\frac{d^2\varphi}{dxdy}$  обращаются въ нуль одновременно съ производными перваго порядка, то для существованія maximum'a или minimum'a нужно, чтобы четыре производныхъ третьяго порядка также обращались въ нуль для тѣхъ же значеній перемѣнныхъ и чтобы, кромѣ того, совокупность членовъ четвертаго порядка относительно  $h$  и  $k$  въ разложеніи Тэйлора не мѣняла знака: это послѣднее условіе будетъ выполнено, если, приравнявъ нулю сумму этихъ членовъ, мы получимъ такое уравненіе четвертой степени относительно  $\frac{k}{h}$ , всѣ корни котораго — мнимые.

#### ФУНКЦІИ ОТЪ БОЛЬШАГО ЧИСЛА ПЕРЕМѢННЫХЪ

§ 482. Изученіе значеній maxima и minima функціи отъ большаго числа перемѣнныхъ покоится на разсужденіяхъ, всецѣло подобныхъ предыдущимъ. Пусть  $\varphi(x, y, z)$  будетъ функція отъ трехъ независимыхъ перемѣнныхъ; чтобы для нея наступилъ maximum или minimum, нужно, чтобы разность

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) - \varphi(x, y, z)$$

сохраняла одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были весьма малыя значенія, приписываемыя приращеніямъ  $h$ ,  $k$ ,  $l$ . Но мы имѣемъ (§ 395):

$$\varphi(x + h, y + k, z + l) - \varphi(x, y, z) = h \frac{d\varphi}{dx} + k \frac{d\varphi}{dy} + l \frac{d\varphi}{dz} + R,$$

гдѣ  $R$  для весьма малыхъ значений  $h, k, l$  сколь-угодно мало по отношенію къ суммѣ трехъ первыхъ членовъ, которые, слѣдовательно, только одни вліяютъ на знакъ второй части. Этотъ знакъ остается безъ измѣненія лишь при существованіи равенствъ

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Когда эти условія выполнены, теорема Тэйлора даетъ:

$$\begin{aligned} & \varphi(x+h, y+k, z+l) - \varphi(x, y, z) = \\ & = \frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{l^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dz^2} + hk \frac{d^2\varphi}{dxdy} + hl \frac{d^2\varphi}{dxdz} + kl \frac{d^2\varphi}{dydz} + R, \end{aligned}$$

гдѣ  $R$  для весьма малыхъ значений  $h, k, l$  сколь-угодно мало по отношенію къ предшествующимъ членамъ; поэтому, для существованія maximum'a или minimum'a нужно, чтобы многочленъ

$$\frac{h^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{k^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{l^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dz^2} + hk \frac{d^2\varphi}{dxdy} + hl \frac{d^2\varphi}{dxdz} + kl \frac{d^2\varphi}{dydz}$$

сохранялъ одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были весьма малыя значенія, приписываемыя  $h, k$  и  $l$ .

Но это условіе относительно малости приращеній можно опустить. Въ самомъ дѣлѣ, вынося за скобки положительное количество  $h^2$ , видимъ, что знакъ многочлена зависитъ только отъ отношеній  $\frac{k}{h}$  и  $\frac{l}{h}$ , которыя вполнѣ произвольны и могутъ измѣняться отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Замѣтивъ это, находимъ искомое условіе слѣдующимъ образомъ. Пусть будетъ данъ многочленъ

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dkl + 2Ehk + 2Fhl. \quad (1)$$

Чтобы выразить, что знакъ его остается безъ измѣненія, каковы бы ни были значенія, приписываемыя  $h, k, l$ , соберемъ сначала всѣ члены, содержащіе  $h$ , и дополнимъ ихъ до квадрата недостающими членами, которые затѣмъ, понятно, и вычтемъ; такимъ образомъ, выраженіе (1) преобразуется въ

$$A\left(h + \frac{Ek}{A} + \frac{Fl}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{E^2}{A}\right)k^2 + \left(C - \frac{F^2}{A}\right)l^2 + 2\left(D - \frac{EF}{A}\right)kl. \quad (2)$$

Далѣе, въ членахъ, слѣдующихъ за первымъ, собираемъ вмѣстѣ всѣ, содержащіе  $l$ , и дополняемъ ихъ до квадрата недостающимъ членомъ, послѣ чего выраженіе (2) перейдетъ въ

$$A\left(h + \frac{Ek}{A} + \frac{Fl}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{F^2}{A}\right)\left(l + \frac{D - \frac{EF}{A}}{C - \frac{F^2}{A}}k\right)^2 + k^2\left[B - \frac{E^2}{A} - \frac{\left(D - \frac{EF}{A}\right)^2}{C - \frac{F^2}{A}}\right]; \quad (3)$$

слѣдовательно, оно приметъ видъ

$$A(h + mk + nl)^2 + A'(l + pk)^2 + A''k^2, \quad (4)$$

гдѣ  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  — извѣстныя постоянныя. Для того, чтобы выраженіе (4) не измѣнялось по знаку, очевидно, достаточнымъ условіемъ будетъ, если  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  — однихъ и тѣхъ же знаковъ; въ то же время это условіе является и необходимымъ, такъ какъ при произвольныхъ  $h$ ,  $k$ ,  $l$  можно привести къ нулю два какихъ-угодно изъ трехъ квадратовъ, на которые умножены  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$ , не трогая третьяго, коэффициентъ котораго придастъ, слѣдовательно, свой знакъ всей суммѣ, и если эти три коэффициента не одинаковы по знаку, то сумма можетъ, смотря по значеніямъ  $h$ ,  $k$ ,  $l$ , принимать различные знаки.

**§ 483.** Предыдущая теорія безъ труда распространяется на функціи отъ какого-угодно числа переменныхъ. Общее условіе для maximum'a и minimum'a заключается въ томъ, что всѣ производныя отъ функціи, взятая по каждой изъ переменныхъ, отъ которыхъ она зависитъ, должны равняться нулю; кромѣ того, нужно, чтобы однородный многочленъ, состоящій изъ членовъ второго порядка въ разложеніи приращенія функціи, сохранялъ бы свой знакъ, каковы бы ни были приращенія переменныхъ; это условіе выразится, какъ и въ случаѣ трехъ переменныхъ, въ томъ, что если представить вышеназванный многочленъ подъ видомъ суммы квадратовъ, умноженныхъ на постоянные коэффициенты, то эти послѣдніе всѣ должны имѣть одинъ и тотъ же знакъ. Будетъ maximum, когда всѣ они отрицательны, и minimum, когда всѣ они положительны. Если они — различныхъ знаковъ, то нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a.

Выраженіе, что всѣ производныя отъ функціи обращаются въ нуль для значеній переменныхъ, соответствующихъ maximum'у или minimum'у, равносильно выраженію, что полный дифференціалъ отъ функціи равенъ нулю. Это, очевидно, вытекаетъ изъ опредѣленія полного дифференціала, какъ суммы произведеній производныхъ на произвольныя приращенія, приписываемыя переменнымъ. Однако, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, вторая формулировка прилагается легче.

#### МАХІМА И МІНІМА НЕЯВНЫХЪ ФУНКЦІЙ

**§ 484.** Предыдущая теорія прилагается безъ измѣненія къ неявнымъ функціямъ; въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что алгебраическія дѣйствія преобразовываютъ ихъ въ явныя функціи, заключаемъ, что условія для maximum'a и minimum'a выразятся въ такомъ случаѣ посредствомъ производныхъ, которыя всегда можно вычислить съ самаго начала по извѣстному методу дифференцированія неявныхъ функцій. Наиболѣе выгодный при этомъ способъ составленія общихъ условій для maximum'a и minimum'a состоитъ въ приравниваніи нулю полного дифференціала разсматриваемой функціи.

Пусть дана функція  $\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m+n})$  отъ  $m + n$  переменныхъ, между которыми существуетъ  $n$  соотношеній:  $L_1 = 0$ ,  $L_2 = 0$ , ...,  $L_n = 0$ . Общее условіе для maximum'a и minimum'a есть

$$\frac{d\varphi}{dx_1} dx_1 + \frac{d\varphi}{dx_2} dx_2 + \frac{d\varphi}{dx_3} dx_3 + \dots + \frac{d\varphi}{dx_{m+n}} dx_{m+n} = 0. \quad (1)$$







Далѣ, по общему правилу пришлось бы приравнять нулю каждый изъ коэффициентовъ  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , но это было бы большою ошибкою. Дѣйствительно, и данныхъ уравненій между  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  не допускаютъ вполнѣ произвольныхъ  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , и дифференціалы  $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$  связаны между собою нѣкоторымъ необходимымъ соотношеніемъ, такъ что уравненіе (6), чтобы быть удовлетвореннымъ, не требуетъ обращенія въ нуль каждого изъ своихъ коэффициентовъ. Въ самомъ дѣлѣ, если вывести изъ уравненій (3) значенія  $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1$ , то ихъ сумма должна быть нулемъ, и это условіе даетъ соотношеніе между  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Соотвѣтственное соотношеніе между  $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$  получится, если сложить разности  $dx_1 - dx_2, dx_2 - dx_3, \dots, dx_n - dx_1$ , выведенныя изъ уравненій (5). Полученное такимъ образомъ уравненіе будетъ

$$H_1 dy_1 + H_2 dy_2 + \dots + H_n dy_n = 0, \quad (7)$$

гдѣ

$$H_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1},$$

$$H_2 = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$H_n = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} - \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}.$$

Такъ какъ уравненіе (6) должно имѣть мѣсто для всѣхъ значеній  $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$ , удовлетворяющихъ уравненію (7), то необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{K_1}{H_1} = \frac{K_2}{H_2} = \frac{K_3}{H_3} = \dots = \frac{K_n}{H_n}. \quad (8)$$

Таковы необходимыя условія, чтобы площадь многоугольника была наибольшею. Не трудно истолковать ихъ геометрически. Дѣйствительно, если мы скажемъ, что перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ  $(x_n, y_n)(x_1, y_1), (x_1, y_1)(x_2, y_2), (x_2, y_2)(x_3, y_3)$  сходятся въ одной точкѣ, то получимъ отношеніе

$$\frac{K_1}{H_1} = \frac{K_2}{H_2},$$

и легко видѣть, что непрерывный рядъ отношеній (8) выражаетъ, что всѣ перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ, сходятся въ одной точкѣ и что, слѣдовательно, многоугольникъ—вписанный въ кругъ.

**§ 487.** Какъ второе приложеніе, отыщемъ многоугольникъ съ наибольшею площадью среди всѣхъ многоугольниковъ одинаковаго периметра и съ даннымъ числомъ сторонъ.



Если  $\alpha_p$  есть уголъ, составляемый съ осью  $X$  стороною  $\alpha_p$ , и  $\beta_p$  — уголъ между тою же осью и діагоналлю, соединяющею точки  $(x_{p-1}, y_{p-1})$ ,  $(x_{p+1}, y_{p+1})$ , то уравненіе

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{x_n - x_2}{y_n - y_2} \quad (9)$$

по замѣнѣ въ немъ  $A_1$  и  $B_1$  ихъ значеніями приметь видъ

$$\frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_n} = -\frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (10)$$

т.-е.

$$\frac{\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}} = \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1},$$

или, наконецъ,

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} = \beta_1 + n\pi. \quad (11)$$

Слѣдовательно, направленіе, опредѣляемое угломъ  $\beta_1$ , образуетъ равные углы со сторонами  $\alpha_n$  и  $\alpha_1$ ; такъ какъ оно же представляетъ направленіе основанія треугольника, стороны котораго  $\alpha_n$  и  $\alpha_1$ , то, значить, этотъ послѣдній—равнобедренный, и мы имѣемъ:

$$\alpha_n = \alpha_1;$$

точно также выводимъ, что всѣ стороны равны. Разсматривая ихъ, какъ данныя, видимъ, что наша задача входитъ въ предыдущую; отсюда заключаемъ, что многоугольникъ долженъ быть вписаннымъ въ кругъ и, слѣдовательно, правильнымъ. Оставленные нами въ сторонѣ уравненія, какъ легко показать, выражаютъ, что при равенствѣ сторонъ углы также должны быть равны; но бесполезно останавливаться на этихъ элементарныхъ выводахъ, не представляющихъ никакой трудности.

РАЗЫСКАНІЕ ВЫРАЖЕНІЯ, ДАННАГО ВИДА, КОТОРОЕ, ВЪ ИЗВѢСТНЫХЪ ПРЕДѢЛАХЪ, НАИМЕНѢЕ УКЛОНЯЕТСЯ ОТЪ ДАННОЙ ФУНКЦІИ

**§ 488.** Чебышевъ приложилъ теорію значеній maxima и minima къ рѣшенію задачи, которая и сама по себѣ весьма интересна, и служить для замѣчательныхъ аналитическихъ преобразованій.

Дана функція  $\varphi(x)$ ; требуется представить ее приближенно посредствомъ выраженія  $P$  даннаго вида съ нѣкоторымъ числомъ параметровъ, которые нужно опредѣлить изъ условія, что наибольшее значеніе разности  $\varphi(x) - P$  въ данныхъ предѣлахъ наименѣе уклоняется отъ нуля.

Пусть  $-h$  и  $+h$  будутъ данныя предѣлы, въ которыхъ берется переменная  $x$ . Называемъ черезъ  $L$  наибольшее значеніе, принимаемое, въ этихъ предѣлахъ, разностью







Но многочлен  $(n - 1)$ -ой степени можетъ, при надлежащемъ выборѣ коэффициентовъ, принять данныхъ значеній, для данныхъ значеній переменнѣй, въ количествѣ, равномъ или меньшемъ  $n$ ; поэтому уравненія (4) совмѣстны, всякій разъ какъ  $\mu$  меньше  $n + 1$ , и, слѣдовательно, для рѣшенія задачи нужно, чтобы  $\mu$  равнялось или превышало  $n + 1$ . Общія рѣшенія для уравненій

$$F(x)^2 - L^2 = 0, \quad (x^2 - h^2)F'(x) = 0 \quad (5)$$

необходимо являются двойными корнями уравненія

$$(x^2 - h^2)[F(x)^2 - L^2] = 0; \quad (6)$$

дѣйствительно, обозначая черезъ  $x_1$  одно изъ нихъ, видимъ, что  $x = x_1$  обращаетъ въ нуль какъ первую часть уравненія (6), такъ и производную отъ нея

$$2(x^2 - h^2)F(x)F'(x) + 2x[F(x)^2 - L^2],$$

потому что въ силу уравненій (5)

$$(x_1^2 - h^2)F'(x_1) = 0,$$

$$F(x_1)^2 - L^2 = 0.$$

Такъ какъ число корней, къ которымъ прилагается предыдущее замѣчаніе, равно, по крайней мѣрѣ,  $n + 1$ , то произведеніе

$$(x^2 - h^2)[F(x)^2 - L^2]$$

дѣлится на  $n + 1$  множителей вида

$$(x - x_1)^2, (x - x_2)^2, \dots, (x - x_n)^2, (x - x_{n+1})^2;$$

имѣя же въ виду, что это произведеніе равно  $(2n + 2)$ -ой степени, заключаемъ, что оно равно нѣкоторой постоянной, умноженной на произведеніе этихъ множителей, и мы имѣемъ:

$$(x^2 - h^2)[F(x)^2 - L^2] = C(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_{n+1})^2. \quad (7)$$

Это уравненіе, очевидно, требуетъ, чтобы  $x = -h$  и  $x = +h$  были оба въ числѣ корней  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . По сокращеніи на соотвѣтственныхъ множителей уравненіе (7) приметъ видъ

$$F(x)^2 - L^2 = (x^2 - h^2)\varphi(x)^2, \quad (8)$$

гдѣ

$$\varphi(x) = \sqrt{C} (x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_{n+1}).$$

Уравненіе (8) даетъ:

$$[F(x) - \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}][F(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}] = L^2, \quad (9)$$

откуда

$$F(x) - \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{F(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}},$$

или

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{\varphi(x)[F(x) + \varphi(x)\sqrt{x^2 - h^2}]}.$$

Такимъ образомъ, разность  $\frac{F(x)}{\varphi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2}$  при возрастаніи  $x$  стремится къ нулю и для весьма большихъ значеній  $x$  она будетъ порядка  $\frac{1}{x^{2n-1}}$ : кромѣ того, зная, что оба члена дроби  $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$  — цѣлые многочлены, одинъ  $n$ -ой и другой  $(n-1)$ -ой степени, заключаемъ, что этого условія достаточно для опредѣленія ихъ обоихъ; въ самомъ дѣлѣ, невозможно, чтобы двѣ различныя дроби

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}, \quad \frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)},$$

знаменатели которыхъ — многочлены степеней  $k$  и  $k'$ , имѣли бы, при бесконечно-большомъ  $x$ , бесконечно-малую разность порядка выше порядка  $\frac{1}{x^{k+k'}}$ . Если бы, поэтому,  $\varphi(x)$  и  $\varphi_1(x)$  были оба степени  $n-1$ , то разность двухъ дробей была бы, самое большее, порядка  $\frac{1}{x^{2n-2}}$ , и, слѣдовательно, являлось бы невозможнымъ, чтобы обѣ онѣ имѣли съ  $\sqrt{x^2 - h^2}$  разность того же порядка, какъ  $\frac{1}{x^{2n-1}}$ .

Итакъ, задача сведена на нахожденіе дроби  $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ , числитель которой былъ бы степени  $n$ , а знаменатель — степени  $n-1$ , и разность которой съ  $\sqrt{x^2 - h^2}$  была бы, при бесконечно-большомъ значеніи  $x$ , бесконечно-малою того же порядка, какъ  $\frac{1}{x^{2n-1}}$ .

Для рѣшенія этой задачи нужно  $\sqrt{x^2 - h^2}$  развернуть въ непрерывную дробь, и тогда та изъ подходящихъ, числитель которой — степени  $n$ , есть искомая дробь, единственная по только-что доказанному.

Имѣемъ:

$$\sqrt{x^2 - h^2} = x - \frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}};$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = -\frac{h^2}{x + \sqrt{x^2 - h^2}} = -\frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)},$$

откуда

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = -\frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)}} = -\frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)}}},$$

и, очевидно, повторяя то же самое преобразование сколько угодно большое число разъ, имѣемъ:

$$\sqrt{x^2 - h^2} - x = - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \dots - \frac{h^2}{2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)}}}}}$$

Называемъ подходящія непрерывной дробі

$$x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \frac{h^2}{2x - \dots}}}}$$

черезъ  $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}$ ; такъ какъ каждая подходящая выводится, какъ извѣстно, изъ двухъ предыдущихъ, то, вообще, имѣемъ:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{2xP_n - h^2P_{n-1}}{2xQ_n - h^2Q_{n-1}},$$

и если, при вычисленіи  $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ , замѣнимъ  $2x$  черезъ  $2x + (\sqrt{x^2 - h^2} - x)$ , т.-е. черезъ  $x + \sqrt{x^2 - h^2}$ , то подходящая обратится въ оконченную дробь, представляющую  $\sqrt{x^2 - h^2}$ , и мы будемъ имѣть:

$$\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{P_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2P_{n-1}}{Q_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2Q_{n-1}}.$$

Освобождаясь отъ знаменателей и перенося одни члены въ одну часть, другіе — въ другую, можемъ написать:

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_{n-1} - Q_{n-1} \sqrt{x^2 - h^2});$$

отсюда, замѣняя послѣдовательно  $n$  черезъ 2, 3, 4, ..., выводимъ:

$$P_2 - Q_2 \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_1 - Q_1 \sqrt{x^2 - h^2}),$$

$$P_3 - Q_3 \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_2 - Q_2 \sqrt{x^2 - h^2}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})(P_{n-1} - Q_{n-1} \sqrt{x^2 - h^2}).$$

Перемножая по-членно эти уравненія, получаемъ:

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^{n-1} (P_1 - Q_1 \sqrt{x^2 - h^2}).$$

А такъ какъ первая подходящая  $\frac{P_1}{Q_1}$  равна  $\frac{x}{1}$ , то окончательно имѣемъ:

$$P_n - Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n.$$

Измѣняя знакъ при  $\sqrt{x^2 - h^2}$ , что очевидно возможно, потому что такое уравненіе, какъ предыдущее, требуетъ отдѣльнаго равенства какъ раціональныхъ, такъ и ирраціональныхъ членовъ обѣихъ своихъ частей, будемъ имѣть:

$$P_n + Q_n \sqrt{x^2 - h^2} = (x + \sqrt{x^2 - h^2})^n,$$

и, слѣдовательно,

$$P_n = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2}.$$

Дробь  $\frac{P_n}{Q_n}$  есть искомая дробь  $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ , числитель которой — степени  $n$ , а разность съ  $\sqrt{x^2 - h^2}$  — порядка  $\frac{1}{x^{2n+1}}$  при  $x$  бесконечно-большомъ. Въ самомъ дѣлѣ, мы нашли:

$$\sqrt{x^2 - h^2} = \frac{P_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2 P_{n-1}}{Q_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2 Q_{n-1}};$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{x^2 - h^2} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{h^2(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)}{Q_n[Q_n(x + \sqrt{x^2 - h^2}) - h^2 Q_{n-1}]}.$$

Знаменатель второй части, очевидно, сравнимъ съ  $x^{2n+1}$ , числитель же — постоянный, потому что уравненія

$$P_{n+1} = 2xP_n - h^2 P_{n-1},$$

$$Q_{n+1} = 2xQ_n - h^2 Q_{n-1}$$

даютъ:

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = h^2(Q_{n-1}P_n - P_{n-1}Q_n),$$

и такъ какъ  $P_1Q_2 - P_2Q_1$  не зависитъ отъ  $x$ , то это соотношеніе показываетъ, что аналогичныя разности, относящіяся къ послѣдовательнымъ значеніямъ  $n$ , также не зависятъ отъ  $x$ . Произведеніе  $\frac{P_n}{Q_n}$  на постоянный множитель есть искомая дробь; значитъ, найденное для  $P_n$  значеніе представляетъ числитель  $F(x)$ , т.-е. такой многочленъ, который, въ предѣлахъ  $-h$  и  $+h$ , наименѣе уклоняется отъ нуля, и рѣшеніе предложенной задачи будетъ

$$F(x) = C[(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n].$$



Не трудно видѣть, что члены съ  $\sqrt{x^2 - h^2}$  взаимно уничтожаются въ общей суммѣ двухъ разложеній, и  $F(x)$ , какъ и требуетъ того задача, есть цѣлый и рациональный многочленъ степени  $n$ . Чтобы коэффициентъ члена съ  $x^n$  равнялся единицѣ, нужно придать  $C$  значеніе  $\frac{1}{2^n}$ , послѣ чего окончательно имѣемъ:

$$F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}.$$

Наибольшаго значенія въ предѣлахъ  $-h$  и  $+h$  для перемѣнной функція  $F(x)$  достигаетъ, какъ сказано выше, при  $x = \pm h$ ; отсюда выводимъ, что это значеніе равно  $\frac{h^n}{2^{n-1}}$ , и, слѣдовательно, всякій другой многочленъ степени  $n$ , первый членъ котораго есть  $x^n$ , долженъ выходить изъ предѣловъ  $-\frac{h^n}{2^{n-1}}$  и  $+\frac{h^n}{2^{n-1}}$ , въ которыхъ остается  $F(x)$ .

#### § 490. Функція

$$F(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n}{2^n}$$

можетъ быть выражена весьма просто: полагая

$$x = h \cos \varphi,$$

приводимъ ее къ виду

$$F(x) = \frac{h^n (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n + h^n (\cos \varphi - \sqrt{-1} \sin \varphi)^n}{2^n} = \frac{h^n \cos n\varphi}{2^{n-1}};$$

замѣняя же теперь  $\varphi$  его значеніемъ,  $\arccos \frac{x}{h}$ , имѣемъ:

$$F(x) = \frac{h^n \cos \left( n \arccos \frac{x}{h} \right)}{2^{n-1}}.$$

Такова цѣлая и рациональная функція отъ  $x$ , степени  $n$ , которая при измѣненіи  $x$  отъ  $-h$  до  $+h$  наименѣе уклоняется отъ нуля.

§ 491. Чебышевъ приложилъ предыдущій результатъ къ теоріи интерполированія. Пусть  $F(x)$  есть функція, которую требуется представить, для значеній перемѣнной, содержащихся между  $-h$  и  $+h$ , посредствомъ многочлена вида

$$A + Bx + Cx^2 + \dots + Hx^{n-1}; \quad (1)$$

коэффициенты  $A, B, C, \dots, H$  опредѣляются, какъ извѣстно, изъ условія, что для  $n$  значеній  $x_1, x_2, \dots, x_n$  перемѣнной  $x$ , взятыхъ между  $-h$  и  $+h$ , функція равна многочлену. Выборъ значеній  $x_1, x_2, \dots, x_n$  безразличенъ, и для большей простоты ихъ берутъ

обыкновенно на равномъ разстояніи другъ отъ друга; но слѣдующее разсужденіе показываетъ, что выгоднѣе выбирать ихъ иначе.

Такъ какъ функція  $F(x)$  равна многочлену (1) для значеній  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменной  $x$ , то, если положить

$$F(x) - A - Bx - Cx^2 - \dots - Hx^{n-1} = P \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad (2)$$

множитель  $P$  будетъ, для всякаго значенія  $x$ , равенъ одному изъ значеній, принимаемыхъ  $n$ -ою производною отъ  $F(x)$  при измѣненіи  $x$  отъ  $-h$  до  $+h$ ; въ самомъ дѣлѣ, допускаемъ, приписывая  $P$  такое значеніе, при которомъ уравненіе (2) было бы точно для значенія  $x_{n+1}$  переменной  $x$ , взятаго между  $-h$  и  $+h$ , уравненіе

$$F'(x) - A - Bx - Cx^2 - \dots - Hx^{n-1} - P \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = 0.$$

Такъ какъ въ предѣлахъ отъ  $-h$  до  $+h$  предполагается  $n+1$  корней,  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , то первая производная отъ первой части обращается въ нуль  $n$  разъ въ тѣхъ же предѣлахъ; вторая производная обращается въ нуль  $n-1$  разъ,  $\dots$ , и  $n$ -ая производная, по крайней мѣрѣ, одинъ разъ. Слѣдовательно, для нѣкотораго значенія  $x$ , взятаго между  $-h$  и  $+h$ , имѣемъ:

$$F^n(x) - P = 0.$$

Такимъ образомъ,  $P$ , какъ мы сказали, есть одно изъ значеній, принимаемыхъ  $F^n(x)$  при измѣненіи  $x$  отъ  $-h$  до  $+h$ .

Ошибку, допускаемую при замѣнѣ функціи  $F(x)$  многочленомъ (1), можно, по предыдущему, выразить черезъ

$$\frac{F^n(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

гдѣ  $\alpha$  обозначаетъ нѣкоторую неизвѣстную величину, измѣняющуюся вмѣстѣ съ  $x$ , но всегда содержащуюся между  $-h$  и  $+h$ .

Если, при весьма маломъ  $h$ , производная  $F^{n+1}(x)$  имѣетъ для  $x=0$  конечное и опредѣленное значеніе, то множитель  $\frac{F^n(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$  измѣняется мало, и отношеніе его крайнихъ значеній мало отличается отъ единицы; значитъ, должно, для полученія наилучшаго выраженія, выбирать значенія  $x_1, x_2, \dots, x_n$  такъ, чтобы произведеніе

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

наименѣе уклонялось отъ нуля; поэтому берутъ для  $x_1, x_2, \dots, x_n$  корни уравненія

$$(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n = 0. \quad (3)$$

При томъ эти корни легко получать; если положить  $x = h \cos \varphi$ , то уравненіе (3) приметъ видъ

$$\cos \varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n};$$

слѣдовательно, значенія  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будутъ

$$h \cos \frac{\pi}{2n}, \quad h \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots, h \cos \frac{2n-1}{2n} \pi.$$

Они поддаются весьма изящному геометрическому истолкованію. Дѣйствительно, выдѣлимъ на оси  $x$ -овъ отрѣзокъ, которому отвѣчаютъ разсматриваемыя значенія и концы котораго имѣютъ абсциссами  $-h$  и  $+h$ ; далѣе, опишемъ на этомъ отрѣзкѣ, какъ на діаметрѣ, полуокружность и раздѣлимъ ее на  $2n$  равныхъ частей; тогда проекціи точекъ дѣленія, взятая черезъ одну, будутъ имѣть абсциссами значенія  $x$ , для которыхъ функція равна такому многочлену степени  $n$ , который выражаетъ ее наилучшимъ образомъ.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Изъ всѣхъ многоугольниковъ, описанныхъ около выпуклой кривой, имѣющей наименьшую площадь касается кривой срединами всѣхъ своихъ сторонъ.

2. Определить плоскости, проходящія черезъ центръ эллипсоида и пересѣкающія его поверхность по кругу, подъ условіемъ, чтобы наибольшее разстояніе центра до точки сѣченія было неопредѣленнымъ.

3. Приложить тотъ же методъ къ опредѣленію круговыхъ сѣченій поверхности

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

4. Изъ всѣхъ сферическихъ треугольниковъ съ одинаковою площадью равносторонній имѣетъ наименьшій периметръ.

5. Испытать, будетъ ли, для  $x=0, y=0$ , выраженіе

$$a^2x^2y - 2ax^3y + x^4y - 2ax^2y^2 + 2x^3y^2 + x^2y^3$$

имѣть maximum или minimum.

6. Нормаль въ точкѣ поверхности есть наименьшее или наибольшее разстояніе одной изъ точекъ нормали до поверхности. Показать, что на каждой нормали существуютъ двѣ такихъ точки, что разстояніе промежуточныхъ точекъ не будетъ ни maximum, ни minimum.

7. Чтобы многочленъ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy$$

сохранялъ одинъ и тотъ же знакъ, каковы бы ни были значенія, приписываемыя  $x, y, z$ , нужно, чтобы

$$BC - F^2 < 0, \quad CA - G^2 < 0, \quad AB - H^2 < 0$$

и чтобы, кромѣ того, выраженіе

$$ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH$$

было того же знака, что  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

8. Предыдущія условія выполняются, когда выраженія

$$BC + CA + AB - F^2 - G^2 - H^2,$$

$$(A + B + C)(ABC - AF^2 - BG^2 - CH^2 + 2FGH)$$

оба положительны.

# ТРЕТЬЯ КНИГА

## Геометрическія приложенія

---

### ГЛАВА ПЕРВАЯ

#### Кривизна плоских линій

---

#### Что такое кривизна

§ 492. Слово *кривизна* указываетъ на отклоненіе отъ прямолинейнаго вида. Когда линія не прямая и не составлена изъ прямыхъ, то она—кривая и въ каждой точкѣ имѣетъ кривизну, направленную къ одной изъ двухъ частей плоскости, раздѣленныхъ касательною. Говорятъ, что кривая обращена къ этой части плоскости своею вогнутостью, къ другой же части—выпуклостью: опредѣленіе рода кривизны будетъ первою нашею задачею.

Относя точки плоскости къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, замѣчаемъ, что кривая будетъ обращена своею вогнутостью въ сторону положительныхъ  $Y$ -овъ, если въ смежности съ точкою касанія ея ордината больше ординаты касательной; въ противномъ случаѣ кривая своею вогнутостью обращена въ сторону отрицательныхъ  $Y$ -овъ.

Пусть  $y = \varphi(x)$  есть уравненіе рассматриваемой кривой: такъ какъ  $x$  и  $y$  представляютъ координаты одной изъ ея точекъ, то координаты смежной точки будутъ  $x + h$  и  $\varphi(x + h)$ ; имѣя же

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x + \theta h),$$

гдѣ  $\varphi(x) + h\varphi'(x)$  представляетъ ординату точки на касательной, а  $h^2$  всегда положительно, видимъ, что характеръ кривизны зависитъ отъ знака  $\varphi''(x + \theta h)$  или, проще, отъ знака  $\varphi''(x)$ , такъ какъ  $h$  очень мало. Когда  $\varphi''(x)$  положительно, ордината кривой, въ смежности съ точкою касанія, больше ординаты касательной, и кривая своею вогнутостью обращена въ сторону положительныхъ  $Y$ -овъ. Когда  $\varphi''(x)$  отрицательно, вогнутость обращена въ сторону отрицательныхъ  $Y$ -овъ; въ частномъ случаѣ, когда  $\varphi''(x)$  равно нулю, разность  $\varphi(x + h) - \varphi(x) - h\varphi'(x)$ , между ординатою кривой и орди-



натою касательной, измѣняетъ, вообще говоря, знакъ вмѣстѣ съ  $h$ , касательная пересѣкаетъ кривую, и кривизна мѣняетъ характеръ въ рассматриваемой точкѣ, являющейся точкою перегиба.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ КРИВИЗНЫ И РАДІУСА КРИВИЗНЫ

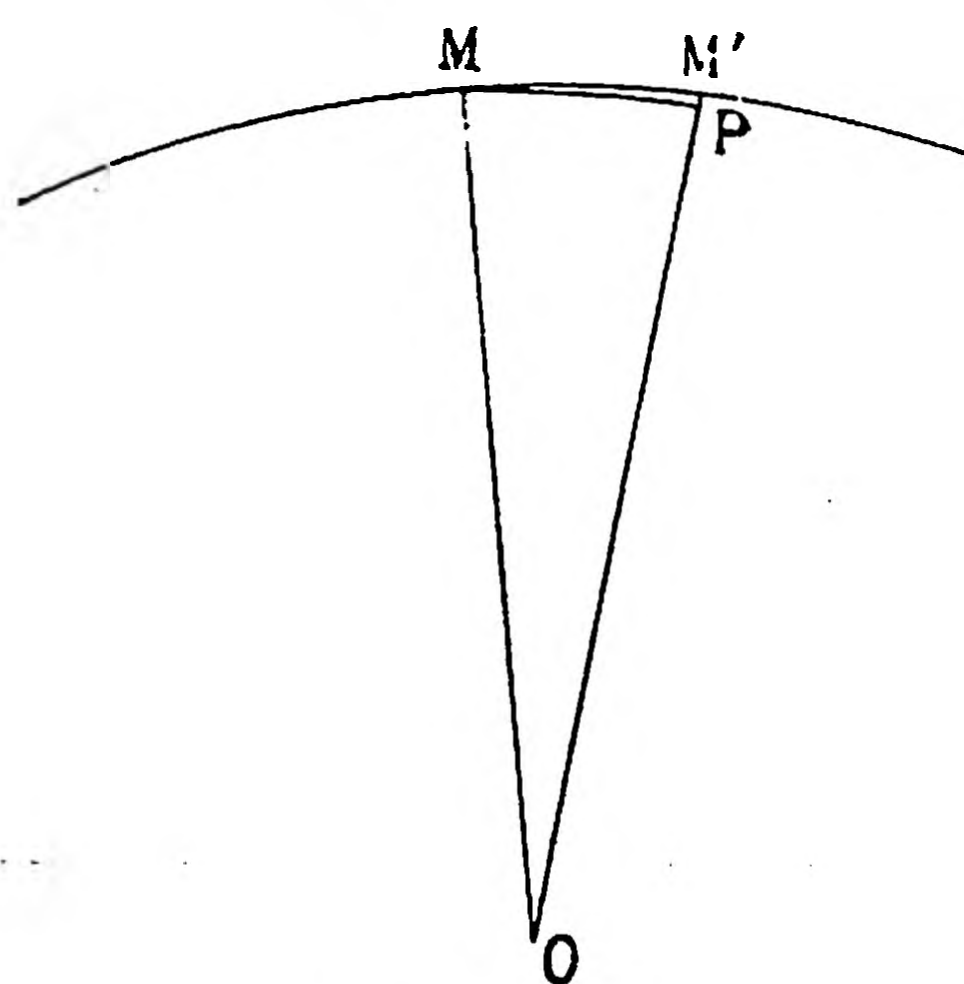
§ 493. Полною кривизною плоской дуги безъ перегиба называется уголъ между ея крайними касательными. Подъ этимъ нужно понимать сумму бесконечно-малыхъ угловъ, на которые вращается послѣдовательно касательная, когда ея точка касанія движется отъ одного конца къ другому, пробѣгая всю дугу сполна. Если, напр., концы совпадаютъ и рассматриваемая дуга образуетъ замкнутую выпуклую кривую, то крайнія касательныя совпадаютъ, но полная кривизна равна четыремъ прямымъ, но не нулю.

Средняя кривизна дуги есть отношеніе полной кривизны къ длинѣ дуги. Кривизною кривой въ данной точкѣ является средняя кривизна бесконечно-малой дуги этой кривой, отсчитанной отъ рассматриваемой точки. Она, слѣдовательно, равна углу между касательными въ концахъ бесконечно-малой дуги, который мы называемъ *угломъ смежности*, раздѣленному на длину дуги.

По этимъ опредѣленіямъ кривизна дуги круга равна отношенію этой дуги къ радіусу, и средняя кривизна, не зависящая отъ длины дуги, равна обратной величинѣ радіуса; слѣдовательно, тому же равна кривизна круга въ любой изъ его точекъ.

Когда радіусъ круга измѣняется отъ нуля до бесконечности, кривизна измѣняется отъ бесконечности до нуля; такимъ образомъ, она можетъ принимать всевозможныя значенія, и всегда существуетъ, для каждой точки кривой, такой кругъ, который имѣетъ одинаковую съ нею кривизну въ рассматриваемой точкѣ. Радіусъ этого круга называется *радіусомъ кривизны*, а самый кругъ, помѣщаемый такъ, чтобы онъ касался кривой въ данной точкѣ и вогнутостью былъ бы обращенъ въ одну съ нею сторону, называется *кругомъ кривизны*.

§ 494. Центръ кривизны есть центръ круга кривизны. Онъ является точкою пересѣченія двухъ бесконечно-близкихъ нормалей. Для доказательства этого разсмо-



Черт. 36

тримъ (черт. 36) бесконечно-малую дугу  $MM'$  и пусть  $MO$ ,  $M'O$  будутъ нормали въ ея концахъ. Уголъ  $O$  равенъ, очевидно, углу смежности дуги  $MM'$ , и, слѣдовательно,

радіусъ ея кривизны есть предѣлъ отношенія  $\frac{MM'}{O}$ . Съ другой стороны, если изъ точки  $O$ , какъ изъ центра, описать радіусомъ  $OM$  дугу круга  $MP$ , то

$$OM = \frac{MP}{O}.$$

$MP$  и  $MM'$ —безконечно-малыя перваго порядка; каждая изъ этихъ дугъ отличается отъ своей хорды на безконечно-малую третьяго порядка, разность же хордъ, меньшая  $M'P$ , будетъ, самое большее, втораго порядка; значить,  $MP$  и  $MM'$  могутъ замѣнять другъ друга и, слѣдовательно, предѣлъ  $OM$  равенъ радіусу кривизны.

#### ВЫРАЖЕНІЕ ДЛЯ РАДІУСА КРИВИЗНЫ

§ 495. Пусть  $y = \varphi(x)$  будетъ уравненіе кривой, отнесенное къ прямоугольнымъ координатамъ. Называя черезъ  $\alpha$  уголъ между касательною и осью  $X$ -овъ, имѣемъ:

$$\text{tang} \alpha = \frac{dy}{dx},$$

и, слѣдовательно,

$$\alpha = \text{arctang} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

Уголъ между двумя безконечно-близкими касательными, называемый угломъ смежности, представляетъ разность угловъ, образуемыхъ ими съ осью  $X$ -овъ; поэтому онъ выразится черезъ

$$d\alpha = d \text{arctang} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d \left( \frac{dy}{dx} \right)}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Кривизна кривой въ разсматриваемой точкѣ есть, по опредѣленію, отношеніе угла  $d\alpha$  къ соотвѣтственной дугѣ  $ds$ , а такъ какъ

$$ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2},$$

то, значить, кривизна равна

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}};$$

радіусъ же кривизны  $\rho$ , какъ величина, обратная кривизнѣ, равенъ

$$\rho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

### Кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую

§ 496. Въ § 474-омъ мы доказали, что наибольшее и наименьшее разстояніе точки до кривой оба нормальны къ кривой и затѣмъ нашли, на данной нормали, точку, разстояніе которой до кривой, отсчитанное по этой нормали, не представляетъ ни maximum'a, ни minimum'a, и, слѣдовательно, такую, что касательный къ кривой кругъ, проведенный изъ нея, какъ изъ центра, съ одной стороны будетъ внѣшнимъ, съ другой внутреннимъ, пересѣкая кривую одновременно съ прикосновеніемъ. Разстояніе такой точки до кривой представляетъ точно (§ 474) радіусъ кривизны, для котораго мы только-что отыскивали выраженіе, и, слѣдовательно, *кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую.*

Не трудно объяснить à priori, почему кривая пересѣкается своимъ кругомъ кривизны. Дѣйствительно, кругъ и кривая имѣютъ одну и ту же кривизну въ ихъ общей точкѣ, но, начиная съ этой точки, кривизна круга постоянна, а для кривой измѣняется. Поэтому отсюда обѣ линіи расходятся, и если кривизна кривой возрастаетъ, то кривая удаляется отъ касательной быстрѣе круга, для котораго, такимъ образомъ, она является внутреннею. Если же, наоборотъ, кривизна убываетъ, то кривая является внѣшнею для круга. Но ясно, что отъ любой точки въ одну сторону кривизна возрастаетъ, а въ противоположную убываетъ. Значитъ, кривая будетъ для своего круга кривизны съ одной стороны внутреннею, а съ другой внѣшнею. Исключеніе представляютъ только тѣ точки, гдѣ для кривизны наступаетъ maximum или minimum; въ самомъ дѣлѣ, въ какую бы сторону въ такихъ случаяхъ ни произошло перемѣщеніе, кривизна измѣнится въ одномъ и томъ же смыслѣ, и, слѣдовательно, кругъ кривизны явится для кривой внутреннимъ или внѣшнимъ. Это, напр., имѣетъ мѣсто въ вершинахъ эллипса: въ концѣ малой оси кривизна — наименьшая и кругъ кривизны — внѣшній къ кривой; въ концѣ большой оси, наоборотъ, кривизна — наибольшая и кругъ кривизны — внутренний. Во всякой другой точкѣ кругъ кривизны пересѣкаетъ кривую.

### Различныя выраженія для радіуса кривизны

§ 497. Въ найденной выше формулѣ для радіуса кривизны абсцисса  $x$  рассматривалась, какъ независимая перемѣнная. Чтобы быть свободнымъ отъ такого предположенія, достаточно (§ 169) замѣнить  $\frac{d^2y}{dx^2}$  выраженіемъ

$$\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3};$$

тогда, какова бы ни была независимая перемѣнная,

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x}.$$

Эта формула удобна въ тѣхъ случаяхъ, когда координаты  $x$  и  $y$  даны въ функціи отъ третьей перемѣнной.

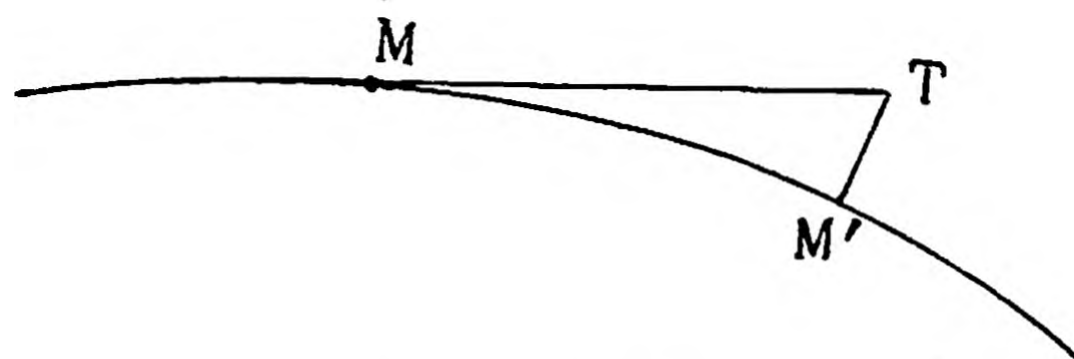
§ 498. Когда независимая переменная есть сама дуга рассматриваемой кривой, то выражение для радиуса кривизны может быть преобразовано при помощи формулъ

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= ds^2, \\ dx d^2x + dy d^2y &= 0, \end{aligned}$$

изъ которыхъ вторая выводится изъ первой посредствомъ дифференцированія; въ § 174-мъ мы подробно рассмотрѣли это преобразование, приводящее къ замѣчательной формулѣ

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2.$$

Эта формула поддается изящному геометрическому истолкованію и часто бываетъ полезна. Отъ данной точки  $M$  (черт. 37) откладываемъ на кривой и на касательной



Черт. 37

двѣ безконечно-малыя длины  $MM'$ ,  $MT$ , и пусть  $\sigma$  обозначаетъ ихъ общую длину. Координаты точки  $M'$ , если пренебречь безконечно-малыми третьяго порядка, будутъ

$$\begin{aligned} x + \frac{dx}{ds} \sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} \sigma^2, \\ y + \frac{dy}{ds} \sigma + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{ds^2} \sigma^2; \end{aligned}$$

координаты же точки  $T$  строго равны

$$\begin{aligned} x + \frac{dx}{ds} \sigma, \\ y + \frac{dy}{ds} \sigma; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\overline{M'T}^2 = \frac{1}{4} \sigma^4 \left[ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 \right],$$

и, значитъ,

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 = \frac{4\overline{M'T}^2}{\sigma^4},$$

откуда

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\overline{M'T}}.$$

§ 499. Первое найденное нами выражение для радиуса кривизны приводит къ теоремѣ, равносильной предыдущей но болѣе удобнаго вида въ нѣкоторыхъ случаяхъ. Если принять за ось  $x$ -овъ касательную въ точкѣ и за ось  $y$ -овъ нормаль, то уравненіе

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

перейдетъ въ

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Такъ какъ  $y$  и  $\frac{dy}{dx}$  при  $x=0$  равны также нулю, то, называя черезъ  $k$  ординату, соответствующую бесконечно-малой абсциссѣ  $h$ , и отбрасывая бесконечно-малыя третьяго порядка, по теоремѣ Маклорена находимъ:

$$k = \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2y}{dx^2};$$

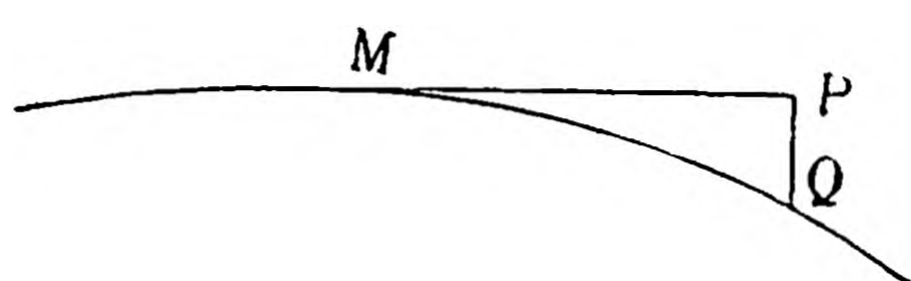
значитъ,

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} = \frac{h^2}{2k}. \quad (1)$$

Эта формула отличается отъ предыдущей тѣмъ, что разстояніе  $M'T$  замѣнено здѣсь ординатою  $k$ . Но эти двѣ линіи, направленія которыхъ образуютъ между собою бесконечно-малый уголъ, имѣютъ въ предѣлѣ отношеніе, равное единицѣ, и замѣна одной изъ нихъ другою не измѣнитъ предѣла отношенія, въ которое онѣ входятъ.

Уравненіе (1) равносильно слѣдующей теоремѣ:

Радиусъ кривизны, въ точкѣ  $M$  кривой (черт. 38), равенъ квадрату бесконечно-малой длины  $MP$ , отсчитанной по касательной отъ этой точки, раздѣленному на



Черт. 38

удвоенную длину  $PQ$ , перпендикулярную къ  $MP$  и заключенную между точкою  $P$  и кривою.

§ 500. Предыдущая теорема приводитъ къ аналитическому выраженію радиуса кривизны, которое равносильно полученному нами раньше, но это новое выраженіе иногда удобнѣе, такъ какъ не предполагаетъ уравненія кривой рѣшеннымъ относительно одной изъ координатъ. Пусть  $\varphi(x, y) = 0$  будетъ уравненіе кривой. Беремъ за оси координатъ касательную и нормаль въ точкѣ  $M$ , заданной координатами



тами  $x$  и  $y$ , и пусть  $u, v$  будутъ безконечно-малыя координаты точки, смежной съ  $M$ ; радиусъ кривизны по предыдущему выразится черезъ  $\frac{u^2}{2v}$ ; для опредѣленія его замѣчаемъ, что если обозначить черезъ  $\theta$  уголъ касательной съ прежнею осью  $x$ -овъ, т.-е. уголъ, составляемый новыми осями съ прежними, то координаты точки, смежной съ  $x, y$ , въ первой системѣ будутъ

$$\begin{aligned} x + u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y + u \sin \theta + v \cos \theta, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi(x + u \cos \theta - v \sin \theta, y + u \sin \theta + v \cos \theta) = 0. \quad (1)$$

Такъ какъ новая ось  $x$ -овъ касательна къ кривой, то если разсматривать  $u$ , какъ безконечно-малую перваго порядка, то  $v$  будетъ безконечно-малая втораго порядка; поэтому мы должны, развертывая первую часть уравненія (1) по теоремѣ Тэйлора, сохранить члены втораго порядка, такъ какъ  $u^2$ , входящее множителемъ въ нѣкоторые изъ нихъ, сравнимо съ множителемъ  $v$ , входящимъ въ члены перваго порядка. Итакъ, уравненіе (1) можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\varphi}{dx} (u \cos \theta - v \sin \theta) + \frac{d\varphi}{dy} (u \sin \theta + v \cos \theta) + \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2\varphi}{dx^2} (u \cos \theta - v \sin \theta)^2 + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} (u \cos \theta - v \sin \theta) (u \sin \theta + v \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{d^2\varphi}{dy^2} (u \sin \theta + v \cos \theta)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициентъ при  $u$  равенъ нулю, потому что

$$\operatorname{tang} \theta = - \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}};$$

кромѣ того, члены съ  $v^2$  и съ  $uv$  могутъ быть отброшены, какъ безконечно-малыя четвертаго и третьяго порядка, послѣ чего остается

$$0 = v \left( \frac{d\varphi}{dy} \cos \theta - \frac{d\varphi}{dx} \sin \theta \right) + \frac{1}{2} u^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \sin \theta \cos \theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \sin^2 \theta \right), \quad (3)$$

и, слѣдовательно,

$$\rho = \frac{u^2}{2v} = - \frac{\frac{d\varphi}{dy} \cos \theta - \frac{d\varphi}{dx} \sin \theta}{\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \sin \theta \cos \theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \sin^2 \theta};$$

принимая же во вниманіе равенства

$$\cos \theta = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}}, \quad \sin \theta = - \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2}},$$

пишемъ окончательно:

$$\rho = \frac{\left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\varphi}{dx^2} \left( \frac{d\varphi}{dy} \right)^2 - 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2}. \quad (4)$$

Эта формула представляет простое преобразование формулы, данной въ § 495-мъ. Мы, однако, предпочли доказать ее непосредственно, чтобы обратить вниманіе на весьма полезную теорему. Помимо того, предыдущій методъ выгоденъ въ случаяхъ особенныхъ точекъ, когда производныя  $\frac{d\varphi}{dx}$ ,  $\frac{d\varphi}{dy}$  обращаются въ нуль (§ 463) и формула (4) теряетъ всякій смыслъ.

Въ такихъ случаяхъ снова обращаемся къ уравненію (1), замѣчая при этомъ, что  $\varphi(x, y) = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ . Въ разложеніи первой части по теоремѣ Тэйлора члены перваго порядка обращаются въ нуль, такъ же какъ и члены съ  $u^2$ , коэффициентъ при которомъ представляетъ точно то выраженіе, которое нужно приравнять нулю, чтобы получить (§ 464) направленіе касательной. Такимъ образомъ, членами наинизшаго порядка, по отношенію къ которымъ остальные могутъ быть отброшены, будутъ здѣсь члены съ множителемъ  $uv$  и съ множителемъ  $u^3$ ; уравненіе (1) можетъ быть тогда приведено къ виду

$$Puv + \frac{Q}{6} u^3 = 0. \quad (5)$$

Значитъ, выводимъ:

$$\rho = \frac{u^2}{2v} = -\frac{3P}{Q}, \quad (6)$$

гдѣ  $P$  и  $Q$  содержатъ извѣстный уголъ  $\theta$  и производныя второго и третьяго порядка первой части уравненія.

§ 501. Разсмотрѣніе явнаго выраженія для  $P$  приводитъ къ замѣчательному слѣдствію. Такъ какъ этотъ коэффициентъ служитъ множителемъ при  $uv$  въ уравненіи (5), то имѣемъ:

$$P = -2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} \sin\theta \cos\theta + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} (\cos^3\theta - \sin^3\theta) + 2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} \sin\theta \cos\theta; \quad (7)$$

отсюда легко заключить, что когда разсматриваемая особенная точка представляетъ точку возврата, то  $P = 0$ , и, слѣдовательно, радіусъ кривизны обращается въ нуль, а самая кривизна въ безконечность. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $\theta$  дается (§ 464) уравненіемъ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \cos^3\theta + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} \sin\theta \cos\theta + \frac{d^2\varphi}{dy^2} \sin^3\theta = 0.$$

Въ интересующемъ насъ случаѣ это уравненіе имѣетъ два равныхъ корня, а это показываетъ, что производная отъ первой его части по  $\theta$  равна нулю:

$$0 = -2 \sin\theta \cos\theta \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2 \frac{d^2\varphi}{dx dy} (\cos^3\theta - \sin^3\theta) + 2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} \sin\theta \cos\theta,$$

т.-е.  $P = 0$ .

Итакъ, кривизна кривой въ точкѣ возврата бесконечно-велика. Исключеніе можетъ представиться тогда, когда одновременно съ  $P = 0$  также и  $Q = 0$ ; это бываетъ въ случаѣ возврата второго рода. Провѣрить это предоставляемъ читателю: трудностей никакихъ не представится, если обратиться къ формуламъ § 465-го.

§ 502. Припоминая, что сказано (§ 464) о различіи особенныхъ точекъ, можно доказать болѣе непосредственно, что въ точкѣ возврата первого рода радіусъ кривизны равенъ нулю. Дѣйствительно, называя черезъ  $u$  уголъ, составленный касательною къ кривой съ осью  $x$ -овъ, и черезъ  $u_1$  уголъ, составленный съ тою же осью радіусомъ-векторомъ, соединяющимъ рассматриваемую точку съ точкою пересѣченія кривой и круга, проведеннаго изъ этой точки, какъ изъ центра, радіусомъ  $R$ , мы нашли, въ случаѣ возврата первого рода,

$$A \cos^2 u (\tan u - \tan u_1)^2 + M_1 R = 0,$$

гдѣ  $M_1$  имѣетъ конечное значеніе. Изъ этого уравненія видно, что  $\tan u - \tan u_1$ , а слѣдовательно, и  $u - u_1$  того же порядка, какъ  $\sqrt{R}$ , и уголъ между хордою и касательною того же порядка, какъ корень квадратный изъ хорды. Разстояніе касательной до конца хорды равно произведенію  $R$  на  $\sin(u - u_1)$  и, слѣдовательно, порядка  $\frac{3}{2}$ ; значитъ, оно бесконечно-велико по отношенію къ аналогичному разстоянію въ кругѣ какого-угодно радіуса, которое будетъ второго порядка. Отсюда вытекаетъ, что кривая, удаляясь отъ своей касательной бесконечно быстрѣе круга, имѣетъ бесконечно-большую кривизну.

§ 503. Выраженіе радіуса кривизны кривой, отнесенной къ полярнымъ координатамъ, выводится легко изъ формулы

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2 y - dy d^2 x}.$$

Вычисляя  $dx$ ,  $dy$ ,  $d^2 x$ ,  $d^2 y$  при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

имѣемъ:

$$\rho = \frac{(dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2dr^2 d\theta - r d^2 r d\theta + r^2 d\theta^3} = \frac{\left[ \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{2 \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2} + r^2}.$$

#### ПРИЛОЖЕНІЕ КЪ НѢКОТОРЫМЪ ПРИМѢРАМЪ

§ 504. Радіусъ кривизны эллипса. — Пусть

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0$$

будетъ уравненіе эллипса; обозначая первую часть черезъ  $\varphi(x, y)$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 2b^2 x, & \frac{d\varphi}{dy} &= 2a^2 y, \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= 2b^2, & \frac{d^2 \varphi}{dx dy} &= 0, & \frac{d^2 \varphi}{dy^2} &= 2a^2, \end{aligned}$$

и найденная (§ 500) формула даетъ:

$$\rho = \frac{(4b^4x^2 + 4a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{8b^2a^4y^2 + 8a^2b^4x^2} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2b^2(a^2y^2 + b^2x^2)} = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Называя черезъ  $N$  отрѣзокъ нормали, заключенный между кривою и осью  $x$ -овъ, имѣемъ:

$$N^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4},$$

и, слѣдовательно,

$$\rho = \frac{N^3a^2}{b^4}.$$

Называя черезъ  $p$  параметръ  $\frac{b^2}{a}$ , имѣемъ:

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Эта формула приложима къ гиперболѣ и вычисляется тѣмъ же путемъ, стоитъ только измѣнить  $b^2$  на  $-b^2$ . Она приложима также и къ параболѣ. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$y^2 - 2px = 0$$

будетъ уравненіе параболы. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -2p, & \frac{d\varphi}{dy} &= 2y, \\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= 0, & \frac{d^2\varphi}{dx dy} &= 0, & \frac{d^2\varphi}{dy^2} &= 2, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\rho = \frac{(4p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{8p^2} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

А такъ какъ поднормаль равна  $p$ , то  $y^2 + p^2$  равно квадрату нормали, и мы имѣемъ:

$$\rho = \frac{N^3}{p^2}.$$

Радіусъ кривизны циклоиды. — Уравненія циклоиды будутъ:

$$\begin{aligned} x &= a(u - \sin u), \\ y &= a(1 - \cos u). \end{aligned}$$

Наиболѣе удобная формула для вычисленія есть

$$\rho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y dx - dy d^2x};$$

послѣ очевидныхъ упрощеній она даетъ:

$$\rho = -4a \sin \frac{1}{2} u.$$

Нормаль, взятая между кривою и точкою касанія производящаго круга съ основаніемъ, равна  $2a \sin \frac{1}{2} u$ ; значитъ, радіусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной нормали.

**Радіусъ кривизны логариѣмической спирали.**—Уравненіе логариѣмической спирали есть

$$r = ae^{m\theta};$$

слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{dr}{d\theta} = mr, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = m^2r,$$

и выраженіе радіуса кривизны будетъ (§ 503)

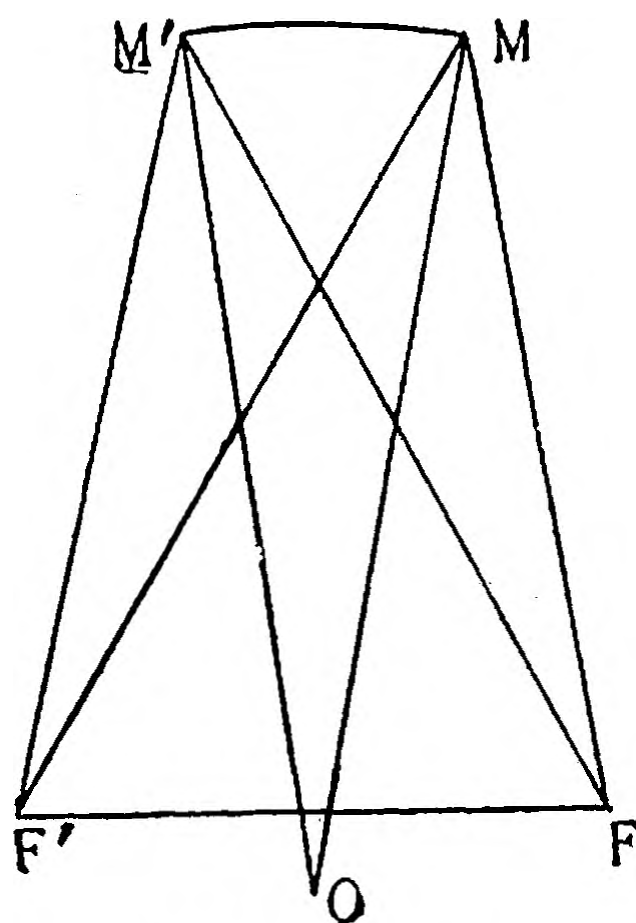
$$\rho = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{2m^2r^2 - m^2r^2 + r^2} = r\sqrt{m^2 + 1};$$

слѣдовательно, радіусъ кривизны пропорціоналенъ радіусу-вектору.

#### ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ РАДІУСОВЪ КРИВИЗНЫ

**§ 505.** Геометрія даетъ возможность во многихъ случаяхъ опредѣлять радіусъ кривизны кривой безъ помощи предыдущихъ формулъ. Для этого часто бываетъ выгодно обращаться къ теоремѣ, доказанной въ § 494-омъ, и разсматривать центръ кривизны, какъ пересѣченіе двухъ безконечно-близкихъ нормалей. Приведемъ нѣсколько примѣровъ на этотъ методъ.

**Радіусъ кривизны эллипса.**—Пусть  $F$  и  $F'$  будутъ два фокуса эллипса (*черт.* 39) и  $M$ —та точка кривой, для которой требуется опредѣлить радіусъ кривизны. Нор-



*Черт.* 39

маль въ  $M$  есть биссектриса угла  $FMF'$ . Пусть  $M'$  будетъ точка, безконечно-близкая къ  $M$ ; нормаль въ  $M'$  есть биссектриса угла  $F'M'F$ ; точка  $O$ , пересѣченіе двухъ



нормалей, представляет центр кривизны, и мы имѣемъ, называя черезъ  $\rho$  радіусъ кривизны и черезъ  $O$  уголъ между обѣими нормалями,

$$\rho = \frac{MM'}{O}. \quad (1)$$

Обозначая, для сокращенія, черезъ  $F$  и  $F'$  углы чертежа, вершины которыхъ обозначены этими буквами, *вполнѣ строго* имѣемъ:

$$O = \frac{F + F'}{2}, \quad (2)$$

и, слѣдовательно,

$$\rho = \frac{2MM'}{F + F'}, \quad (3)$$

или, что одно и то же,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{F}{2MM'} + \frac{F'}{2MM'}. \quad (4)$$

Называя черезъ  $\varphi$  уголъ, составляемый нормалью  $MO$  съ радіусами-векторами  $FM$ ,  $F'M$  и отбрасывая безконечно-малыя второго порядка, очевидно имѣемъ:

$$\frac{F}{MM' \cos \varphi} = \frac{1}{FM}, \quad \frac{F'}{MM' \cos \varphi} = \frac{1}{F'M},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \varphi}{2} \left( \frac{1}{FM} + \frac{1}{F'M} \right), \quad (5)$$

или, обозначая оба радіуса-вектора черезъ  $\delta$  и  $\delta'$ , имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \varphi}{2} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} \right) = \frac{(\delta + \delta') \cos \varphi}{2\delta\delta'}. \quad (6)$$

Такъ какъ сумма  $\delta$  и  $\delta'$  равна большой оси  $2a$ , то эта формула обращается въ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a \cos \varphi}{\delta\delta'}. \quad (7)$$

Выведенную формулу легко преобразовать въ другую, болѣе изящную. Называя черезъ  $2c$  разстояніе между фокусами, имѣемъ:

$$4c^2 = \delta^2 + \delta'^2 - 2\delta\delta' \cos 2\varphi = (\delta + \delta')^2 - 2\delta\delta'(1 + \cos 2\varphi),$$

или

$$4c^2 = 4a^2 - 4\delta\delta' \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$\delta\delta' = \frac{a^2 - c^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{b^2}{\cos^2 \varphi},$$

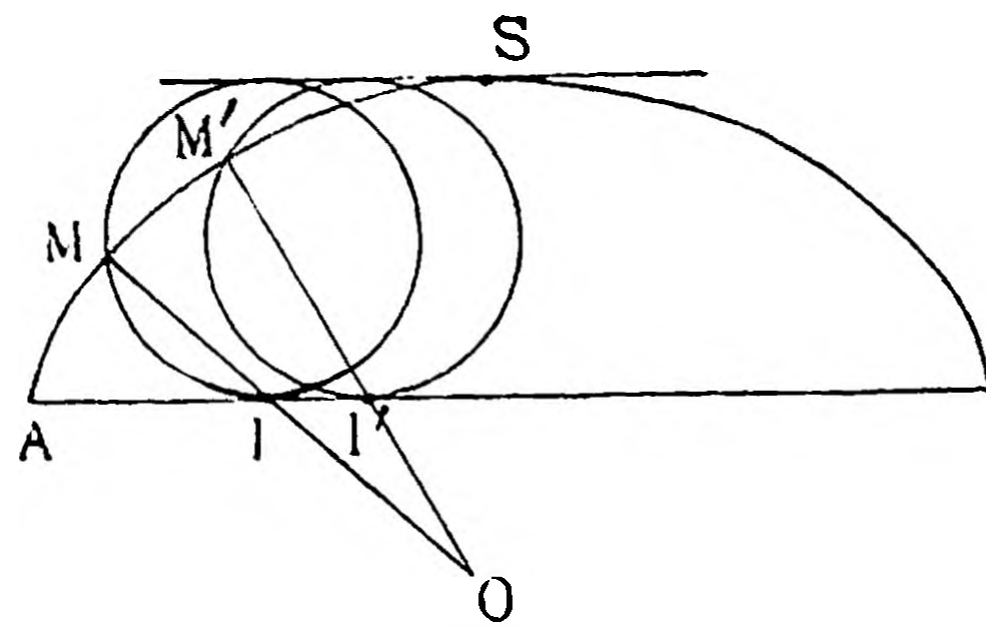
гдѣ  $b$  обозначаетъ малую полуось; такимъ образомъ формула (7) принимаетъ видъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a \cos^3 \varphi}{b^2}; \quad (8)$$

наконецъ, называя черезъ  $p$  параметръ  $\frac{b^2}{a}$ , имѣемъ:

$$\rho = \frac{p}{\cos^3 \varphi}. \quad (9)$$

**Радиус кривизны циклоиды.**—Пусть  $AMS$  (черт. 40) будет циклоида;  $MI$ ,  $M'I'$ —два бесконечно-близких положения производящего круга для точек  $M$  и  $M'$ . Нор-



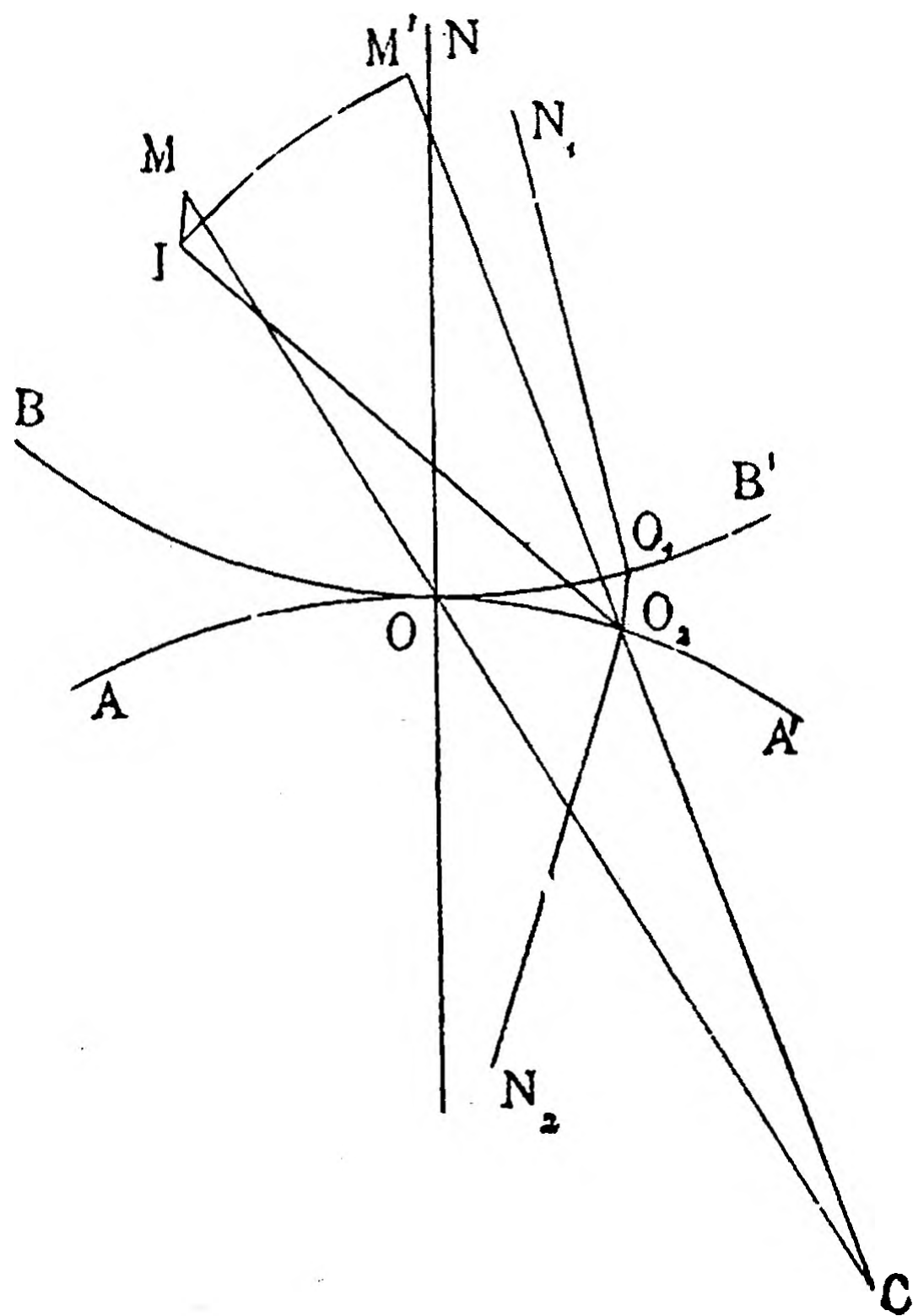
Черт. 40

мали въ этихъ точкахъ будутъ (§ 14)  $MI$ ,  $M'I'$ , и центръ кривизны есть точка  $O$  ихъ встрѣчи. Называя черезъ  $\rho$  радиусъ кривизны и черезъ  $O$  уголъ между нормальми, имѣемъ, какъ и въ предыдущемъ случаѣ,

$$\rho = \frac{MM'}{O}.$$

Но дуга  $MM'$  равна (§ 20) удвоенной дугѣ круга радиуса  $MI$ , соотвѣтственный центральный уголъ для которой есть какъ разъ уголъ между крайними нормальми дуги  $MM'$ . А такъ какъ отношеніе дуги круга къ ея углу равно радиусу круга, то дуга  $MM'$ , будучи двойною для дуги круга, раздѣленная на тотъ же уголъ, дастъ удвоенное частное, и, слѣдовательно, радиусъ кривизны циклоиды равенъ удвоенной нормали  $IM$ .

**§ 506. Радиусъ кривизны какой-угодно рулети.**—Разсмотримъ кривую, описываемую точкою, неподвижно связанною съ подвижною кривою, катящеюся безъ скольженія по данной неподвижной кривой.



Черт. 41

Пусть  $AOA'$  (черт. 41) будетъ неподвижная кривая и  $BOB'$ —положеніе под-

вижной кривой въ то время, когда неподвижно связанная съ нею точка находится въ  $M$ .

Для полученія на рулетѣ точки  $M'$ , бесконечно-близкой къ  $M$ , мы должны двигать кривую  $BOB'$ , до тѣхъ поръ пока точка  $O_1$ , бесконечно-близкая къ  $O$ , не перемѣстится въ точку  $O_2$ , въ которой  $OO_2 = OO_1$ , и притомъ такъ, чтобы въ этой общей точкѣ обѣ кривыя касались одна другой. Но движеніе, которое для этого должна совершить подвижная кривая и въ которомъ участвуетъ точка  $M$ , можно замѣнить двумя другими, выполненными въ послѣдовательномъ порядкѣ, а именно: перенесеніемъ, при которомъ всѣ точки описываютъ прямыя, равныя и параллельныя  $O_1O_2$ , и вращеніемъ вокругъ точки  $O_2$ , при которомъ нормаль  $O_2N_2$  дѣлается продолженіемъ нормали  $O_1N_1$  и, слѣдовательно, вращается на уголъ, равный углу между обѣими нормальми, т.-е. равный суммѣ ихъ наклоненій къ  $ON$ ,  $\frac{OO_1}{R_1} + \frac{OO_2}{R_2} = OO_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ . Пусть  $MI$  изображаетъ прямую, равную и параллельную  $O_1O_2$ , проведенную черезъ точку  $M$ , а  $IM'$ —дугу, описываемую изъ  $O_2$ , какъ изъ центра, и соответствующую углу указаннаго вращенія;  $M'$  будетъ точкою на рулетѣ, смежною съ  $M$ . Касательная къ этой кривой есть предѣлъ направленія  $MM'$ , и какъ  $MI$  представляетъ бесконечно-малую второго порядка, то можно (§ 13), подставляя вмѣсто точки  $M$  точку  $I$ , замѣнить  $MM'$  черезъ  $IM'$ , бесконечно-малую дугу круга, описаннаго изъ  $O_2$ , какъ изъ центра, предѣломъ для которой будетъ касательная къ кругу, проведенному изъ центра  $O$  радіусомъ  $OM$ . Такимъ образомъ нормалью къ рулетѣ является  $MO$ . Такъ какъ это доказательство приложимо ко всѣмъ положеніямъ точки  $M$ , то смежною нормалью будетъ  $M'O_2$ , а точка встрѣчи  $C$  этихъ двухъ прямыхъ явится центромъ кривизны; называя черезъ  $\rho$  радіусъ кривизны и черезъ  $C$  уголъ между двумя нормальми, пишемъ:

$$\rho = \frac{MM'}{C}.$$

Вычисляемъ оба члена этой дроби, отбрасывая, на что имѣемъ право, бесконечно-малыя второго порядка.

$MM'$  есть дуга, описанная изъ точки  $O_2$ , съ угломъ, равнымъ  $OO_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ , и, слѣдовательно, замѣняя ея радіусъ радіусомъ  $OM$ , отличающимся отъ перваго на бесконечно-малую величину, имѣемъ:

$$MM' = OM \cdot (\overline{OO_2}) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Изъ треугольника  $MSO_2$  выводимъ:

$$C = MO_2M' - O_2MO.$$

Но

$$MO_2M' = OO_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right);$$

называя же при этомъ черезъ  $\varphi$  уголъ, составляемый  $MO$  съ нормалью  $ON$ , и замѣчая, что уголъ  $O_2MO$ , подъ которымъ видно  $OO_2$  изъ точки  $M$ , равенъ

$$\frac{OO_2 \cos \varphi}{OM},$$

имѣемъ окончательно:

$$C = OO_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\cos \varphi}{OM} \right).$$

Слѣдовательно,

$$\rho = \frac{MM'}{C} = \frac{OM \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{\cos \varphi}{OM}}.$$

Въ случаѣ, когда кривая производится точкою круга радіуса  $R_1$ , катящегося по кругу радіуса  $R_2$ , имѣемъ:

$$OM = 2R_1 \cos \varphi,$$

и формула даетъ:

$$\rho = \frac{OM \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2R_1}} = 2OM \frac{R_1 + R_2}{2R_1 + R_2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ кривизны пропорціоналенъ нормали  $OM$ .

Если радіусъ неподвижнаго круга обращается въ безконечность, то самый кругъ приводится къ прямой линіи, а эпициклоида къ циклоидѣ; формула обращается тогда въ

$$\rho = 2OM,$$

что вполне согласуется съ полученнымъ выше (§ 505) результатомъ.

#### Кривизна ортогональныхъ линій

**§ 507.** Когда общее уравненіе ряда кривыхъ содержитъ перемѣнный параметръ, то число кривыхъ, которыя онъ можетъ представить, безконечно-велико, какъ и число значеній, какія можно приписать параметру, и возможно, вообще говоря, опредѣлить этотъ послѣдній такъ, чтобы соотвѣтственная кривая проходила черезъ данную точку плоскости, которую ихъ совокупность покроетъ цѣликомъ. Этому первому ряду, каковы бы ни были составляющія его кривыя, всегда отвѣчаетъ второй, состоящій изъ линій, пересѣкающихъ линіи перваго ряда подъ прямымъ угломъ; эти вторыя линіи называютъ ортогональными траекторіями первыхъ; такія траекторіи всегда существуютъ, такъ какъ при предположеніи, что кривыя первой системы проведены по плоскости и ее покрываютъ, всякая ортогональная траекторія представляетъ линію, какъ слѣдъ такого движенія перемѣнной точки, при которомъ она въ каждый моментъ направлена нормально къ той изъ кривыхъ первой системы, на которой находится

въ этотъ моментъ. Такъ какъ каждая изъ этихъ траекторій опредѣляется одною изъ своихъ точекъ, то ихъ общее уравненіе содержитъ произвольный параметръ.

Пусть

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \alpha_1, \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha_2\end{aligned}$$

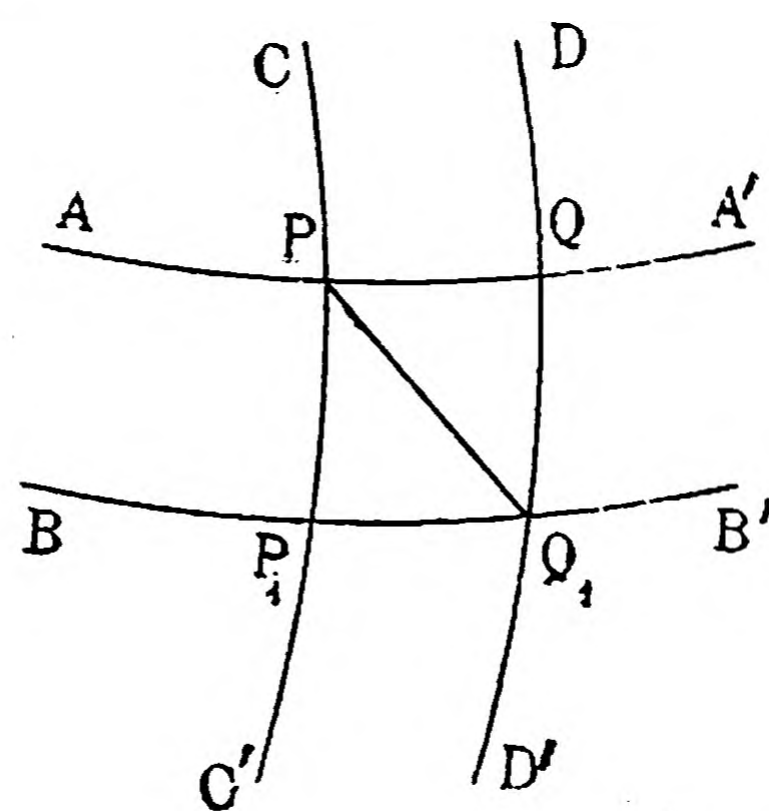
будутъ уравненія двухъ системъ ортогональныхъ кривыхъ, при чемъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будутъ переменные параметры, относительно которыхъ мы предполагаемъ эти уравненія рѣшенными: каждая точка плоскости можетъ быть опредѣлена значеніями параметровъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которымъ соотвѣтствуютъ взаимно пересѣкающіяся въ ней кривыя, и эти два параметра могутъ замѣнять прямоугольныя координаты  $x$  и  $y$ . Примѣняя эту систему и задавая двѣ бесконечно-близкія точки параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2$ , замѣчаемъ, что квадратъ ихъ разстоянія есть вида

$$ds^2 = A_1 d\alpha_1^2 + A_2 d\alpha_2^2,$$

гдѣ (§ 126)

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{\left(\frac{d\alpha_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right)^2}, \\ A_2 &= \frac{1}{\left(\frac{d\alpha_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dy}\right)^2}.\end{aligned}$$

Кривыя (черт. 42)  $AA', CC'$ , пересѣкающіяся въ первой изъ разсматриваемыхъ точекъ, и кривыя  $BB', DD'$ , пересѣкающіяся во второй изъ нихъ, образуютъ прямо-



Черт. 42

угольникъ  $RQP_1Q_1$ , для котораго  $ds$  является діагональю. Стороны  $PP_1, PQ$  представляютъ разстоянія, соотвѣтствующія измѣненію только одного изъ параметровъ; онѣ выразятся: первая—черезъ  $d\alpha_1\sqrt{A_1}$  и вторая—черезъ  $d\alpha_2\sqrt{A_2}$ .

Для избѣжанія радикаловъ положимъ

$$\begin{aligned}\sqrt{A_1} &= \frac{1}{h_1}, \\ \sqrt{A_2} &= \frac{1}{h_2},\end{aligned}$$

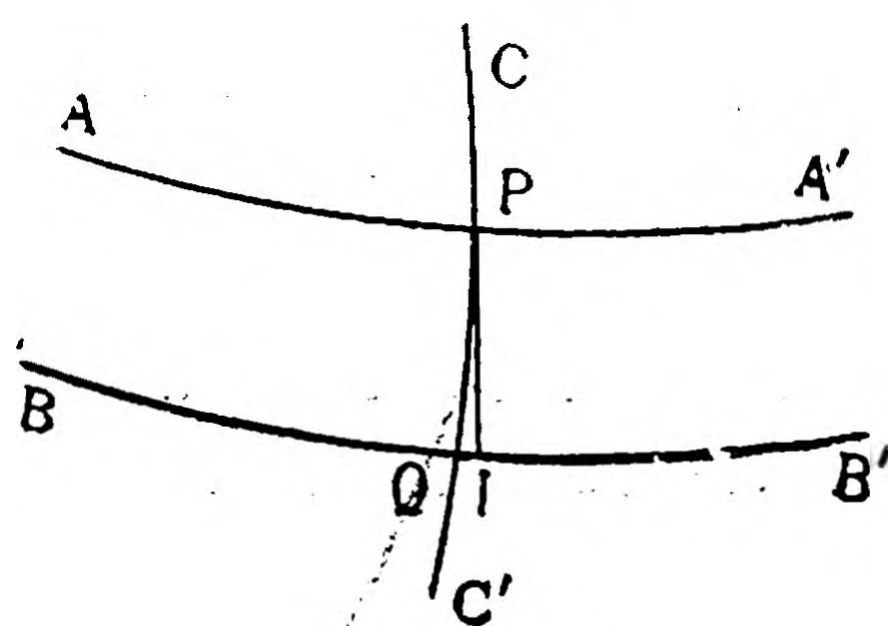


разсматривая  $\frac{1}{h_1}$  и  $\frac{1}{h_2}$ , какъ количества существенно положительныя. Такимъ образомъ,  $\frac{d\alpha_1}{h_1}$  выражаетъ длину  $PP_1$ , представляющую разстояніе между двумя бесконечно-близкими кривыми, соотвѣтствующими параметрамъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_1 + d\alpha_1$ ; мы ее обозначимъ черезъ  $ds_2$ , потому что она отсчитана по кривой, соотвѣтствующей параметру  $\alpha_2$ . Точно такъ же  $\frac{d\alpha_2}{h_2}$  выражаетъ длину  $PQ$ , представляющую разстояніе между двумя кривыми, соотвѣтствующими параметрамъ  $\alpha_2$  и  $\alpha_2 + d\alpha_2$ ; обозначимъ ее черезъ  $ds_1$ .

Функціи  $h_1$  и  $h_2$  опредѣляютъ законъ, по которому измѣняется разстояніе между двумя бесконечно-близкими кривыми; въ самомъ дѣлѣ, если эти кривыя соотвѣтствуютъ параметрамъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , то, въ какой бы точкѣ мы ни переходили отъ одной изъ нихъ къ другой, приращеніе  $d\alpha_1$  будетъ постояннымъ, и, слѣдовательно, путь по нормальному направленію пропорціоналенъ  $\frac{1}{h_1}$ .

§ 508. Радиусы кривизны двухъ кривыхъ въ точкѣ ихъ пересѣченія выражаются изящно при помощи функцій  $h_1$ ,  $h_2$  и ихъ производныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть (черт. 43)  $AA'$ ,  $BB'$  будутъ двѣ бесконечно-близкія линіи, соотвѣтствующія параметрамъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , и  $CC'$  — линія второй системы,



Черт. 43

соотвѣтствующая параметру  $\alpha_2$ ; требуется вычислить кривизну послѣдней въ точкѣ  $P$  ея пересѣченія съ кривою  $AA'$ . Эта кривизна равна углу смежности, составленному касательными въ точкахъ  $P$  и  $Q$ , дѣленному на длину  $ds_2$  дуги  $PQ$ . По предыдущему имѣемъ:

$$ds_2 = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

Если, поэтому, назовемъ черезъ  $\epsilon$  уголъ смежности, то радиусъ кривизны  $\rho_2$  выразится формулою

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\epsilon h_1}{d\alpha_1}.$$

Остается вычислить  $\epsilon$ . Но этотъ уголъ составленъ нормальми, соотвѣтственно проведенными въ  $P$  и  $Q$  къ кривымъ  $AA'$  и  $BB'$ , которыя обѣ пересѣкаютъ  $PQ$  подъ прямымъ угломъ; пусть  $PI$  будетъ первая изъ этихъ нормалей и  $I$  — точка, въ которой она пересѣкаетъ кривую  $BB'$ ; разстояніе  $QI$  есть бесконечно-малая второго порядка и потому, при вычисленіи угла  $\epsilon$ , можно замѣнить нормаль въ  $Q$  кривой  $B'$  нормалью въ  $I$ , составляющей съ нею бесконечно-малый уголъ второго порядка. Зна-

читъ,  $\varepsilon$  есть дополненіе угла, подъ которымъ прямая  $PI$  пересѣкаетъ кривую  $BB'$ , но мы знаемъ (§ 85), что если въ каждой точкѣ кривой возставить нормаль и на этихъ нормаляхъ отложить постоянную длину  $l$ , то геометрическимъ мѣстомъ концовъ будетъ кривая, параллельная данной, и пересѣкающая всѣ нормали подъ прямымъ угломъ. Отсюда легко заключить, что если длина  $l$ , отложенная на каждой нормали, измѣняется при переходѣ отъ одной точки къ другой, то элементъ  $ds$  полученной кривой, концы которой соотвѣтствуютъ длинамъ  $l$  и  $l + dl$ , отложеннымъ на двухъ смежныхъ нормаляхъ, составитъ съ этими нормалями уголъ, косинусъ котораго равенъ  $\frac{dl}{ds}$ . Въ интересующемъ насъ случаѣ двухъ бесконечно-близкихъ кривыхъ элементъ  $ds$  можно замѣнить соотвѣтственнымъ элементомъ  $ds_1$  кривой  $AA'$ , отличающимся отъ перваго на бесконечно-малую второго порядка, и, слѣдовательно, бесконечно-малый уголъ  $\varepsilon$ , который можно замѣнить косинусомъ его дополненія, выразится черезъ  $\frac{dl}{ds_1}$ ;  $l$  представляетъ здѣсь разстояніе  $PI$ , равное, какъ мы сказали,  $\frac{d\alpha_1}{h_1}$ , а  $dl$  есть приращеніе, соотвѣтствующее бесконечно-малому измѣненію  $\alpha_2$ ; поэтому имѣемъ:

$$dl = \frac{d\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}.$$

Знаменатель  $ds_1$  частнаго  $\frac{dl}{ds_1}$  соотвѣтствуетъ разстоянію между двумя кривыми, нормальными къ  $AA'$ , и параметрамъ  $\alpha_2$  и  $\alpha_2 + d\alpha_2$ ; значитъ (§ 126),

$$ds_1 = \frac{d\alpha_2}{h_2}$$

и, слѣдовательно,

$$\varepsilon = \frac{dl}{ds_1} = h_2 d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2},$$

откуда заключаемъ:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = -\frac{h_2}{h_1} \frac{dh_1}{d\alpha_2};$$

такъ же находимъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1} = -\frac{h_1}{h_2} \frac{dh_2}{d\alpha_1}.$$

§ 509. Эти формулы придаютъ радіусу кривизны знакъ, который, какъ мы сейчасъ увидимъ, связанъ съ родомъ кривизны. Разсмотримъ, напр., формулу

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2};$$

$h_1$  и  $h_2$ , опредѣленные своими квадратами (§ 507), являются существенно положи-

тельными; следовательно, знак  $\frac{1}{\rho_2}$  совпадает со знаком  $\frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}$ ; такъ какъ  $\frac{1}{h_1}$  пропорціонально разстоянію между кривыми, соотвѣтствующими значеніямъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , то отсюда видно, что  $\rho_2$  положительно, когда, пробѣгая по одной изъ нихъ въ направленіи увеличенія  $\alpha_2$ , мы удаляемся отъ другой, бесконечно-близкой, кривой. Но двѣ кривыя, нормальныя къ одной и той же третьей кривой, удаляются одна отъ другой, когда ихъ первые элементы расположены въ той части, къ которой третья кривая обращена своею выпуклостью. Такимъ образомъ, мы можемъ высказать слѣдующее правило:

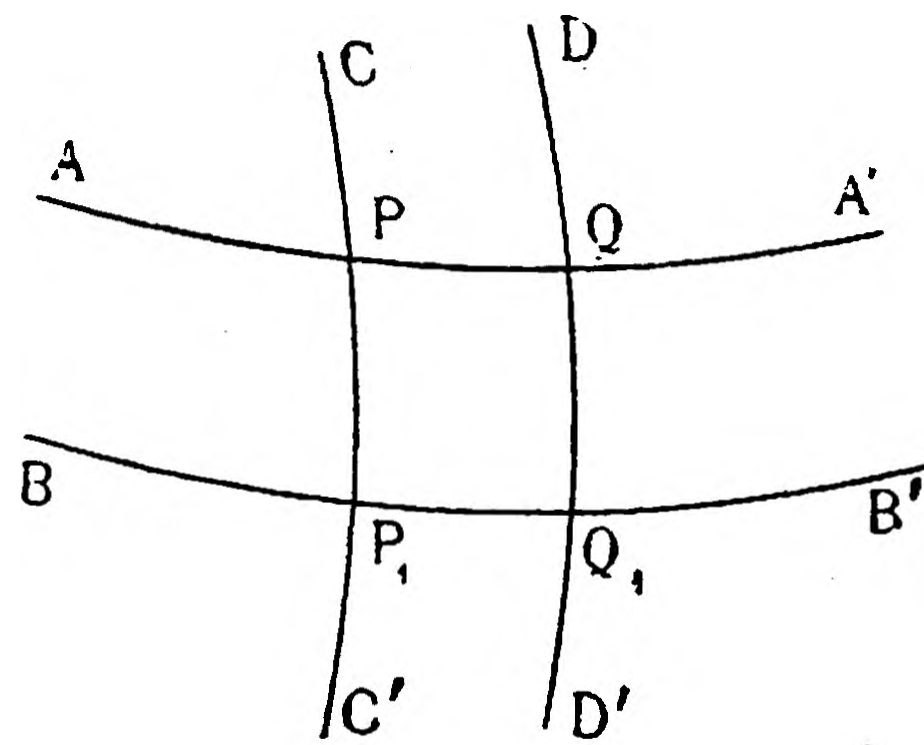
Если разсматривать кривую, соотвѣтствующую данному значенію  $\alpha_2$ , какъ отдѣляющую точки плоскости, для которыхъ  $\alpha_2$  меньше этого даннаго значенія, отъ точекъ, для которыхъ оно больше того же значенія, то радіусъ кривизны  $\rho_2$ , вычисляемый по выше найденной формулѣ, положителенъ, когда кривизна линіи обращена въ сторону первой части плоскости, и отрицателенъ въ противномъ случаѣ.

#### § 510. Формула

$$\frac{1}{\rho_2} = h_2 h_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}$$

можетъ быть представлена подѣ видомъ, который имѣетъ изящное геометрическое истолкованіе.

Пусть  $AA'$ ,  $BB'$  будутъ (черт. 44) двѣ бесконечно-близкія кривыя первой



Черт. 44

системы, соотвѣтствующія параметрамъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , и  $CC'$ ,  $DD'$ —двѣ ортогональныя кривыя, соотвѣтствующія параметрамъ  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 + d\alpha_2$ . Радіусъ кривизны  $\rho_2$  дуги  $PP_1$  въ случаѣ, представленномъ на чертежѣ, и въ предположеніи, что  $d\alpha_2$  положительно, имѣетъ, по только-что сказанному, положительное значеніе. Имѣя же

$$PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$QQ_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1} + \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_2,$$

закключаемъ, что

$$\frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) = \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_2}.$$

При дифференцировании по  $\alpha_2$  величина  $d\alpha_1$  принимается за постоянную; следовательно, предыдущее уравнение даетъ:

$$\frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_1 d\alpha_2},$$

и, значитъ,

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{QQ_1 - PP_1}{d\alpha_1 d\alpha_2}.$$

А такъ какъ

$$PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1}, \quad PQ = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

то окончательно

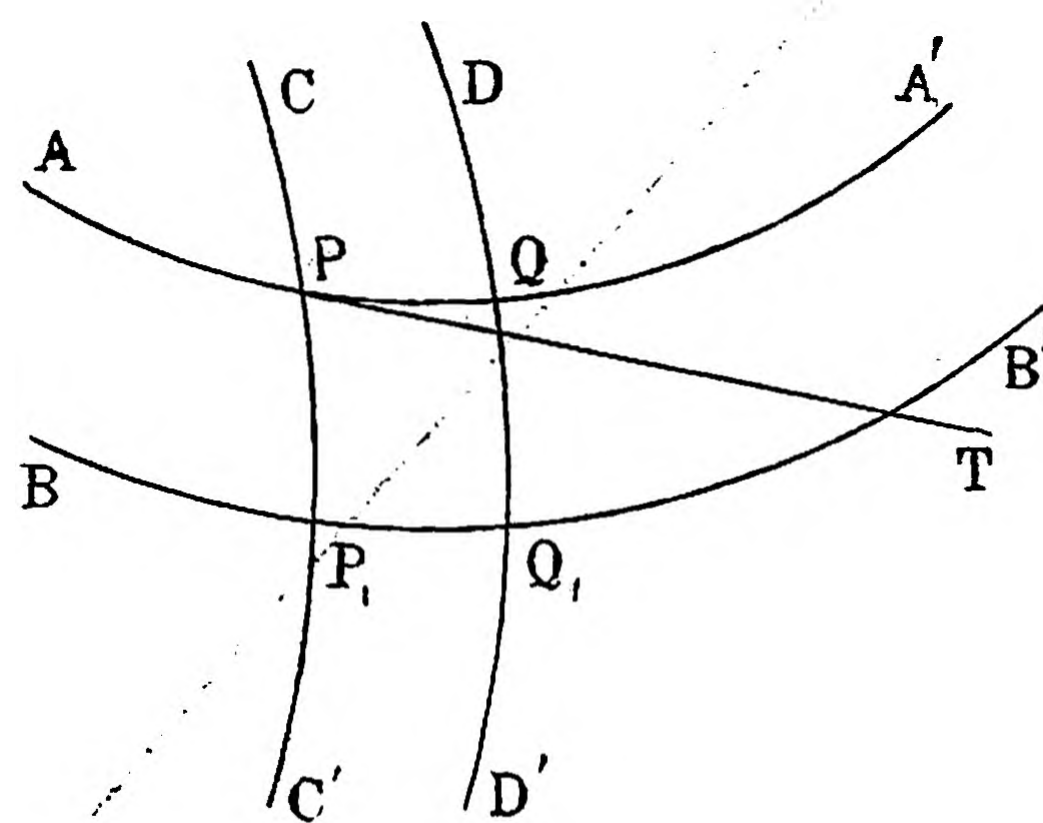
$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PQ \cdot PP_1}.$$

Кривизна дуги  $PP_1$  равна разности противоположныхъ сторонъ, раздѣленной на площадь прямоугольника.

Когда линіи второй системы—прямая,  $\frac{1}{\rho_2}$  равно нулю, и мы, следовательно, имѣемъ  $QQ_1 = PP_1$ ; въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что кривыя, нормальныя къ однѣмъ и тѣмъ же прямымъ (§ 85), отсѣкаютъ на двухъ какихъ-угодно изъ нихъ, равныя длины.

§ 511. Выраженія, найденныя для радіусовъ кривизны, приводятъ къ замѣчательной теоремѣ, касающейся закона измѣненія кривизнъ въ какой-угодно системѣ ортогональныхъ кривыхъ.

Пусть, какъ въ предыдущемъ параграфѣ,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  будутъ (черт. 45)



Черт. 45

четыре бесконечно-близкія кривыя, образующія бесконечно-малый прямоугольникъ  $PQR_1Q_1$  и соотвѣтствующія значеніямъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 + d\alpha_2$  двухъ параметровъ.

Пусть, кромѣ того,  $\rho_1$  обозначаетъ радіусъ кривизны  $AA'$  и  $\rho_2$ —радіусъ кривизны  $CC'$  въ точкѣ  $P$ ; предполагая  $d\alpha_1$  и  $d\alpha_2$  положительными, видимъ, что на данномъ чертежѣ  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , по нашимъ соглашеніямъ, являются оба положительными.

Пусть  $PT$  будетъ касательная къ  $AA'$  въ точкѣ  $P$ , а  $\theta$ —уголъ, составляемый ею съ осью положительныхъ  $X$ -овъ; по нашимъ соглашеніямъ имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d\theta}{PQ} = -h_2 \frac{d\theta}{dx_2};$$

точно такъ же

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 \frac{d\theta}{dx_1}.$$

А такъ какъ

$$\frac{d^2\theta}{dx_1 dx_2} = \frac{d^2\theta}{dx_2 dx_1},$$

то

$$\frac{d\left(\frac{1}{h_2 \rho_1}\right)}{dx_1} + \frac{d\left(\frac{1}{h_1 \rho_2}\right)}{dx_2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{h_2} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{dx_1} + \frac{1}{h_1} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{dx_1} + \frac{1}{\rho_2} \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{dx_2} = 0.$$

Умножая это уравненіе на  $h_1 h_2$  и принимая во вниманіе значенія  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$ , получаемъ:

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{dx_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0.$$

Замѣчая, что  $\frac{dx_1}{h_1}$  представляетъ безконечно-малую дугу  $PP_1$ , а  $\frac{dx_2}{h_2}$ —дугу  $PQ$ , и обозначая ихъ соотвѣтственно черезъ  $ds_2$  и  $ds_1$ , имѣемъ окончательно:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0.$$

Это уравненіе открыто Ламэ (Lamé).

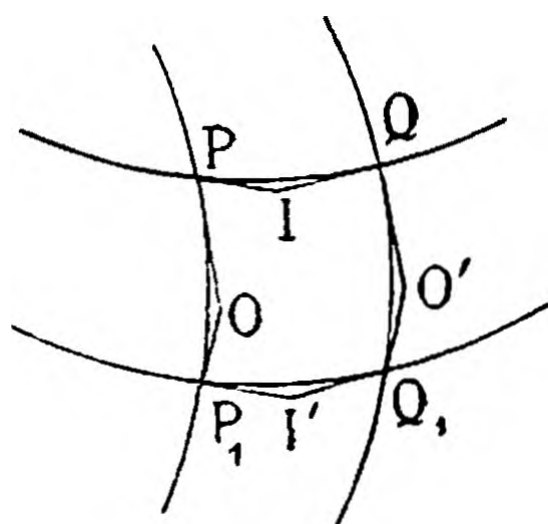
Хотя предыдущее доказательство не оставляетъ сомнѣній относительно смысла частныхъ  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2}$ ,  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1}$ , всё-же не бесполезно будетъ указать его явно.

Дѣйствительно, эти частныя не являются производными и не могутъ, очевидно, ими быть, такъ какъ не существуетъ переменныхъ  $s_1, s_2$ , отъ которыхъ  $\rho_1$  и  $\rho_2$  были бы функціями. Въ частномъ  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1}$  числитель  $d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)$  есть избытокъ кривизны  $QQ_1$  въ точкѣ  $Q$  надъ кривизною  $PP_1$  въ точкѣ  $P$ , а  $ds_1$ —безконечно-малая дуга  $PQ$ , измѣряющая разстояніе между двумя кривыми;  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2}$  имѣетъ подобное же значеніе.



§ 512. Предыдущее уравнение весьма важно; поэтому мы дадим второе доказательство, чисто геометрическое.

Пусть, как и раньше,  $PQP_1Q_1$  обозначает (черт. 46) бесконечно-малый прямо-



Черт. 46

угольникъ, составленный кривыми двухъ системъ, соответствующихъ параметрамъ  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$ . Ведемъ черезъ каждую изъ точекъ  $P, Q, P_1, Q_1$  касательныя къ обѣимъ пересекающимся въ нихъ сторонамъ и составляемъ такимъ образомъ восьмиугольникъ  $PIQO'Q_1I'P_1O$ , въ которомъ сумма восьми угловъ равна двѣнадцати прямымъ угламъ, и такъ какъ углы въ точкахъ  $P, Q, P_1, Q_1$ —прямые, то сумма угловъ при вершинахъ  $I, O, I', O'$  равна восьми прямымъ; называя черезъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1$  углы смежности дугъ  $PQ, P_1Q_1$ , черезъ  $\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2$  углы смежности дугъ  $PP_1, QQ_1$  и обозначая углы восьмиугольника буквами ихъ вершинъ, имѣемъ:

$$O = \pi + \varepsilon_2, \quad I = \pi + \varepsilon_1, \quad O' = \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, \quad I' = \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1;$$

слѣдовательно, уравненіе

$$O + O' + I + I' = 4\pi$$

равносильно уравненію

$$-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2 = 0. \quad (1)$$

Первый изъ дифференціаловъ  $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2$  относится къ приращенію  $d\alpha_1$  параметра  $\alpha_1$  и второй—къ приращенію  $d\alpha_2$  параметра  $\alpha_2$ . Имѣемъ, очевидно,

$$\varepsilon_1 = \frac{PQ}{\rho_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{PP_1}{\rho_2},$$

и, значитъ, уравненіе (1) можетъ быть написано слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d\left(\frac{PP_1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = 0, \quad (2)$$

т.-е.

$$PQ \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{d(PQ)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + PP_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{d(PP_1)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = 0. \quad (3)$$

Но (§ 507)

$$PQ = ds_1 = \frac{dx_2}{h_2}, \quad PP_1 = ds_2 = \frac{dx_1}{h_1};$$

слѣдовательно,

$$\frac{d(PQ)}{dx_1} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dx_2}{h_2} \right) = dx_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{dx_1},$$

$$\frac{d(PP_1)}{dx_2} = \frac{d}{dx_2} \left( \frac{dx_1}{h_1} \right) = dx_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{dx_2};$$

отсюда заключаемъ (§ 508):

$$\frac{d(PQ)}{dx_1} = dx_2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{d(PP_1)}{dx_2} = dx_1 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{\rho_2},$$

и уравненіе (3) принимаетъ видъ:

$$\frac{dx_1 dx_2}{h_2} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{dx_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{dx_1 dx_2}{h_1 h_2} + \frac{dx_1 dx_2}{h_1} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \frac{dx_1 dx_2}{h_1 h_2} = 0. \quad (4)$$

Сокращая на множитель  $dx_1 dx_2$  и умножая на  $h_1 h_2$ , получаемъ:

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{dx_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0, \quad (5)$$

или окончательно, вслѣдствіе равенствъ  $\frac{dx_1}{h_1} = ds_2$ ,  $\frac{dx_2}{h_2} = ds_1$ ,

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0. \quad (6)$$

§ 513. Предыдущую формулу можно такъ преобразовать, что она будетъ содержать только функціи  $h_1$ ,  $h_2$  и параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , отъ которыхъ эти функціи зависятъ. Въ самомъ дѣлѣ, обращаясь къ уравненію

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{dx_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{dx_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0$$

и замѣняя въ немъ  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$  ихъ значеніями,

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{dx_1},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{dx_2},$$

находимъ:

$$h_1 \frac{d \left( h_1 h_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \right)}{d \alpha_1} + h_2 \frac{d \left( h_1 h_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \right)}{d \alpha_2} + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \right)^2 = 0,$$

или, по выполненіи дифференцированій,

$$h_1^2 h_2^2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1^2} + h_1 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \left( h_1 \frac{d h_2}{d \alpha_1} + h_2 \frac{d h_1}{d \alpha_1} \right) + h_2^2 h_1^2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2^2} + h_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \left( h_1 \frac{d h_2}{d \alpha_2} + h_2 \frac{d h_1}{d \alpha_2} \right) + \\ + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \right)^2 = 0;$$

вслѣдствіе же тождествъ

$$h_1^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \frac{d h_2}{d \alpha_1} + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} \right)^2 = 0, \\ h_2^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \frac{d h_1}{d \alpha_2} + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \right)^2 = 0$$

наше уравненіе, по сокращеніи на множитель  $h_1 h_2$ , приводится къ

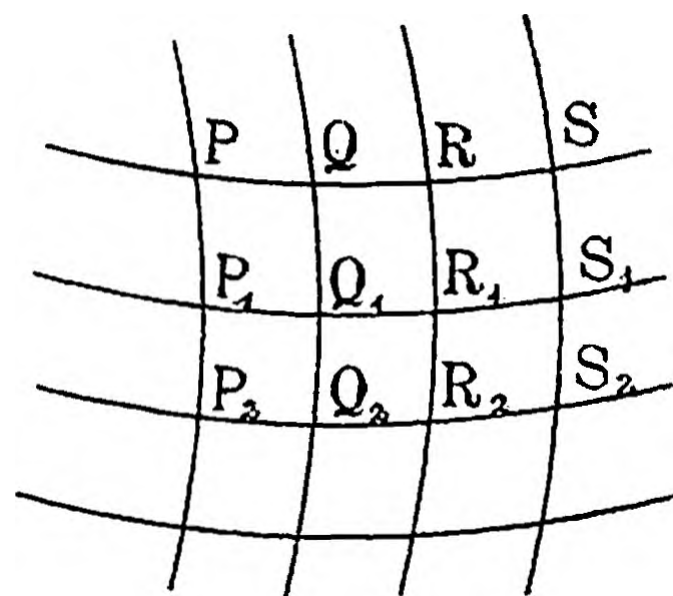
$$h_1 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2^2} + \frac{d h_1}{d \alpha_1} \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} + \frac{d h_2}{d \alpha_2} \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} = 0. \quad (7)$$

или, наконецъ, къ

$$h_1 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2^2} - h_1^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_1} \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_1} - h_2^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d \alpha_2} \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d \alpha_2} = 0. \quad (8)$$

§ 514. Функціи  $\frac{1}{h_1}$  и  $\frac{1}{h_2}$  даютъ законъ (§ 507) измѣненія разстоянія между двумя смежными кривыми, принадлежащими къ одной и той же системѣ; такимъ образомъ, уравненіе (8), связывающее эти функціи и ихъ производныя, выражаетъ неявно законъ измѣненія сторонъ бесконечно-малыхъ прямоугольниковъ, на которые можетъ быть разбита плоскость двумя системами ортогональныхъ линій. Чтобы представить этотъ законъ явно, достаточно въ формулѣ замѣнить  $\frac{1}{h_1}$  и  $\frac{1}{h_2}$  ихъ выраженіями въ функціи отъ бесконечно-малыхъ сторонъ этихъ прямоугольниковъ. Вообразимъ на плоскости рядъ линій той и другой системы, соотвѣствующихъ значеніямъ  $\alpha_1, \alpha_2$  параметровъ и тѣмъ значеніямъ, которыя мы получимъ, приписывая первымъ рядъ бесконечно-малыхъ приращеній, равныхъ  $d\alpha_1$  въ первой и  $d\alpha_2$  во второй системѣ.

Назовемъ черезъ  $x$  и  $y$  стороны  $PQ, PP_1$  первого прямоугольника (черт. 47) и согласимся выражать знакомъ  $d$  измѣненіе, соответствующее приращенію  $d\alpha_1$  пара-



Черт. 47

метра  $\alpha_1$ , т.-е. перемѣщенію по линіямъ  $PP_1, QQ_1, \dots$ , и знакомъ  $\delta$  измѣненіе, которое, соответствуя приращенію  $d\alpha_2$  параметра  $\alpha_2$ , выражаетъ перемѣщеніе по линіямъ другой системы. Имѣемъ (§ 507):

$$\begin{aligned} x &= PQ = \frac{d\alpha_2}{h_2}, \\ y &= PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1}, \\ dx &= \frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_2}{h_2} \right) d\alpha_1 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1}, \\ dy &= \frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_1}, \\ \delta x &= \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_2}{h_2} \right) d\alpha_2 = d\alpha_2^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_2}, \\ \delta y &= \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_2}, \\ d^2 x &= \frac{d}{d\alpha_1} (dx) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 d\alpha_2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1^2}, \\ \delta^2 y &= \frac{d}{d\alpha_2} (\delta y) d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2^2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_2^2}. \end{aligned}$$

Подставляя въ уравненіе (8) вмѣсто  $h_1, h_2$  и ихъ производныхъ значенія, выведенныя изъ послѣднихъ формулъ, и опуская общій знаменатель  $d\alpha_1 d\alpha_2$ , находимъ:

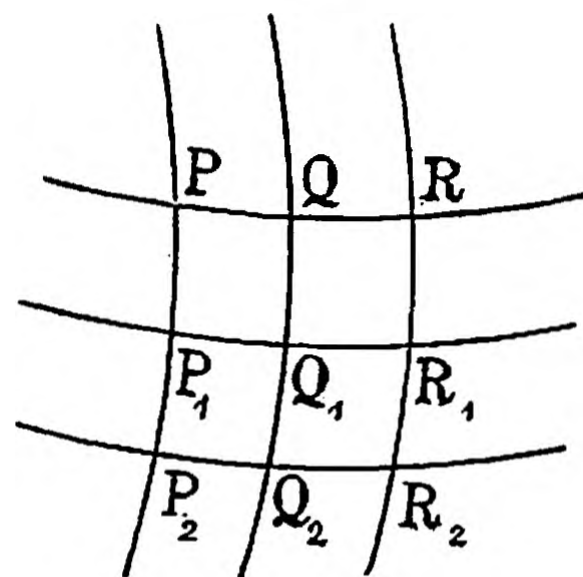
$$\frac{d^2 x}{y} + \frac{\delta^2 y}{x} - \frac{dy dx}{y^2} - \frac{\delta y \delta x}{x^2} = 0,$$

или

$$x^2 y d^2 x + y^2 x \delta^2 y - x^2 dy dx - y^2 \delta y \delta x = 0. \quad (9)$$

Перемѣнныя  $\alpha_1, \alpha_2$ , постоянными приращеніями которыхъ опредѣляется законъ размѣщенія кривыхъ, образующихъ прямоугольники, произвольны. Значитъ, и самый законъ

этотъ также произволенъ: дѣйствительно, каковы бы ни были послѣдовательныя приращенія, приписываемыя переменнѣй, можно найти новую переменную, функцію отъ первой, соотвѣтственныя приращенія которой были бы равны между собою. Такимъ образомъ, уравненіе (9) выражаетъ общій законъ для сторонъ бесконечно-малыхъ криволинейныхъ прямоугольниковъ, какіе можно умѣстить на плоскости. Если предположить, что четыре смежныхъ прямоугольника (черт. 48) составлены



Черт. 48

линіями, размѣщенными такъ, что  $PQ = QR$ ,  $PP_1 = P_1P_2$ , то  $\delta x$  и  $dy$  будутъ по нулю, и уравненіе (9) приметъ видъ

$$xd^2x + y\delta^2y = 0. \quad (10)$$

Если предположить это уравненіе точнымъ при условіи равенства между смежными сторонами четырехъ прямоугольниковъ, къ которымъ оно относится, то изъ него, какъ слѣдствіе, вытекаетъ то болѣе общее уравненіе, изъ котораго оно было выведено само и которому такимъ образомъ оно является равносильнымъ. Въ самомъ дѣлѣ, для доказательства допускаемъ, что это уравненіе (10) удовлетворяется для четырехъ бесконечно-близкихъ прямоугольниковъ (черт. 48) при условіи  $QR = PQ = x$ ,  $P_2P_1 = P_1P = y$ . Пусть при иномъ размѣщеніи кривыхъ  $QR = x + \delta x$ ,  $P_2P_1 = y + dy$ ; тогда  $d^2x$  и  $\delta^2y$  измѣнятся по значенію и не трудно вычислить измѣненіе каждаго изъ нихъ. Дѣйствительно, если  $P_2Q_2$  замѣнить линіей той же системы, пересѣкающей  $PP_1$  на разстояніи  $dy$  отъ точки  $P_2$ , то вытекающее отсюда увеличеніе для  $P_2Q_2$  есть какъ разъ то измѣненіе, которому подвергается  $d^2x$ ; но замѣчая, что линія  $PQ$  возрастаетъ на  $dx$ , когда  $P$  перемѣщается въ  $P_1$ , пробѣгая отрѣзокъ, равный  $y$ , выводимъ, что при перемѣщеніи, равномъ  $dy$ , она возрастетъ на  $\frac{dx dy}{y}$ ; слѣдовательно, новое значеніе  $d^2x$  равно прежнему, входящему въ уравненіе (10), увеличенному на  $\frac{dx dy}{y}$ , и для преобразованія этого уравненія мы должны замѣнить  $d^2x$  черезъ  $d^2x - \frac{dx dy}{y}$ . Такъ же увидимъ, что  $\delta^2y$  должно замѣнить черезъ  $\delta^2y - \frac{\delta x \delta y}{x}$ , и уравненіе (10) приметъ видъ

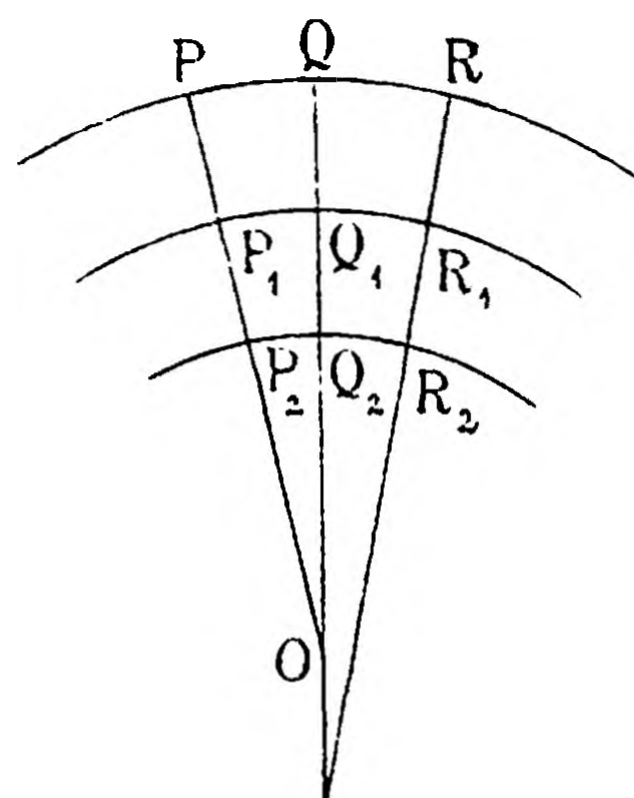
$$xd^2x + y\delta^2y - \frac{xdx dy}{y} - \frac{y\delta x \delta y}{x} = 0, \quad (11)$$

т.-е. станетъ равносильнымъ уравненію (9).



Только-что изложенное нами замѣчаніе можно было бы представить въ аналитическомъ видѣ и связать съ теоріею измѣненія независимой переменнѣй.

§ 515. Въ справедливости уравненія (9) можно легко убѣдиться въ томъ случаѣ, когда линіи одной изъ системъ—прямая; линіи другой системы будутъ тогда (черт. 49)



Черт. 49

кривыя параллельныя, и двѣ какія-угодно изъ нихъ отсѣкутъ на прямыхъ, которыя къ нимъ нормальны, равные отрѣзки.

Разсматриваемъ въ этомъ случаѣ три смежныхъ прямоугольника, стороны которыхъ входятъ въ формулу. Будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} PQ &= x, & QR &= x + \delta x, \\ PP_1 &= y, & \delta y &= 0, & \delta^2 y &= 0, & P_1P_2 &= y + dy, \\ P_1Q_1 &= x + dx, & P_2Q_2 &= x + 2dx + d^2x, \end{aligned}$$

и уравненіе принимаетъ видъ

$$xd^2x - x \frac{dx dy}{y} = 0,$$

или

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{dy}{y},$$

что, очевидно, точно, такъ какъ длина  $x$  пропорціональна разстоянію до точки  $O$ , гдѣ пересѣкаются двѣ содержащія ее прямая и, слѣдовательно, ея приращенія пропорціональны измѣненіямъ этого разстоянія. Такимъ образомъ, если перемѣщенію  $y$  точки  $P$  соотвѣтствуетъ измѣненіе  $dx$ , то второму перемѣщенію, равному  $y + dy$  будетъ соотвѣтствовать измѣненіе  $dx + \frac{dy dx}{y}$ , и мы имѣемъ:

$$d^2x = \frac{dy dx}{y}.$$

Можно этому разсужденію придать болѣе аналитическій видъ, исходя изъ уравненія (8), равносильнаго въ сущности тому, которымъ мы только-что пользовались. Такъ

какъ въ интересующемъ насъ случаѣ разстояніе между двумя кривыми первой системы постоянно, то  $\frac{1}{h_1}$  не зависитъ отъ  $\alpha_2$ , и уравненіе (8) приводится къ

$$h_1 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1^2} - h_1^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_1} \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1} = 0,$$

или

$$\frac{\frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1^2}}{\frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1}} = \frac{\frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_1}}{\left( \frac{1}{h_1} \right)}.$$

Оно выражаетъ, что  $\frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1}$  и  $\frac{1}{h_1}$  имѣютъ одну и ту же производную по  $\alpha_1$  и что, слѣдовательно, отношеніе

$$\frac{\frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1}}{\frac{1}{h_1}} \quad (A)$$

не зависитъ отъ  $\alpha_1$  и остается постояннымъ для даннаго значенія  $\alpha_1$ . Чтобы представить этотъ результатъ геометрически, рассмотримъ двѣ смежныя прямыя, соответствующія параметрамъ  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 + d\alpha_2$ ;  $\frac{d\alpha_1}{h_1}$  есть длина, отложенная на одной изъ нихъ и измѣряющая разстояніе между двумя кривыми, пересѣкающими эту прямую подъ прямымъ угломъ. Разстояніе между двумя прямыми въ рассматриваемой точкѣ есть  $\frac{d\alpha_2}{h_2}$  и, слѣдовательно, пропорціонально  $\frac{1}{h_2}$ ; сказать, что отношеніе (A) постоянно, равносильно очевидно—точному выраженію, что приращеніе разстоянія прямыхъ пропорціонально перемѣщенію, въ направленіи ихъ длины, той точки, въ которой измѣряется это разстояніе.

#### ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫРАЖЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ

**§ 516.** Изученіе бесконечно-малой дуги, взятой на кривой, было бы такъ же трудно, какъ и изученіе конечной дуги, и разнообразіе результатовъ, параллельное разнообразію частныхъ опредѣленій рассматриваемыхъ кривыхъ, лишило бы насъ всякой возможности предвидѣть общую теорію, если бы при вычисленіи величинъ мы не имѣли бы права пренебрегать нѣкоторыми количествами. Наоборотъ, извѣстно, что при вычисленіи бесконечно-малой величины можно, безъ всякаго неудобства, пренебречь бесконечно-малою частью ея значенія; слѣдовательно, когда мы ищемъ выраженіе для бесконечно-малой первой порядка, мы отбрасываемъ бесконечно-малыя

второго порядка; при вычислении бесконечно-малой второго порядка отбрасываемъ бесконечно-малыя третьяго порядка, и т. д. Притомъ можно, при вычислении одной и той же величины, прибѣгать послѣдовательно къ этимъ различнымъ степенямъ приближенія. Въ самомъ дѣлѣ, вычисливъ приближенное значеніе, которое можетъ замѣнить бесконечно-малую величину нѣкотораго порядка и которое называютъ ея *главною частью*, мы можемъ предложить себѣ задачу — вычислить допущенную при этомъ ошибку; она будетъ, вообще говоря, второго порядка, и въ ея выраженіи мы откинемъ бесконечно-малыя третьяго порядка; но, найдя ее, мы можемъ искать выраженія ошибки, допущенной при этомъ второмъ вычисленіи, и продолжать такъ неопредѣленно далеко, составляя послѣдовательные члены бесконечнаго разложенія, которое только одно и могло бы представить точно неизвѣстное количество. Это какъ разъ то, что мы уже видѣли (§ 277), развертывая функцію по теоремѣ Тейлора.

**§ 517. Разность между бесконечно-малою дугою и ея хордою.** — Разность между дугою и ея хордою есть бесконечно-малая третьяго порядка; мы отыщемъ ея выраженіе, пренебрегая бесконечно-малыми четвертаго порядка, и ли, что, очевидно, то же самое, составимъ первый членъ ея разложенія въ рядъ по степенямъ дуги.

Беремъ за оси координатъ касательную и нормаль въ одномъ изъ концовъ рассматриваемой дуги. Принимая длину  $s$  дуги за независимую переменную, отъ которой координаты  $x$  и  $y$  являются двумя функціями, имѣемъ, при  $s = 0$ ,

$$x = 0, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = 1;$$

кромѣ того, для всякой точки

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

откуда, дифференцируя, выводимъ:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} &= 0, \\ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \frac{dx}{ds} \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{dy}{ds} \frac{d^3y}{ds^3} &= 0, \end{aligned}$$

и если въ этихъ уравненіяхъ, справедливыхъ при всякомъ значеніи  $s$ , положить  $s = 0$  и принять во вниманіе предыдущія равенства, то найдемъ:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 &= 0, \\ \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 &= -\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0. \end{aligned}$$

Вспоминаемъ наконецъ формулу

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

которая при  $s = 0$  является, въ силу предыдущихъ равенствъ, въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{1}{\rho_0^2} = \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2 = -\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0;$$

эти уравненія даютъ возможность рѣшить легко какъ предложенный вопросъ, такъ и много другихъ, аналогичныхъ ему.

Теорема Маклорена даетъ:

$$x = s + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0 + \dots = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} + \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{1.2} \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_0 + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots,$$

откуда заключаемъ:

$$x^2 + y^2 = s^2 - \frac{s^4}{3\rho_0^2} + \frac{s^4}{4\rho_0^2} + \dots = s^2 - \frac{s^4}{12\rho_0^2} + \dots;$$

здѣсь не выписаны члены, содержащіе множителемъ пятую степень  $s$ . Называя черезъ  $c$  хорду дуги  $s$ , можемъ это уравненіе написать такъ:

$$s^2 - c^2 = \frac{s^4}{12\rho_0^2} - \dots,$$

или

$$s - c = \frac{s^4}{12\rho_0^2(s + c)} - \dots$$

Сумму  $s + c$  можемъ, очевидно, замѣнить черезъ  $2s$  и тогда, наконецъ, для выраженія главной части  $s - c$ , имѣемъ:

$$s - c = \frac{s^3}{24\rho_0^2}.$$

Мы видимъ, что ясно и а priori, что для одного и того же отрѣзка дуги разность его съ хордою увеличивается вмѣстѣ съ кривизною.

**§ 518. Разность между угломъ, составляемымъ хордою съ касательною, и половиною угла смежности.**—Принимая обозначенія предыдущаго параграфа, замѣчаемъ, что тангенсъ угла, составляемаго хордою дуги съ осью  $x$ -овъ, касательною къ этой послѣдней въ ея концѣ, равенъ  $\frac{y}{x}$ . Уголъ смежности, составляемый съ тою же осью  $x$ -овъ касательною въ другомъ концѣ дуги, имѣетъ своимъ тангенсомъ  $\frac{dy}{dx}$ . Такъ какъ разность двухъ бесконечно-малыхъ угловъ можно замѣнить разностью ихъ тангенсовъ, то искомая разность выразится черезъ

$$\frac{dy}{dx} - 2 \frac{y}{x}.$$

Но

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} + \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots,$$

и, значитъ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{s}{\rho_0} + \frac{s^2}{2} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots}{1 - \frac{s^2}{2\rho_0^2} + \dots},$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{s}{2\rho_0} + \frac{s^2}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots}{1 - \frac{s^2}{6\rho_0^2} + \dots}.$$

Для нашей цѣли достаточно сохранить въ разложеніяхъ члены, содержащіе множителемъ  $s^2$ ; при этой степени приближенія можно знаменателей замѣнить единицами, и мы будемъ имѣть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{\rho_0} + s^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 \right],$$

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{2\rho_0} + s^2 \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 \right];$$

слѣдовательно,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \frac{s^2}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0.$$

Изъ уравненія

$$\left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

выводимъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds};$$

полагая  $s=0$  и принимая во вниманіе написанныя выше уравненія, находимъ:

$$\left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{dy}{dx} - 2 \left( \frac{y}{x} \right) = -\frac{s^2}{6\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0.$$

Такова главная часть разности между тангенсомъ угла смежности и удвоеннымъ тангенсомъ угла, составляемаго хордою съ касательною. Тангенсы, очевидно, можно замѣнить углами и, слѣдовательно, задача рѣшена. Когда кривая представляетъ кругъ, радіусъ кривизны постояненъ,  $\frac{d\rho}{ds}$  обращается въ нуль и самая разность приводится къ нулю, какъ и надо было ожидать.

Такъ какъ уголъ смежности строго равенъ суммѣ угловъ, составляемыхъ хордою съ крайними касательными, то его избытокъ надъ какимъ-либо удвоеннымъ угломъ, входящимъ въ эту сумму, равенъ разности между обоими углами рассматриваемой суммы; значитъ,

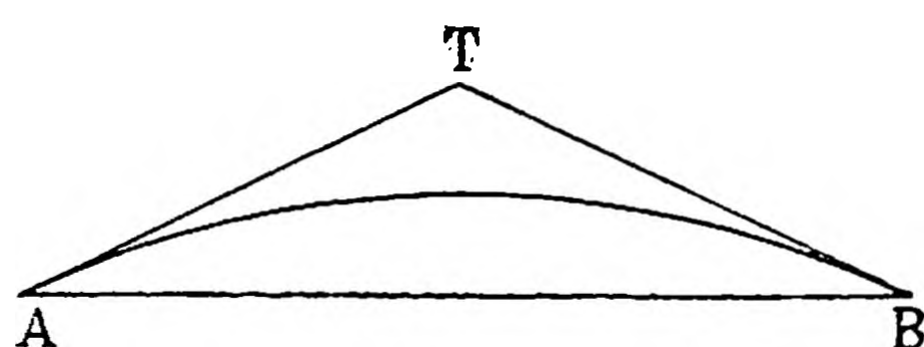
$$-\frac{s^2}{6\rho^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)$$



представить разность угловъ, составляемыхъ хордою дуги  $s$  съ касательными въ ея концахъ. Когда  $\frac{d\rho}{ds}$  положительно, уголъ смежности меньше удвоеннаго того изъ двухъ угловъ, который имѣетъ вершину въ началѣ дуги, и который, слѣдовательно, является наибольшимъ изъ двухъ.

Разность касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ дуги и оканчивающихся въ точкѣ ихъ встрѣчи

§ 519. Пусть  $AT$  и  $BT$  будутъ касательныя (черт. 50) въ концахъ безконечно-малой дуги  $AB$ , которую мы назовемъ черезъ  $s$ . Требуется вычислить разность



Черт. 50

$AT - BT$ , которая, очевидно, является безконечно-малою второго порядка. Треугольникъ  $ABT$  даетъ:

$$\frac{AT}{BT} = \frac{\sin B}{\sin A},$$

$$\frac{AT - BT}{BT} = \frac{\sin B - \sin A}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(B - A) \cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin A}.$$

Въ первой части этого уравненія можно, очевидно, замѣнить знаменатель  $BT$  черезъ  $\frac{1}{2}s$ , а во второй—множитель  $\cos \frac{1}{2}(A + B)$  единицею, знаменатель  $\sin A$  сначала черезъ  $A$ , а затѣмъ половиною угла смежности  $\frac{s}{\rho}$ , и, наконецъ,  $\sin \frac{B - A}{2}$  черезъ  $\frac{1}{2}(B - A)$ ; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{2(AT - BT)}{s} = \frac{(B - A)\rho}{s},$$

$$AT - BT = \frac{\rho}{2}(B - A) = -\frac{s^2}{12\rho} \frac{d\rho}{ds}.$$

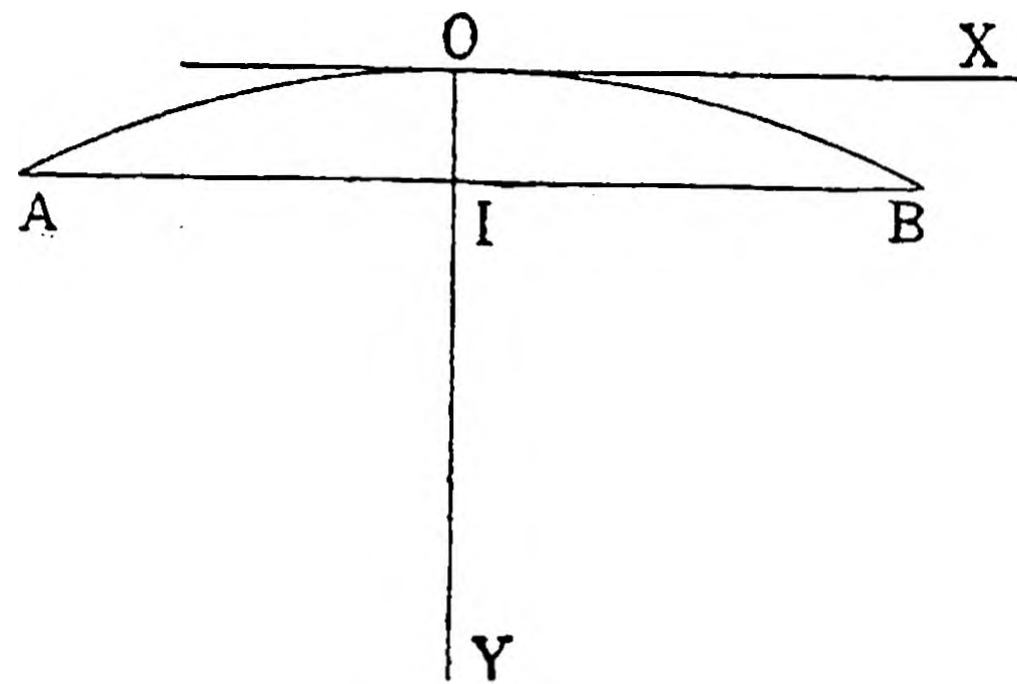
§ 520. Разность между двумя отрѣзками, образуемыми нормалью на безконечно-малой хордѣ, перпендикулярной къ этой нормали.

Пусть  $AB$  будетъ (черт. 51) безконечно-малая дуга, и  $OX$ —та изъ ея касательныхъ, которая параллельна хордѣ  $AB$ . Принимаемъ прямую  $OX$  за ось  $X$ -овъ, а перпендикуляръ  $OY$  за ось  $Y$ -овъ; отсчитывая дугу  $s$  отъ начала  $O$ , видимъ,

что координаты  $x, y$  ея конца опредѣлятся, какъ въ предыдущихъ параграфахъ, формулами

$$x = s - \frac{s^2}{6\rho_0^2} + \dots, \quad (1)$$

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots \quad (2)$$



Черт. 51

Пусть  $s_1$  и  $s_2$  обозначаютъ длины дугъ  $OA$  и  $OB$ ; формула (2) должна дать одно и то же значеніе для  $y$  при  $s = s_1$ ,  $s = -s_2$ . Поэтому пишемъ:

$$\frac{s_1^2}{2\rho_0} + \frac{s_1^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 = \frac{s_2^2}{2\rho_0} - \frac{s_2^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0;$$

дѣлая переносъ членовъ и дѣля затѣмъ обѣ части на  $s_1 + s_2$ , получаемъ:

$$\frac{s_2 - s_1}{2\rho_0} = \frac{s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0.$$

Такъ какъ разность  $s_1 - s_2$ , по этой самой формулѣ, является бесконечно-малою относительно каждой изъ двухъ дугъ, то во второй части можно  $s_1^2 - s_1s_2 + s_2^2$  замѣнить черезъ  $s_1^2$ ; слѣдовательно,

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{3} s_1^2 \rho_0 \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0.$$

Но мы нашли (§ 518), что  $\left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0$ ; значить, окончательно

$$s_2 - s_1 = -\frac{1}{3} \frac{s_1^2}{\rho_0} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0.$$

Если ось  $Y$ -овъ пересѣкаетъ хорду  $AB$  въ точкѣ  $I$ , то, отбрасывая бесконечно-малыя третьяго порядка, имѣемъ:

$$s_1 = BI, \quad s_2 = AI$$

и, слѣдовательно,

$$AI - BI = -\frac{s_1^2}{3\rho_0} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0.$$

Таково выраженіе разности  $AI - BI$ , если пренебечь бесконечно-малыми третьяго порядка.

§ 521. Разстояніе кривой до ея круга кривизны. — Относя кривую къ касательной и къ нормали въ одной изъ ея точекъ, принятой въ то же время за начало дугъ, мы нашли для координатъ точки ряды:

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} \dots,$$

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \frac{s^3}{6} \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 + \dots,$$

и такъ какъ  $\left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0$  равно  $-\frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0$  (§ 518), то оно обращается въ нуль, если рассматриваемая кривая представляетъ кругъ; слѣдовательно, относя какую-угодно кривую и ея кругъ кривизны къ ихъ общей касательной, будемъ имѣть: для кривой

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} - \frac{s^3}{6\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0 + \dots$$

и для круга

$$y = \frac{s^2}{2\rho_0} + \dots,$$

при чемъ не выписанные въ обѣихъ строкахъ члены — порядка выше третьяго. Отсюда вытекаетъ, что разность ординатъ, соотвѣствующихъ одному и тому же значенію  $s$ , третьяго порядка и равна  $-\frac{s^3}{6\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0$ ; формула

$$x = s - \frac{s^3}{6\rho_0^2} + \dots,$$

кромѣ того, показываетъ, что разность абсциссъ — не ниже четвертаго порядка и что, слѣдовательно, если пренебечь безконечно-малыми четвертаго порядка, то можно обѣ ординаты рассматривать, какъ отвѣчающія одной и той же абсциссѣ. Формула

$$-\frac{s^3}{6\rho_0^2} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)_0 = \frac{s^3}{6} \left( \frac{d\left( \frac{1}{\rho} \right)}{ds} \right)_0$$

выражаетъ такимъ образомъ разстояніе конца дуги  $s$  до круга кривизны, соотвѣствующаго другому концу, при чемъ это разстояніе отсчитано перпендикулярно къ общей касательной для кривой и для круга и, очевидно, можетъ быть замѣнено разстояніемъ, отсчитаннымъ нормально къ кругу, которое отличается отъ перваго лишь на безконечно-малую часть любого изъ нихъ.

#### ТЕОРІЯ ЭВОЛЮТЪ

§ 522. Когда касательными одной кривой являются нормали другой, то первая изъ нихъ называется *эволютой* второй. По этому опредѣленію данная кривая имѣетъ всегда эволюту и притомъ только одну, которая представляетъ (§ 104) геометрическое мѣсто пересѣченій каждой нормали съ безконечно ей близкою нормалью и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто центровъ кривизны данной кривой, которая по отно-

шенію къ своей эволютѣ носитъ названіе *эвольвенты*. Эволюта кривой даетъ всѣ радіусы кривизны послѣдней, такъ какъ каждый изъ нихъ, очевидно, равенъ отрѣзку нормали, заключенному между точкою ся касанія къ эволютѣ и данною кривою. Такимъ образомъ мы видимъ, какъ теорія эволютъ, созданная Гюйгенсомъ (Huyghens) независимо отъ разсмотрѣнія радіусовъ кривизны, тѣсно, однако, связана съ предметомъ этой главы и должна естественно найти здѣсь свое мѣсто.

Когда уравненіе кривой дано, то теорія огибающихъ даетъ возможность получить уравненіе эволюты. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $t$  и  $u$  обозначаютъ координаты точекъ нормали, проведенной въ точкѣ кривой, имѣющей координатами  $x$  и  $y$ ; имѣемъ:

$$(x - t) + (y - u) \frac{dy}{dx} = 0; \quad (1)$$

$y$  и  $\frac{dy}{dx}$  являются здѣсь данными функціями отъ  $x$ ; чтобы получить огибающую прямыхъ, представляемыхъ этимъ уравненіемъ, нужно исключить переменную  $x$  между уравненіемъ (1) и его производною, взятою по  $x$ ,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - u) \frac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad (2)$$

такъ какъ  $y$  разсматривается въ уравненіяхъ (1) и (2), какъ функція отъ  $x$ , определяемая уравненіемъ кривой, то алгебраическое дѣйствіе, дающее уравненіе эволюты, будетъ, очевидно, состоятъ въ исключеніи  $x$  и  $y$  между уравненіями (1) и (2) и уравненіемъ данной кривой, послѣ предварительной, конечно, замѣны  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ихъ значеніями въ  $x$  и  $y$ .

**§ 523.** Названіе *эволютъ* (*развертываемыхъ*), данное интересующимъ насъ кривымъ, напоминаетъ одно важное свойство, уже доказанное (§ 22) и которое мы сейчасъ докажемъ снова, выводя его изъ предыдущихъ формулъ.

*Дуга эволюты равна разности радіусовъ кривизны въ крайнихъ точкахъ соответственной дуги эвольвенты.*

Дѣйствительно, пусть

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

будетъ уравненіе круга кривизны въ нѣкоторой точкѣ кривой. Дифференцируемъ это уравненіе, принимая  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$  за переменныя, а  $x$  и  $y$  за координаты, также переменныя, точки касанія кривой съ кругомъ. Находимъ:

$$(x - \alpha)(dx - d\alpha) + (y - \beta)(dy - d\beta) = RdR. \quad (2)$$

Дифференцируемъ теперь уравненіе (1), принимая  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$  за постоянныя, при чемъ  $dx$  и  $dy$  будутъ относиться къ безконечно-малому перемѣщенію по кругу, принимаемому за неподвижный; будемъ имѣть:

$$(x - \alpha)dx + (y - \beta)dy = 0. \quad (3)$$

Сравненіе уравненій (2) и (3) дастъ намъ доказательство высказанной теоремы, но

не бесполезно будетъ остановиться на значеніи каждаго изъ нихъ, указавъ возможно точнѣе смыслъ, какой должно придавать входящимъ въ нихъ дифференціаламъ. Уравненіе (1) имѣетъ мѣсто для какой-угодно точки какого-угодно изъ соприкасающихся круговъ. Когда мы остаемся на одномъ и томъ же кругѣ,  $x$  и  $y$  являются переменными, а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$ —постоянными; это мы предполагали при полученіи уравненія (3). Наоборотъ,  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $R$  всѣ—переменные, когда переходимъ отъ одного круга къ другому, смежному съ нимъ; но въ этомъ второмъ случаѣ мы имѣемъ двѣ независимыхъ переменныхъ и отношенія дифференціаловъ будутъ опредѣленными только тогда, когда  $x$  и  $y$  мы подчинимъ новому условію—постоянно представлять собою точку касанія круга и кривой. При этомъ второмъ предположеніи было выполнено дифференцированіе, давшее намъ уравненіе (2). Согласно этимъ объясненіямъ  $dx$  и  $dy$  являются дифференціалами координатъ точки касанія кривой и соприкасающагося круга, перемѣщающейся, въ уравненіи (2), по кривой и, въ уравненіи (3), по кругу; въ обоихъ случаяхъ они представляютъ (§ 47) перемѣщеніе по общей касательной и, слѣдовательно, равны. Сравненіе уравненій (2) и (3) даетъ:

$$-(x - \alpha)d\alpha - (y - \beta)d\beta = RdR, \quad (4)$$

или

$$\frac{x - \alpha}{R} d\alpha + \frac{y - \beta}{R} d\beta = -dR. \quad (5)$$

Такъ какъ  $R$  есть разстояніе между двумя точками, координаты которыхъ соотвѣтственно  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , то отношенія  $\frac{x - \alpha}{R}$ ,  $\frac{y - \beta}{R}$  выразятъ косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями линіею, соединяющею эти двѣ точки и представляющею собою нормаль къ данной кривой, а, слѣдовательно, и касательную къ эволютѣ. Если  $\sigma$  обозначаетъ дугу послѣдней кривой, то эти косинусы равны  $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ ,  $\frac{d\beta}{d\sigma}$ , и уравненіе (5) принимаетъ видъ

$$d\alpha \frac{d\alpha}{d\sigma} + d\beta \frac{d\beta}{d\sigma} = -dR,$$

или, вслѣдствіе равенства  $d\alpha^2 + d\beta^2 = d\sigma^2$ ,

$$d\sigma = -dR,$$

или, наконецъ,

$$d(R + \sigma) = 0,$$

откуда заключаемъ, что

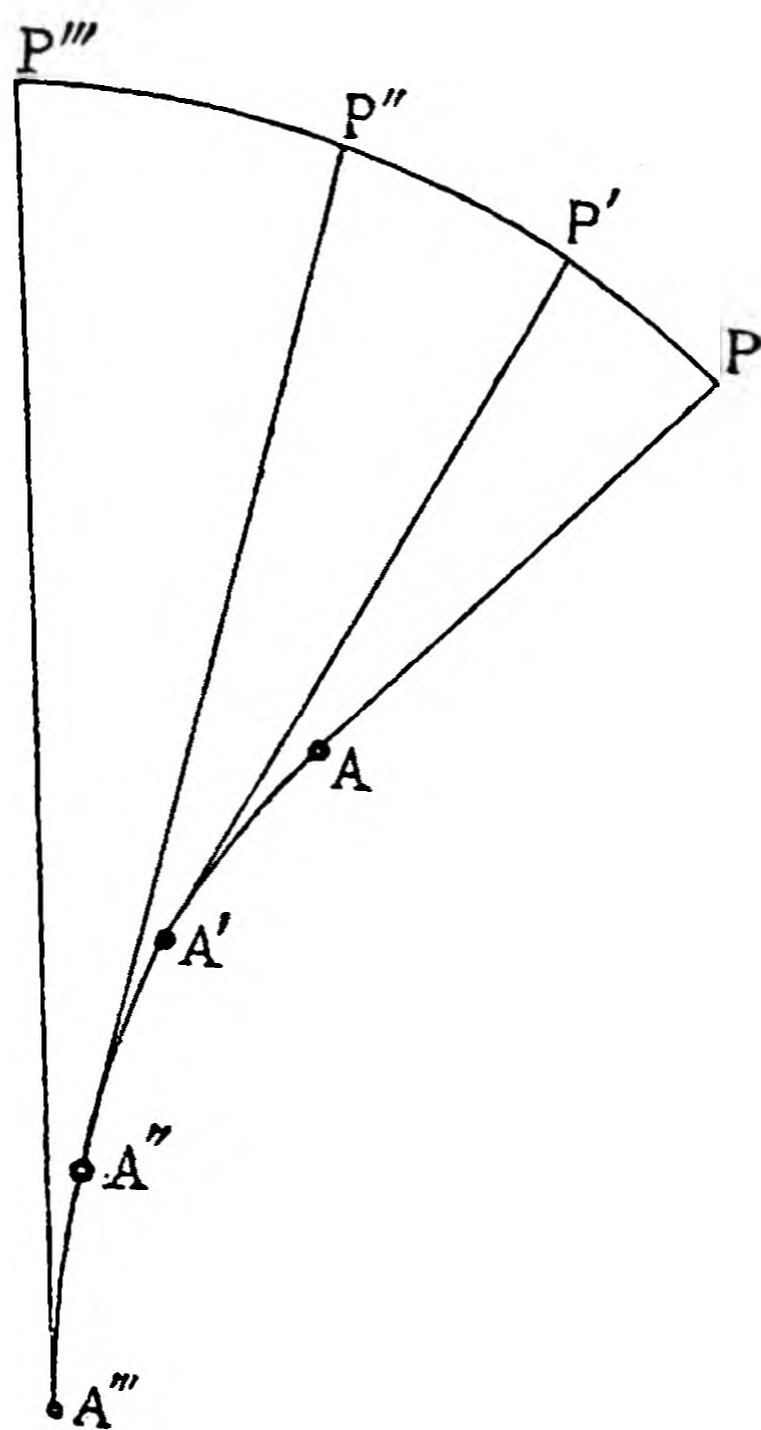
$$R + \sigma = \text{пост.}$$

Радиусъ кривизны, сложенный съ дугою  $\sigma$ , начало которой остается неопредѣленнымъ, даетъ, такимъ образомъ, постоянную сумму; слѣдовательно, дуга, взятая между двумя точками эволюты, равна разности радиусовъ кривизны, соотвѣтствующихъ этимъ двумъ точкамъ.

§ 524. Какая-угодно плоская кривая можетъ быть описана концомъ нити, накрутой на ея эволюту, если ее развертывать, укрѣпивъ другой конецъ неподвижно.



Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ (черт. 52) кривая  $PP'P''P'''$  и ея эволюта  $AA'A''A'''$ ; вообразимъ нить, неподвижнымъ концомъ укрѣпленную въ  $A'''$  и наведенную вначалѣ



Черт. 52

на дугу  $A'''A''A'A$ ; изъ точки  $A$  она направлена по касательной къ эволютѣ и оканчивается въ  $P$  на эвольвентѣ. Развертываемъ теперь эту нить, не измѣняя ея длины, такимъ образомъ, что, когда наведенная часть уменьшается, прямолинейная ея часть на столько же увеличивается, такъ что сумма ихъ все время остается постоянною; замѣчая, что криволинейная часть равна дугѣ, которую мы обозначили черезъ  $\sigma$ , заключаемъ, что прямолинейная часть будетъ постоянно равна радіусу кривизны  $R$  и, слѣдовательно, конецъ нити пробѣжитъ кривую  $PP'P''$ , для которой  $AA'A''$  служитъ эволютою.

§ 525. Этотъ способъ чертить эвольвенту при помощи эволюты показываетъ ясно, почему соприкасающійся кругъ пересѣкаетъ вообще кривую въ точкѣ прикосновенія.

Въ самомъ дѣлѣ, обращаемся къ предыдущей фигурѣ и рассматриваемъ три смежныхъ положенія нити, конецъ которой описываетъ кривую  $PP'P''$ ; по самому опредѣленію движенія нити имѣемъ:

$$AA' + AP = A'P';$$

слѣдовательно,  $A'P'$  длиннѣе прямолинейнаго разстоянія точки  $A'$  до точки  $P$  и эта послѣдняя входитъ, такимъ образомъ, внутрь круга, описаннаго изъ  $A'$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $A'P'$ . Также имѣемъ:

$$A''A' + A'P' = A''P''.$$

Но  $A''P''$  меньше суммы  $A'P'' + A'A''$ ; значитъ,  $A'P''$  больше  $A'P'$  и точка  $P''$  окажется внѣ круга, описаннаго изъ  $A'$ , какъ изъ центра, радіусомъ  $A'P'$ . Этотъ кругъ,

представляющій точно соприкасающійся кругъ кривой  $PP'P''$  въ точкѣ  $P'$ , имѣетъ точку  $P$  внутри, а точку  $P''$  внѣ своей окружности, и, такимъ образомъ, пересѣкаетъ очевидно эту кривую, что уже было показано раньше въ § 496-мъ.

§ 526. Изъ предыдущей теоремы заключаемъ, что всякая кривая съ постоянною кривизною есть кругъ. Дѣйствительно, такъ какъ дуга эволюты равна разности радиусовъ кривизны, соответствующихъ ея крайнимъ точкамъ, то она постоянно равна нулю, когда радиусъ кривизны постояненъ; слѣдовательно, эволюта приводится къ точкѣ, а отсюда ясно, что кривая представляетъ кругъ.

#### Примѣры эволютъ

§ 527. Эволюта эллипса.—Пусть

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

будетъ уравненіе эллипса; изъ него выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3};$$

координаты центра кривизны даются уравненіями

$$(x - \alpha) + (y - \beta) \frac{dy}{dx} = 0, \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

слѣдовательно,

$$x - \alpha = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{a^4b^2}, \\ y - \beta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}.$$

Если, пользуясь уравненіемъ эллипса, исключить  $y$  изъ перваго изъ этихъ уравненій и затѣмъ  $x$  изъ втораго, то, полагая  $a^2 - b^2 = c^2$ , находимъ:

$$x^3 = \frac{a^4\alpha}{c^2}, \quad y^3 = -\frac{b^4\beta}{c^2};$$

получая отсюда  $x$  и  $y$  и подставляя ихъ въ уравненіе эллипса, окончательно имѣемъ:

$$b^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Эта кривая состоитъ изъ четырехъ вѣтвей, симметрично расположенныхъ относительно осей координатъ, и имѣетъ четыре точки возврата, которыми будутъ точки ея встрѣчи съ осями.

§ 528. Эволюта кривой, заданной уравненіемъ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

Изъ этого уравненія выводимъ:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}, \quad (3)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}. \quad (4)$$

Слѣдовательно, координаты  $\alpha$ ,  $\beta$  центра кривизны выразятся формулами

$$\alpha = x + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \frac{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad (5)$$

$$\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}. \quad (6)$$

Отсюда легко заключаемъ:

$$\alpha + \beta = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \quad (7)$$

$$\alpha - \beta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3; \quad (8)$$

значитъ,

$$\begin{aligned} 2x^{\frac{1}{3}} &= (\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{1}{3}}, \\ 2y^{\frac{1}{3}} &= (\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}} - (\alpha - \beta)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Исключеніе  $x$  и  $y$  между этими уравненіями и даннымъ даетъ непосредственно:

$$\left[(\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{1}{3}}\right]^2 + \left[(\alpha + \beta)^{\frac{1}{3}} - (\alpha - \beta)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = 4a^{\frac{2}{3}},$$

или

$$(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

Если измѣнить оси координатъ, повернувъ ихъ на  $\frac{\pi}{4}$  вокругъ начала, то это уравненіе измѣнится въ

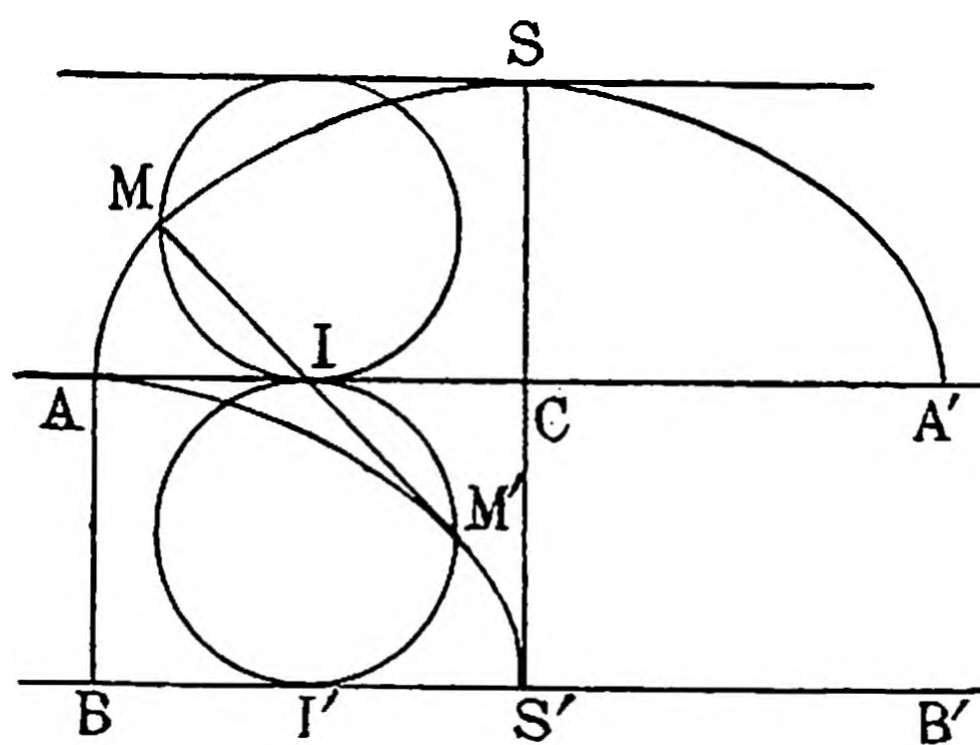
$$\alpha'^{\frac{2}{3}} + \beta'^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}},$$

гдѣ  $\alpha'$ ,  $\beta'$  обозначаютъ координаты относительно новыхъ осей; видъ этого результата показываетъ ясно, что данная кривая подобна своей эволютѣ и притомъ двойныхъ размѣровъ.

Не трудно догадаться, что кривая, для которой мы только-что получили эволюту, есть эпициклоида, производимая кругомъ, катящимся внутри другого круга четверного радіуса, и мы увидимъ, что свойство быть подобнымъ своей эволютѣ принадлежитъ всѣмъ эпициклоидамъ.

§ 529. Эволюта циклоиды. — Знаніе радіуса кривизны циклоиды въ каждой изъ ея точекъ даетъ возможность опредѣлить легко ея эволюту.

Пусть  $АМА'$  будетъ (черт. 53) циклоида,  $М$ —одна изъ ея точекъ и  $MI$ —соотвѣт-



Черт. 53

ственное положеніе производящаго круга. Такъ какъ радіусъ кривизны вдвое (§ 504) болѣе  $MI$ , то, если подъ  $AA'$  описать кругъ, равный производящему и касающийся  $AA'$  въ точкѣ  $I$ , пересѣченіе  $M'$  этого круга съ продолженіемъ  $MI$  представить центръ кривизны, и геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $M'$  будетъ эволюта. Пусть  $S'$  обозначаетъ центръ, соотвѣтствующій вершинѣ  $S$  и, очевидно, расположенный на прямой  $BB'$ , параллельной  $AA'$  и касательной къ кругу  $II'$ . Не трудно видѣть, что этотъ кругъ, катясь по  $BB'$ , дастъ точно эволюту  $S'M'A$ , если описывающая ее точка вначалѣ находится въ  $S'$ . Дѣйствительно, называя черезъ  $B$  проекцію точки  $A$  на  $BB'$ , имѣемъ:

$$BS' = AC = I'M'I,$$

$$BI' = AI = \text{arc } IM = \text{arc } IM';$$

слѣдовательно,

$$I'S' = I'M'I - IM' = I'M',$$

а это показываетъ, что описывающая эволюту точка, находясь вначалѣ въ  $S'$ , перемѣстится вслѣдствіе движенія катящагося круга въ  $M'$ , когда этотъ послѣдній коснется прямой въ  $I'$ .

Не трудно дать аналитическое опредѣленіе эволюты, исходя изъ уравненія циклоиды, и мы не станемъ на этомъ останавливаться; укажемъ лишь изящный способъ достигъ этого при помощи особенной системы координатъ, вводимой съ большою пользою при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ.

§ 530. Кривая, въ этой системѣ, характеризуется соотношеніемъ, связывающимъ радіусъ кривизны съ угломъ между нормалью и нѣкоторымъ неподвижнымъ направ-

леніемъ. Переходъ отъ такихъ уравненій къ обычнымъ потребовалъ бы рѣшенія задачи изъ интегральнаго исчисленія, чего мы не можемъ сдѣлать здѣсь. Покажемъ лишь непосредственно, что кривая опредѣлена, если извѣстенъ, для каждаго направленія нормали, соответственный радіусъ кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, если остановить свое вниманіе на дугѣ, заключенной между двумя нормальми данныхъ направленій, то для каждаго промежуточнаго направленія мы будемъ знать длину соответственной дуги эволюты, для опредѣленія которой нужно будетъ рѣшить слѣдующую задачу: изогнуть нить извѣстной длины такъ, чтобы направленіе каждаго элемента было назначено заранее. Рѣшеніе, очевидно, единственное, если выбрано начало, и кривыя, отнесенныя къ различнымъ началамъ, наложимы одна на другую. Когда же опредѣлена эволюта, то равнымъ образомъ опредѣлена и первообразная кривая, такъ какъ зная радіусъ кривизны въ каждой точкѣ, мы будемъ знать и ту длину, какую нужно отложить на каждой касательной къ эволютѣ, чтобы имѣть соответственную точку эвольвенты.

Называя черезъ  $\varphi$  уголъ, составляемый нормалью къ циклоидѣ съ основаніемъ, и черезъ  $a$  радіусъ производящаго круга, имѣемъ для радіуса кривизны выраженіе

$$\rho = 4a \cos \varphi;$$

угломъ смежности эволюты является  $d\varphi$ ;  $d\rho$ —соответственная бесконечно-малая дуга; такимъ образомъ, радіусъ кривизны  $\rho'$  этой послѣдней будетъ

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 4a \sin \varphi.$$

Кромѣ того, называя черезъ  $\varphi'$  уголъ, составляемый нормалью къ эволютѣ съ тою же самою осью, имѣемъ:

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

и, слѣдовательно,

$$\rho' = 4a \cos \varphi'.$$

Отсюда видно, что эволюта имѣетъ то же уравненіе, что и циклоида и, значитъ, равна ей.

**§ 531.** Приложимъ тотъ же методъ къ эпициклоидѣ. По найденному уравненію (§ 506) для радіуса кривизны эпициклоиды безъ труда замѣчаемъ, что, называя черезъ  $\varphi$  уголъ, составляемый нормалью съ радіусомъ неподвижнаго круга, направленнымъ къ началу эпициклоиды, имѣемъ:

$$\rho = a \sin m\varphi;$$

такъ какъ  $a$  и  $m$ —постоянныя, то отсюда заключаемъ, что радіусъ  $\rho'$  эволюты, равный всегда  $\frac{d\rho}{d\varphi}$ , есть

$$\rho' = m a \cos m\varphi;$$



называя же черезъ  $\varphi'$  уголъ, составляемый съ тою же осью нормалью къ эволютѣ, имѣемъ:

$$\rho' = m a \cos m \left( \frac{\pi}{2} - \varphi' \right),$$

или, полагая

$$m \left( \frac{\pi}{2} - \varphi' \right) = \frac{\pi}{2} - m \varphi_1,$$

что приводитъ къ вращенію оси на уголъ  $\frac{m-1}{m} \frac{\pi}{2}$ , пишемъ:

$$\rho' = m a \sin m \varphi_1.$$

Чтобы вывести это уравненіе изъ даннаго, достаточно умножить на постоянный множитель выраженіе радіуса кривизны, а это какъ разъ то, что пришлось бы сдѣлать для полученія уравненія кривой, подобной данной. Такимъ образомъ, эволюта эпициклоиды—подобная эпициклоида, отношеніе подобія равно  $m$  и уголъ между подобными линіями въ обѣихъ фигурахъ есть  $\frac{m-1}{m} \frac{\pi}{2}$ .

§ 532. Эволюта логариѳмической спирали.—Уравненіе логариѳмической спирали въ полярныхъ координатахъ есть

$$r = a e^{m\theta}.$$

Радіусъ кривизны выражается формулою (§ 504)

$$\rho = a e^{m\theta} \sqrt{1 + m^2};$$

отсюда, какъ не трудно замѣтитъ, слѣдуетъ, что центръ кривизны находится на перпендикулярѣ, возставленномъ въ полюсѣ къ радіусу-вектору. Поэтому, обозначая черезъ  $r'$  и  $\theta'$  координаты центра кривизны, имѣемъ:

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + \frac{\pi}{2}, \\ r' &= \sqrt{\rho^2 - r^2} = m a e^{m\theta}; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$r' = m a e^{m \left( \theta' - \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Если повернуть полярную ось на уголъ  $\alpha$ , то, называя черезъ  $\theta''$  уголъ, составляемый радіусомъ-векторомъ съ новою полярною осью, имѣемъ:

$$r' = m a e^{m \left( \theta'' + \alpha - \frac{\pi}{2} \right)},$$

и если положить

$$m e^{m \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right)} = 1,$$

то это уравнение приводится къ уравненію

$$r' = ae^{m\theta''},$$

тождественному съ уравненіемъ данной кривой. Такимъ образомъ, эволюта логарифмической спирали наложима, подобно эволютѣ циклоиды, на самую кривую.

### Соприкосновенія различныхъ порядковъ

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ПОРЯДКА КАСАНІЯ

§ 533. Пусть двѣ кривыя представлены уравненіями вида

$$y = \varphi(x),$$

$$y = \psi(x);$$

если онѣ имѣютъ общую точку, соотвѣтствующую абсциссѣ  $a$ , то ординаты при  $x = a$  будутъ равны, и мы имѣемъ:

$$\varphi(a) = \psi(a).$$

Для точки, смежной съ общою и имѣющей абсциссою  $a + h$ , ординаты различны; ихъ разность  $\varphi(a + h) - \psi(a + h)$  представляетъ расхождение обѣихъ кривыхъ; по теоремѣ же Тэйлора имѣемъ:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\varphi^{n-1}(a) + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}\varphi^n(a + \theta h),$$

$$\psi(a + h) = \psi(a) + h\psi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\psi''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)}\psi^{n-1}(a) + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}\psi^n(a + \theta h);$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе равенство  $\varphi(a) = \psi(a)$ , пишемъ:

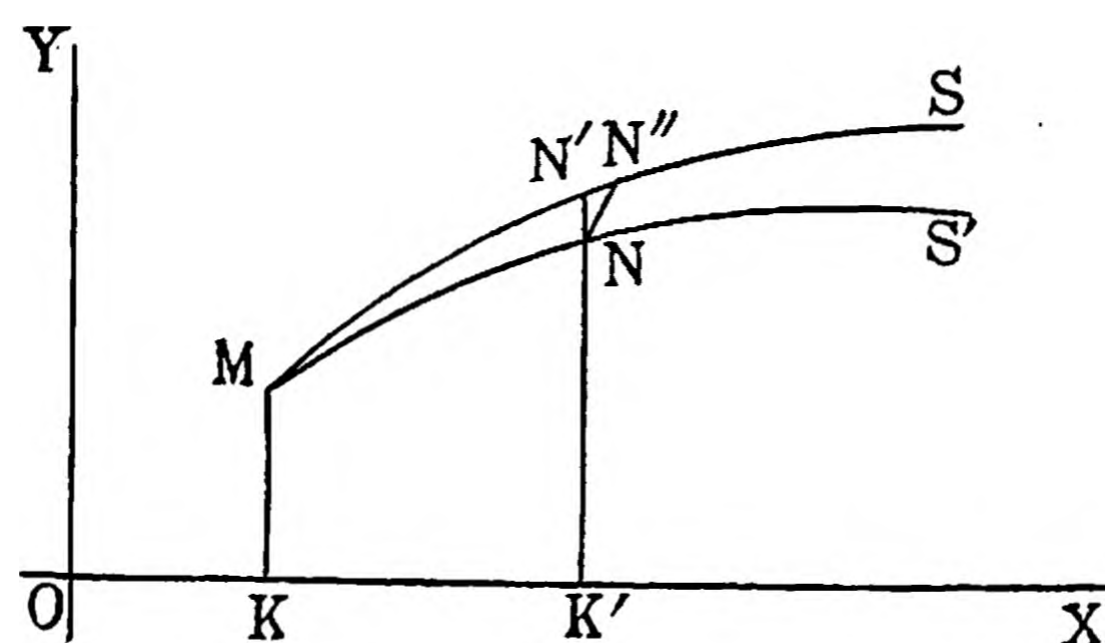
$$\varphi(a + h) - \psi(a + h) = h[\varphi'(a) - \psi'(a)] + \frac{h^2}{1.2}[\varphi''(a) - \psi''(a)] + \dots$$

Когда  $\varphi'(a) - \psi'(a)$  отлично отъ нуля, разность ординатъ того же порядка, что и  $h$ , т.-е. бесконечно-малая перваго порядка. Если  $\varphi'(a) - \psi'(a)$  равно нулю, то разность ординатъ бесконечно-малая втораго порядка. Вообще, если при  $x = a$  первыхъ  $p$  производныхъ функціи  $\varphi$  равны соотвѣтственнымъ производнымъ функціи  $\psi$ , разность  $\varphi(a + h) - \psi(a + h)$  будетъ содержать множителемъ  $h^{p+1}$  и будетъ бесконечно-малою  $(p + 1)$ -го порядка. Тогда говорятъ, что двѣ кривыя имѣютъ соприкосновеніе порядка  $p$ .

Такъ какъ касательная опредѣляется производною отъ ординаты и радіусъ кривизны—двумя первыми производными, то видимъ, что двѣ кривыя имѣютъ соприкосновеніе перваго порядка, когда у нихъ общая касательная, и соприкосновеніе втораго порядка, когда онѣ въ то же время имѣютъ и общій радіусъ кривизны.

§ 534. Порядокъ соприкосновенія двухъ кривыхъ не зависитъ отъ направленія координатныхъ осей, лишь бы только ось  $y$ -овъ не была параллельна общей касательной обѣихъ кривыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $MS$ ,  $MS'$  будутъ двѣ кривыя, отнесенныя къ осямъ  $OX$ ,  $OY$  (черт. 54) и имѣющія въ  $M$  соприкосновеніе порядка  $p$ . Далѣе, пусть  $MK$  обозна-



Черт. 54

чаетъ ординату точки  $M$ ; если провести параллель оси  $Y$ -овъ черезъ точку  $K'$ , расположенную на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки  $K$ , то отръзокъ  $NN'$  этой параллели, содержащійся между двумя кривыми, является бесконечно-малою того же порядка, что и  $h^{p+1}$ . Такъ какъ касательныя къ рассматриваемымъ кривымъ предполагаются не параллельными оси  $Y$ -овъ, то  $h$ —того же порядка, что и каждая изъ дугъ  $MN$ ,  $MN'$ , и, значитъ, наше опредѣленіе порядка соприкосновенія равносильно слѣдующему выраженію: двѣ кривыя имѣютъ въ точкѣ  $M$  соприкосновеніе порядка  $p$ , если, беря на одной изъ нихъ отъ точки  $M$  дугу длиною  $\sigma$ , получаемъ разстояніе конца этой дуги до другой кривой, отсчитанное по параллели оси  $Y$ -овъ, того же порядка, что и  $\sigma^{p+1}$ . Если теперь измѣнить направленіе оси  $Y$ -овъ, не измѣняя  $\sigma$ , то линія  $NN'$  замѣнится другою линією  $NN''$ , которая будетъ одного порядка съ  $NN'$ , такъ какъ обѣ онѣ представляютъ стороны треугольника  $NN'N''$  съ конечными углами; слѣдовательно, порядокъ соприкосновенія при новыхъ осяхъ останется порядка  $p$ , и доказательство, данное нами лишь при одномъ предположеніи, что углы треугольника  $NN'N''$  имѣютъ конечное значеніе, потеряетъ свою силу только тогда, когда одно изъ направленій, принятыхъ за ось  $Y$ -овъ, будетъ параллельно общей касательной обѣихъ кривыхъ, служащей предѣломъ  $N'N''$ .

**§ 535.** Можно показать, независимо отъ предшествующихъ геометрическихъ соображеній, что порядокъ соприкосновенія не зависитъ отъ направленія координатныхъ осей. Дѣйствительно, пусть двѣ кривыя будутъ отнесены къ осямъ  $X$ ,  $Y$ ; если измѣнить координаты, принявъ за новыя оси  $X'$ ,  $Y'$ , то новыя координаты  $x'$ ,  $y'$  будутъ извѣстными функціями отъ  $x$  и  $y$ . Но производныя отъ  $y'$  по  $x'$  могутъ выразиться (§ 173) въ функціи отъ производныхъ  $y$ -ка, взятыхъ по  $x$ , и выраженіе для  $\frac{d^n y'}{dx'^n}$  не содержитъ производныхъ порядка выше  $n$ ; слѣдовательно, двѣ кривыя, для которыхъ ордината и  $n$  ея первыхъ производныхъ, взятыхъ по абсциссѣ, имѣютъ одни и тѣ же значенія въ нѣкоторой точкѣ, представятъ то же свойство и при новыхъ осяхъ.

Полезно замѣтить, что въ случаѣ соприкосновенія четнаго порядка разность ординатъ, будучи пропорціональною нечетной степени  $h$ , мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ  $h$ . Отсюда слѣдуетъ, что каждая изъ кривыхъ пересѣкаетъ другую одновременно

съ касаніемъ, располагаясь надъ нею по одну сторону точки соприкосновенія и подъ нею по другую сторону отъ той же точки соприкосновенія. Въ случаяхъ нечетнаго порядка соприкосновенія разность ординатъ имѣетъ, напротивъ, постоянный знакъ въ смежности съ точкою соприкосновенія, и обѣ кривыя взаимно соприкасаются, не проходя одна черезъ другую.

§ 536. Всегда должно исключать изъ предыдущихъ разсужденій случай, когда ось  $y$ -овъ параллельна общей касательной къ разсматриваемымъ кривымъ. Въ этомъ случаѣ всѣ производныя обращаются въ бесконечность, и правило, по которому порядокъ соприкосновенія зависитъ отъ числа производныхъ, принимающихъ одно и то же значеніе, уже не можетъ быть болѣе приложено. Теорема о порядкѣ бесконечно-малаго разстоянія между двумя кривыми, отсчитаннаго по параллели оси  $y$ -овъ, также должна быть оставлена: будучи приложена, она повела бы къ неточному результату. Поищемъ точно, какова была бы ошибка, если бы мы поступили обычно и въ случаѣ этого особаго направленія оси  $Y$ -овъ.

Пусть  $KM$  обозначаетъ общую касательную, параллельную оси  $Y$ -овъ, и  $MK$ —ординату ея точки соприкосновенія  $M$ . Беремъ на оси  $X$ -овъ бесконечно-малое разстояніе  $KK' = h$  и ищемъ, предполагая между кривыми соприкосновеніе порядка  $n$ , какого порядка линія  $NN'$ , отсѣченная двумя кривыми на ординатѣ точки  $K'$ . Если предположить, что точка  $M$  не есть особенная точка и что кривизна не нуль и не бесконечность, то хорда  $MN$  образуетъ съ осью  $Y$ -овъ бесконечно-малый уголъ порядка, одинаковаго съ порядкомъ длины хорды, произведеніе этой хорды на синусъ угла равно  $h$ , и, слѣдовательно, хорда и уголъ оба одного порядка съ  $h^{\frac{1}{2}}$ . Если, поэтому, черезъ точку  $N$  провести прямую  $NN''$ , параллельную оси  $X$ -овъ, до встрѣчи съ кривою  $MN'$ , то длина этой прямой будетъ того же порядка, что и  $(h^{\frac{1}{2}})^{n+1}$ ; но изъ треугольника  $NN'N''$  имѣемъ:

$$NN'' = NN' \tan \angle NN'N'',$$

и такъ какъ  $NN'N''$  одного порядка съ  $h^{\frac{1}{2}}$ , то  $NN'$  необходимо должно быть порядка  $h^{\frac{n}{2}}$ ; иначе говоря, порядокъ соприкосновенія выходитъ равнымъ  $\frac{n}{2} - 1$ .

Соприкосновеніе четвертаго порядка, вычисленное по этому способу, оказалось бы всего лишь перваго порядка.

Можно было бы еще разсмотрѣть, какъ бесконечно-малую перваго порядка, дугу  $MN$ , а не ея проекцію на ось  $X$ -овъ; такъ какъ эта бесконечно-малая сравнима съ  $h^{\frac{1}{2}}$ , то  $NN'$  по отношенію къ ней будетъ порядка  $n$ , и мы должны сказать, согласно съ общимъ положеніемъ (§ 533), что кривыя имѣютъ соприкосновеніе порядка  $n - 1$ ; но довольно заниматься противорѣчіями, вытекающими изъ разсужденій, которыя мы должны совершенно отбросить.

§ 537. Чтобы опредѣлить порядокъ соприкосновенія двухъ кривыхъ, можно, кромѣ того, отнести ихъ къ какимъ-угодно координатамъ. Какова бы ни была принятая система, можно приложить тѣ же разсужденія и доказать, что двѣ кривыя,

выраженныя уравненіями между двумя переменными  $u$  и  $v$ , представляющими какія-угодно функции отъ  $x$  и  $y$ , имѣютъ соприкосновеніе порядка  $n$ , когда, при одномъ и томъ же значеніи  $u$ ,  $v$  и  $n$  ея первыхъ производныхъ соотвѣтственно равны для обѣихъ кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что производныя отъ  $v$  по  $u$  и производныя отъ  $y$  по  $x$  связаны между собою такимъ образомъ, что когда извѣстны однѣ, можно вычислить другія, вовсе не вводя производныхъ высшаго порядка по сравненію съ тѣми, которыя требуется составить. Итакъ, когда двѣ кривыя имѣютъ соприкосновеніе порядка  $n$ , т.-е. когда значенія  $y$  и  $n$  ея первыхъ производныхъ соотвѣтственно равны въ обѣихъ кривыхъ при одномъ и томъ же значеніи  $x$ , то то же будетъ для  $v$  и ея производныхъ при соотвѣтственномъ значеніи  $u$ ; обратно, если значенія  $v$  и  $n$  ея первыхъ производныхъ одинаковы для обѣихъ кривыхъ, то  $y$  и ея производныя по  $x$  будутъ также одинаковы для обѣихъ кривыхъ, и мы имѣемъ соприкосновеніе порядка  $n$ .

§ 538. Все сказанное о порядкѣ соприкосновенія кривыхъ предполагаетъ возможность разложенія въ рядъ ординатъ, смежныхъ съ общою ординатою, и, слѣдовательно, подчиняется исключеніямъ, относящимся къ случаямъ, когда такое разложеніе невозможно. Въ этихъ исключительныхъ случаяхъ можетъ выйти, что двѣ кривыя имѣютъ соприкосновеніе дробнаго порядка. Пусть, напр., кривыя представлены уравненіями

$$y = x^{\frac{3}{4}}, \quad y = x^{\frac{4}{5}};$$

ясно, что въ началѣ координатъ обѣ онѣ касательны къ оси  $y$ -овъ; порядокъ ихъ соприкосновенія на одну единицу ниже порядка бесконечно-малаго отрѣзка, содержащагося между двумя кривыми и проведеннаго параллельно оси  $x$ -овъ на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ начала; не трудно замѣтить, что этотъ отрѣзокъ—бесконечно-малая порядка  $\frac{4}{3}$ , такъ что двѣ наши кривыя имѣютъ соприкосновеніе порядка  $\frac{1}{3}$ .

#### Соприкасающіяся кривыя

§ 539. Когда уравненіе кривой содержитъ произвольные коэффициенты, то можно поставить слѣдующую задачу: опредѣлить эти коэффициенты такъ, чтобы между этою кривою и данною существовало соприкосновеніе наивысшаго порядка.

Существованіе соприкосновенія порядка  $n$  выражается  $n+1$  уравненіями; поэтому, порядокъ соприкосновенія будетъ, вообще, на единицу ниже числа параметровъ, находящихся въ нашемъ распоряженіи. Опредѣляемая такимъ образомъ кривая, подъ условіемъ имѣть въ данной точкѣ соприкосновеніе наивысшаго порядка, называется соприкасающеюся кривою. Такъ, напр., общее уравненіе коническихъ сѣченій содержитъ пять произвольныхъ параметровъ; значитъ, коническое сѣченіе, соприкасающееся къ кривой въ данной точкѣ, имѣетъ съ нею соприкосновеніе четвертаго порядка, соприкосновеніе соприкасающейся параболы—третьяго порядка, и соприкосновеніе соприкасающагося круга—только втораго порядка. Соприкасающаяся прямая представляетъ касательную; ея соприкосновеніе—перваго порядка.



## СОПРИКАСАЮЩІЙСЯ КРУГЪ

§ 540. Соприкасающійся къ кривой кругъ совпадаетъ съ кругомъ кривизны. Для доказательства этого достаточно отыскать выраженіе его радіуса. Пусть

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \quad (1)$$

будетъ уравненіе круга. Онъ долженъ имѣть общую точку съ кривою и въ этой точкѣ давать для  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  тѣ же значенія, что и кривая. Но уравненіе (1) послѣ дифференцированія даетъ:

$$\begin{aligned} (x - \alpha) + (y - \beta) \frac{dy}{dx} &= 0, \\ 1 + (y - \beta) \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравненія, по сказанному выше, должны удовлетворяться значеніями  $y$ ,  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , выводимыми изъ уравненія кривой и относящимися къ рассматриваемой точкѣ. Изъ нихъ находимъ:

$$\begin{aligned} y - \beta &= -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \\ x - \alpha &= \frac{\frac{dy}{dx} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} = R^2. \end{aligned}$$

Итакъ, соприкасающійся кругъ имѣетъ тотъ же радіусъ, что и кругъ кривизны, и, слѣдовательно, совпадаетъ съ нимъ.

§ 541. Мы видѣли (§ 496), что кругъ кривизны кривой пересѣкаетъ ее въ точкѣ прикосновенія; изъ этого замѣчанія мы могли бы заключить непосредственно, что его соприкосновеніе съ кривою—порядка выше перваго (§ 535) и что, слѣдовательно, онъ представляетъ соприкасающійся кругъ.

Тождество круга кривизны съ соприкасающимся кругомъ можно вывести также изъ § 521-го. Если на кривой отъ какой-нибудь точки  $M$  отложить бесконечно-малую дугу  $MM'$ , равную  $s$ , то разстояніе конца  $M'$  до круга кривизны въ  $M$  равно, если пренебречь бесконечно-малыми четвертаго порядка,

$$\frac{s^3}{6} \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}; \quad (1)$$

слѣдовательно, оно представляетъ бесконечно-малую третьяго порядка, и кривая

имѣетъ (§ 534) съ кругомъ соприкосновеніе второго порядка, а это показываетъ, что послѣдній есть кругъ соприкасающійся.

Разстояніе круга до кривой можетъ понизиться до четвертаго порядка только въ томъ случаѣ, если выраженіе (1) обращается въ нуль, т.-е. если  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} = 0$ . Это условіе выполняется для точекъ, гдѣ кривизна представляетъ maximum или minimum. Въ этихъ точкахъ соприкосновеніе кривой съ кругомъ, вообще, третьяго порядка, и кругъ кривизны, въ смежности съ этими точками, будетъ внутреннимъ или внѣшнимъ къ кривой, которую въ этомъ случаѣ онъ не пересѣкаетъ. Однако, можетъ

выйти, что въ точкѣ, гдѣ  $\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds} = 0$ , членъ четвертаго порядка исчезаетъ въ то же время въ выраженіи разстоянія кривой до ея соприкасающагося круга; такъ какъ соприкосновеніе тогда — четвертаго порядка, то кругъ пересѣкаетъ кривую: легко видѣть, что это имѣетъ мѣсто, когда производная отъ кривизны по дугѣ равна нулю, сама же кривизна не представляетъ ни maximum'a, ни minimum'a.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Если изъ точекъ плоской кривой опустить перпендикуляры на одну изъ касательныхъ, черезъ ихъ основанія провести прямыя, параллельныя неподвижному направленію, и на этихъ послѣднихъ отложить отрѣзки, пропорціональныя соотвѣтственнымъ длинамъ перпендикуляровъ, то геометрическимъ мѣстомъ концовъ этихъ отрѣзковъ будетъ кривая, имѣющая ту же касательную, что и данная, въ ихъ общей точкѣ. Найти въ этой точкѣ отношеніе радіусовъ кривизны.

2. Если черезъ каждую точку кривой провести прямую данной длины, составляющую постоянный уголъ съ нормалью, то нормаль къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто концовъ такихъ прямыхъ, будетъ проходить черезъ центръ кривизны данной кривой.

3. Если провести касательную въ точкѣ на кривой, заданной уравненіемъ

$$y = \varphi(x),$$

и затѣмъ рядъ хордъ, параллельныхъ этой касательной, то угловой коэффициентъ касательной къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто серединъ этихъ хордъ, въ точкѣ, гдѣ эта кривая пересѣкаетъ данную линію, равенъ

$$\varphi'(x) - \frac{3\varphi''(x)^2}{\varphi'''(x)}.$$

4. Радіусъ кривизны эволюты кривой превышаетъ втрое отрѣзокъ нормали къ эволютѣ, содержащійся между начальною точкою этой нормали и ея пересѣченіемъ съ касательною къ діаметру, направленіе котораго определено въ предыдущемъ упражненіи.

5. Если разсматривать, на рядѣ параллельныхъ кривыхъ, соотвѣтственныя точки, расположенныя на одной и той же нормали, то касательныя къ діаметральнымъ кривымъ, проходящимъ черезъ эти различныя точки, сходятся всѣ въ одной точкѣ.

6. Если назвать черезъ  $r$  радіусъ-векторъ, проведенный изъ неподвижнаго полюса къ точкѣ плоской кривой, и черезъ  $\rho$  разстояніе этого полюса до касательной, то радіусъ кривизны  $\rho$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\rho = -r \frac{dr}{dp}.$$

7. Геометрическое мѣсто центровъ эллипсовъ, оси которыхъ имѣютъ данное направленіе и которые имѣютъ въ данной точкѣ соприкосновеніе второго порядка съ данною кривою, есть равно-сторонняя гипербола, проходящая черезъ эту точку.

8. Геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, имѣющихъ въ данной точкѣ соприкосновеніе второго порядка съ данною кривою, есть кругъ. Огибающая кривая осей этихъ параболъ — четвертаго порядка; она имѣетъ три точки возврата и прикасается къ кругу, представляющему геометрическое мѣсто фокусовъ, въ трехъ точкахъ.

9. Если изъ точки  $O$  опустить перпендикуляры на касательныя къ плоской кривой, то, называя черезъ  $r$  разстояніе точки  $O$  до точки этой кривой, черезъ  $p$  длину перпендикуляра, опущеннаго на касательную, черезъ  $\rho$  радіусъ кривизны данной кривой и черезъ  $\rho'$  радіусъ кривизны кривой, представляющей геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r} - \frac{p\rho}{r^3}.$$

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### Кривизна линий, нанесенных на сферѣ

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ

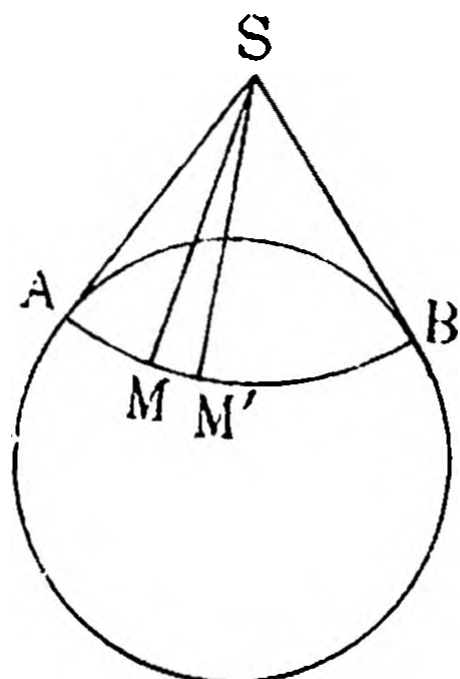
§ 542. Аналогія плоскихъ фигуръ съ фигурами, которыя можно нанести на сферѣ, была замѣчена, начиная съ элементовъ; Эйлеръ далъ ей счастливое распространеніе, приложивъ идею кривизны къ изученію линий, нанесенныхъ на одной и той же сферѣ. Мы познакомимся въ настоящей главѣ съ главными чертами этой теоріи, которая сама представляетъ лишь частный случай болѣе общей теоріи кривыхъ, нанесенныхъ на какой-угодно поверхности. Въ ученіи о линияхъ, нанесенныхъ на сферѣ, большой кругъ долженъ, очевидно, играть роль, принадлежащую на плоскости прямой линіи. *На сферѣ* ему приписывается нулевая кривизна: подобно тому какъ кривизна плоской линіи даетъ понятіе о степени быстроты, съ какою эта линія удаляется отъ касательной, кривизна кривой, нанесенной на сферѣ, можетъ дать, какъ мы и покажемъ, понятіе о степени быстроты, съ какою такая линія удаляется отъ дуги касательнаго къ ней большого круга. Для отличія абсолютной кривизны отъ этой, относящейся только къ сравненію линий, нанесенныхъ на одной и той же сферѣ, мы примемъ выраженіе геодезической кривизны, данное Лиувиллемъ (Liouville) въ болѣе общемъ смыслѣ, что будетъ изложено въ другой главѣ. Здѣсь мы ограничимся изученіемъ линий, нанесенныхъ на сферѣ.

Полная геодезическая кривизна бесконечно-малой дуги сферической кривой есть уголъ, образуемый дугами большихъ круговъ, касающимися рассматриваемой дуги въ ея концахъ. Средняя геодезическая кривизна есть отношеніе полной кривизны къ длинѣ дуги, и кривизна сферической линіи въ нѣкоторой точкѣ есть средняя кривизна ея бесконечно-малой дуги, отсчитанной отъ этой точки.

#### КРИВИЗНА МАЛАГО КРУГА

§ 543. По предыдущему опредѣленію геодезическая кривизна малаго круга, очевидно, постоянна. Начнемъ съ опредѣленія ея значенія.

Пусть  $MM'$  (черт. 55) будетъ безконечно-малая дуга, принадлежащая окружности малаго круга  $AB$ , и  $S$ —вершина конуса вращения, касающагося сферы по этому



Черт. 55

кругу; производящія  $SM, SM'$  конуса соотвѣтственно нормальны къ плоскостямъ большихъ круговъ, касающихся малаго круга въ  $M$  и въ  $M'$ . Ихъ уголъ  $MSM'$  представляетъ, слѣдовательно, полную геодезическую кривизну дуги  $MM'$ , и отношеніе этого угла къ длинѣ безконечно-малой дуги, т.-е., по опредѣленію, геодезическая кривизна малаго круга, есть  $\frac{1}{SM}$ .

Поэтому, если изъ точки  $P$ , принятой на сферѣ за полюсъ, описать малый кругъ, сферическій радіусъ котораго соотвѣтствуетъ углу  $\theta$ , то геодезическая кривизна этого малаго круга будетъ  $\frac{1}{R \tan \theta}$ , гдѣ  $R$ —радіусъ сферы. Если  $\theta$  равно  $\frac{\pi}{2}$ , то малый кругъ превращается въ большой и геодезическая кривизна приводится къ нулю.

#### Кругъ кривизны

§ 544. Геодезическая кривизна малаго круга можетъ принимать всевозможныя значенія, начиная съ нуля, представляющаго кривизну большого круга, до безконечности, выражающей кривизну безконечно-малаго круга. слѣдовательно, можно представить въ каждой точкѣ сферической кривой малый кругъ, касающійся къ этой кривой и имѣющій съ нею одинаковую кривизну. Назовемъ этотъ кругъ *кругомъ геодезической кривизны* (дальше мы увидимъ, что онъ не отличается отъ круга абсолютной кривизны, которая будетъ опредѣлена въ другой главѣ); полюсу круга кривизны дадимъ названіе *полюса геодезической кривизны*.

#### Полюсъ круга кривизны

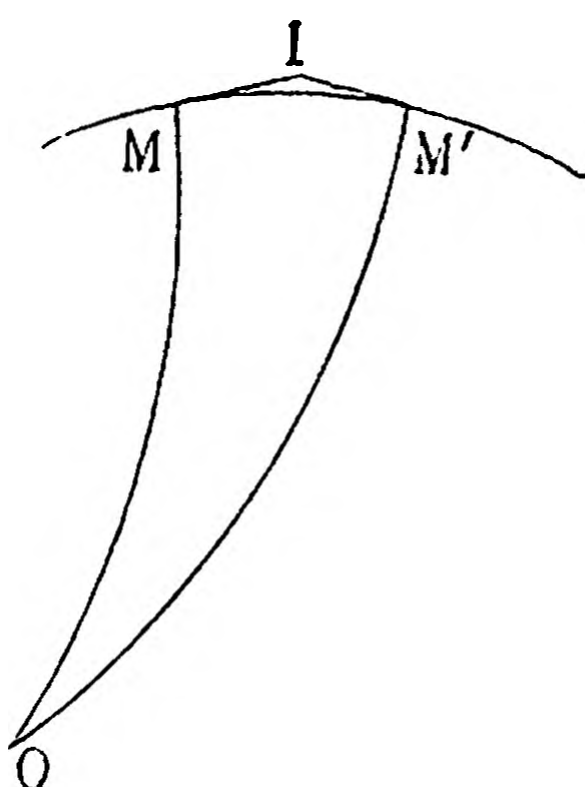
§ 545. Полюсъ геодезической кривизны сферической кривой есть точка встрѣчи двухъ нормальныхъ къ кривой безконечно-близкихъ большихъ круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ на сферической кривой (черт. 56) безконечно-малую дугу  $MM'$ , и пусть  $MO, M'O$  будутъ нормальныя къ ней въ ея концахъ дуги большихъ круговъ, пересекающіяся подъ угломъ  $O$ .

При безконечно-большомъ радіусѣ сферы кривая является плоскою, и этотъ



уголъ  $O$  равенъ полной кривизнѣ дуги  $MM'$ ; но вообще эти углы не равны и мы сначала опредѣлимъ ихъ отношеніе.



Черт. 56

Ведемъ черезъ точки  $M$  и  $M'$  двѣ дуги  $MI$ ,  $M'I$  большихъ круговъ, касательныя къ дугѣ  $MM'$  и встрѣчающіяся въ точкѣ  $I$ ; четырехсторонникъ  $MIM'O$ , составленный четырьмя дугами большихъ круговъ, измѣряется произведеніемъ квадрата радіуса сферы на избытокъ суммы его угловъ надъ четырьмя прямыми, т.-е.  $R^2(O - \varepsilon)$ , гдѣ  $\varepsilon$  — полная кривизна  $MM'$ ; но этотъ четырехсторонникъ можно замѣнить, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, поверхностью, ограниченной дугами  $OM$ ,  $OM'$  и малымъ кругомъ, описаннымъ изъ  $O$ , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ  $OM$ ; эта поверхность равна произведенію  $\frac{O}{2\pi}$  на поверхность зоны съ основаніемъ, общимъ для обѣихъ, т.-е. равна

$$\frac{O}{2\pi} \cdot 2\pi R \left[ R - R \cos \left( \frac{OM}{R} \right) \right] = O \cdot R^2 \left[ 1 - \cos \left( \frac{OM}{R} \right) \right];$$

поэтому имѣемъ:

$$O - \varepsilon = O \left[ 1 - \cos \left( \frac{OM}{R} \right) \right],$$

откуда

$$\frac{\varepsilon}{O} = \cos \left( \frac{OM}{R} \right);$$

слѣдовательно, кривизна  $\frac{\varepsilon}{MM'}$  равна  $\frac{O}{MM'} \cos \left( \frac{OM}{R} \right)$ .

Въ этомъ послѣднемъ выраженіи отношеніе угла  $O$  къ дугѣ  $MM'$  можно замѣнить отношеніемъ угла  $O$  къ безконечно-малой дугѣ, описанной изъ  $O$ , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ  $OM$  и заключенной между  $OM$  и  $OM'$ . Это же отношеніе, очевидно, равно отношенію  $2\pi$  къ окружности малаго круга, т.-е. равно окончательно  $\frac{1}{R \sin \left( \frac{OM}{R} \right)}$ ; слѣдовательно, для выраженія кривизны имѣемъ:

$$\frac{\varepsilon}{MM'} = \frac{\cos \left( \frac{OM}{R} \right)}{R \sin \left( \frac{OM}{R} \right)} = \frac{1}{R \tan \left( \frac{OM}{R} \right)},$$

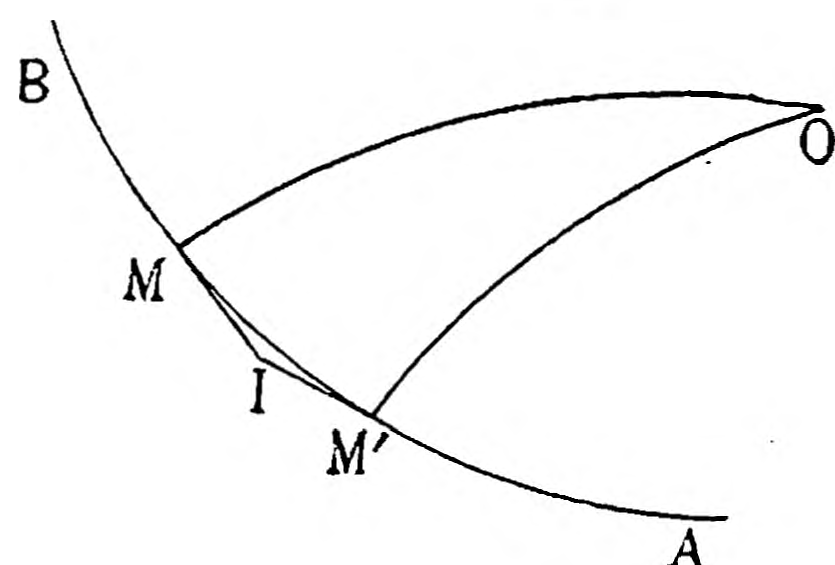
что точно представляет (§ 543) кривизну малаго круга съ сферическимъ радіусомъ  $OM$ .

#### РАЗЛИЧНЫЯ ВЫРАЖЕНІЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

§ 546. Принимаемъ за координаты точки  $M$  поверхности сферы дугу  $\theta$ , измѣряющую разстояніе этой точки до неподвижной точки  $O$ , и уголъ  $\psi$ , составляемый дугою большого круга  $OM$  съ даннымъ большимъ кругомъ, проходящимъ черезъ точку  $O$ . Эти координаты, аналогичныя полярнымъ координатамъ на плоскости, равнозначны географическимъ координатамъ: долготѣ и широтѣ. Мы нашли (§ 121), что если принять, какъ мы и сдѣлаемъ, радіусъ сферы за единицу, то въ этой системѣ квадратъ разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками, координаты которыхъ  $\theta, \psi, \theta + d\theta, \psi + d\psi$ , выразится черезъ

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2.$$

Далѣе, пусть  $AB$  (черт. 57) будетъ кривая, представленная уравненіемъ между  $\theta$  и  $\psi$ ,



Черт. 57

и  $MM'$ —бесконечно-малая дуга на этой кривой, отсчитанная отъ точки  $M$ ; вычисляемъ геодезическую кривизну этой дуги  $MM'$ .

Если черезъ точки  $M$  и  $M'$  провести дуги большихъ круговъ  $MI, M'I$ , касательныя къ  $MM'$  и пересѣкающіяся въ  $I$ , и уголъ между ними назвать черезъ  $\varepsilon$ , то искомая геодезическая кривизна будетъ

$$\frac{\varepsilon}{MM'}.$$

Но, какъ мы только-что привели выше,

$$\overline{MM'}^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2. \quad (1)$$

Но, называя черезъ  $V$  уголъ  $OMA$ , имѣемъ (§ 93):

$$\text{tang } V = \sin \theta \frac{d\psi}{d\theta}; \quad (2)$$

поверхность четырехсторонника  $OMIM'$  измѣряется избыткомъ суммы его угловъ надъ четырьмя прямыми, и мы имѣемъ:

$$OMIM' = d\psi - \varepsilon + dV;$$

значить,

$$\varepsilon = d\psi + dV - OMIM'. \quad (3)$$

Но уравнение (2) даетъ:

$$dV = d\arctang\left(\sin\theta \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{d\left(\sin\theta \frac{d\psi}{d\theta}\right)}{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}; \quad (4)$$

кромѣ того, поверхность  $OMIM'$  равна, если отбросить безконечно-малыя второго порядка, поверхности, ограниченной дугами  $OM$ ,  $OM'$  и малымъ кругомъ, описаннымъ изъ  $O$ , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ  $OM$ , равнымъ  $\theta$ ; иначе говоря,

$$OMIM' = d\psi(1 - \cos\theta).$$

Слѣдовательно,

$$\varepsilon = d\psi \cos\theta + \frac{d\left(\sin\theta \frac{d\psi}{d\theta}\right)}{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}; \quad (5)$$

изъ сказаннаго вытекаетъ, что кривизна  $\frac{\varepsilon}{MM'}$ , которую мы обозначимъ черезъ  $\frac{1}{\rho}$ , будетъ

$$\frac{d\psi \cos\theta + \frac{d\left(\sin\theta \frac{d\psi}{d\theta}\right)}{1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2}}{\sqrt{d\theta^2 + d\psi^2 \sin^2\theta}}, \quad (6)$$

или, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\cos\theta \frac{d\psi}{d\theta} + \sin^2\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^3 + \sin\theta \frac{d^2\psi}{d\theta^2}}{\left[1 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (7)$$

§ 547. Если за полюсъ принять точку  $M$  разсматриваемой кривой, неподвижная же дуга, отъ которой отсчитывается уголъ  $\psi$ , была бы касательна къ  $MM'$ , то будемъ имѣть  $\theta = 0$ ; при такомъ предположеніи формула (7) приводится къ

$$\frac{1}{\rho} = 2 \frac{d\psi}{d\theta}. \quad (8)$$

Геометрическое истолкованіе этой формулы весьма важно.

Дѣйствительно,  $d\psi$  есть уголъ, составляемый дугою большого круга, которая служить хордою для дуги  $MM'$ , и касательною въ одномъ изъ ея концовъ, а  $d\theta$  есть сама эта хорда, которую можно, отбросивъ безконечно-малыя третьяго порядка, замѣнить дугою  $MM'$ ; сравненіе формулы (8) съ уравненіемъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon}{MM'},$$

вытекающимъ изъ опредѣленія, даетъ, поэтому,

$$\varepsilon = 2d\psi.$$

Отсюда заключаемъ:

Въ какой-угодно сферической кривой уголъ, составляемый хордою бесконечно-малой дуги  $MM'$ , съ дугою большого круга, касательною къ ней въ одномъ изъ ея концовъ, равенъ, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, половинѣ угла смежности, составляемаго дугами большихъ круговъ, касательными въ двухъ концахъ  $M$  и  $M'$ .

**§ 548.** Разумѣется, какъ мы уже объясняли не разъ, что при вычисленіи бесконечно-малой величины нѣкотораго порядка мы рассматриваемъ бесконечно-малыя высшаго порядка какъ такіа, которыми можно пренебречь.

Если, напр.,  $\varphi(x)$  обозначаетъ функцію отъ  $x$ , которая, въ то время какъ  $x$  есть бесконечно-малая перваго порядка, представляетъ бесконечно-малую порядка  $n$ , и если отношеніе  $\frac{\varphi(x)}{x^n}$  имѣетъ предѣломъ постоянную  $A$ , мы будемъ говорить, что при бесконечно-маломъ  $x$  значеніе  $\varphi(x)$  есть  $Ax^n$ ; но во избѣжаніе всякаго недоразумѣнія припомнимъ, что здѣсь отброшены бесконечно-малыя высшаго порядка, и вмѣстѣ съ О. Боннэ (O. Bonnet) будемъ называть это выраженіе  $Ax^n$  главнымъ значеніемъ  $\varphi(x)$ . Вводя подобное названіе, мы можемъ теорему, доказанную въ § 45-мъ, прочесть слѣдующимъ образомъ:

Если функція  $\varphi(x)$ , бесконечно-малая вмѣстѣ съ  $x$ , имѣетъ главнымъ значеніемъ  $Ax^n$ , гдѣ  $A$ —постоянная, то производная  $\varphi'(x)$  имѣетъ главнымъ значеніемъ  $nAx^{n-1}$ .

**§ 549.** Обратная теорема также справедлива, т.-е. если производная  $\varphi'(x)$  есть бесконечно-малая вмѣстѣ съ  $x$  и главное ея значеніе равно  $nAx^{n-1}$ , гдѣ  $A$ —постоянная, то функція  $\varphi(x)$ , если она также бесконечно-малая вмѣстѣ съ  $x$ , имѣетъ главнымъ значеніемъ  $Ax^n$ .

Въ самомъ дѣлѣ, полагаемъ

$$\varphi'(x) = nAx^{n-1} + \varepsilon,$$

гдѣ  $\varepsilon$  есть, при  $x$  бесконечно-маломъ, бесконечно-малая по отношенію къ первому члену второй части;  $\varphi(x)$  представляетъ (§ 115) площадь, заключенную между осью  $x$ -овъ, ординатою, соответствующею абсциссѣ  $x$ , и кривою, ордината которой есть  $\varphi'(x)$ . А такъ какъ, отбрасывая членъ  $\varepsilon$ , мы, по предположенію, отбрасываемъ лишь бесконечно-малую часть этой ординаты, то, слѣдовательно, площадь, представляющая  $\varphi(x)$ , измѣнится также лишь на бесконечно-малую часть своего значенія: она станетъ тогда равною функціи, которая, обращаясь въ нуль вмѣстѣ съ  $x$ , имѣетъ производную  $nAx^{n-1}$ , т.-е. будетъ  $Ax^n$ ; слѣдовательно, главное значеніе  $\varphi(x)$  есть  $Ax^n$ .

**§ 550.** Возвратимся къ теоріи сферическихъ кривыхъ. Пусть  $MA$  (черт. 58) будетъ какая-нибудь кривая, нанесенная на сферѣ, и  $MT$ —дуга большого круга, касающаяся ея въ точкѣ  $M$ ; называемъ черезъ  $s$  дугу  $MM_1$ , отсчитанную на кривой  $MA$  отъ точки  $M$ , и черезъ  $y$  разстояніе точки  $M_1$  до дуги  $MT$ , отсчитанное по дугѣ большого круга  $M_1P$ , перпендикулярной къ  $MT$ .





Соединяя точку  $M$  съ точкою  $M_1$  дугою большого круга, которую мы назовемъ хордою  $MM_1$ , составимъ сферическій треугольникъ  $MM_1P$ , въ которомъ имѣемъ:

$$\frac{\sin M_1P}{\sin M_1MP} = \sin M_1M,$$

или, по замѣнѣ бесконечно-малыхъ синусовъ дугами,

$$\frac{y}{M_1MP} = s,$$

откуда, на основаніи уравненія (4),

$$M_1MP = \frac{y}{s} = \frac{s}{2\rho}. \quad (5)$$

Сравнивая съ уравненіемъ (3), видимъ, что уголъ  $M_1MP$  есть половина угла смежности  $\varepsilon$ , что точно выражаетъ уже доказанную теорему (§ 547); такимъ образомъ, мы здѣсь имѣемъ для нея второе доказательство.

Уравненіе (5) выражаетъ также весьма важную теорему; можно написать:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2y}{s^2},$$

что даетъ для геодезической кривизны на сферѣ выраженіе, тождественное съ выраженіемъ для кривизны плоской линіи (§ 499). Мы видимъ, что эта кривизна пропорціональна разстоянію  $y$ , соотвѣтствующему данному значенію  $s$ , и даетъ понятіе, какъ было предсказано въ § 542-мъ, о степени быстроты, съ какою кривая удаляется отъ касательнаго къ ней большого круга.

**§ 551.** Разность между бесконечно-малою сферическою дугою и ея хордою. — Называя, по предыдущему (§ 550), хордою дуги сферической кривой дугу большого круга, соединяющую ея концы, можемъ сказать, что разность между бесконечно-малою дугою и ея хордою есть бесконечно-малая третьяго порядка, и выраженіе ея главной части отличается отъ подобнаго же выраженія плоскихъ кривыхъ только замѣною ихъ кривизны геодезическою кривизною.

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, будутъ:  $s$  — длина дуги сферической кривой, отсчитанная отъ нѣкоторой точки  $M$ , и  $c$  — хорда этой дуги. Если разсматривать одинъ изъ концовъ  $s$ , какъ неподвижный, то разность  $s - c$  есть функція отъ  $s$ , производная отъ которой по  $s$  равна  $1 - \frac{dc}{ds}$ ; называя же черезъ  $V$  уголъ, подъ которымъ хорда  $c$  пересѣкаетъ дугу  $s$ , строго имѣемъ:

$$\cos V = \frac{dc}{ds},$$

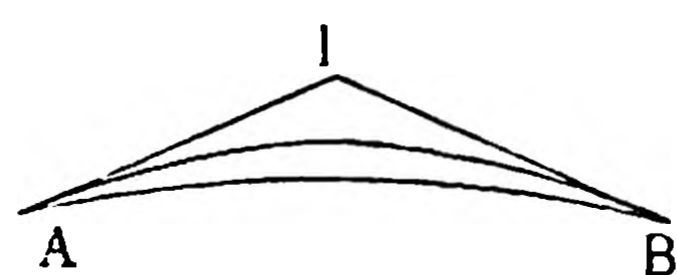
а, значить,

$$1 - \frac{dc}{ds} = 1 - \cos V = 2 \sin^2 \frac{1}{2} V.$$

Если предположить  $s$  бесконечно-малою, то уголъ  $V$  будетъ равенъ (§ 547) половинѣ угла смежности  $\varepsilon$ , соотвѣтствующаго дугѣ  $s$ ; слѣдовательно,  $2 \sin^2 \frac{1}{2} V$  мы

можемъ замѣнить черезъ  $\frac{\varepsilon^2}{8}$ , или, называя черезъ  $\frac{1}{\rho}$  геодезическую кривизну въ  $M$ , черезъ  $\frac{s^2}{8\rho^2}$ ; такимъ образомъ, производная отъ разности  $s - c$  имѣетъ главною частью  $\frac{s^2}{8\rho^2}$ , а значитъ (§ 549), главною частью  $s - c$  будетъ  $\frac{s^3}{24\rho^2}$ . Это выраженіе, какъ видно, всецѣло подобно выраженію, которое мы нашли для плоскихъ кривыхъ, и служить лишнимъ примѣромъ полной аналогіи обѣихъ теорій.

§ 552. Разность между бесконечно-малою дугою и суммою касательныхъ, проведенныхъ къ ней въ ея концахъ.—Пусть  $AB$  будетъ (черт. 59) рассматриваемая дуга и  $I$ —пересѣченіе дугъ большихъ круговъ, касающихся ея въ точкахъ  $A$  и  $B$ .



Черт. 59

Вычисляемъ сначала избытокъ  $AI + IB$  надъ хордою  $AB$ , приводя его всегда, понятно, къ главной части.

Въ сферическомъ треугольникѣ  $AIB$ , называя черезъ  $A$  бесконечно-малый уголъ при вершинѣ  $A$  имѣемъ:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (AI + IB - AB) \sin \frac{1}{2} (AB + BI - AI)}{\sin AB \sin AI}}. \quad (1)$$

Замѣняемъ  $\sin \frac{1}{2} A$  бесконечно-малою дугою  $\frac{1}{2} A$  и во второй части приводимъ каждый бесконечно-малый множитель къ его главной части;  $\sin \frac{1}{2} (AI + IB - AB)$  должно замѣнить черезъ  $\frac{1}{2} (AI + IB - AB)$ , т.-е. половиною искомой разности, и  $\sin \frac{1}{2} (AB + BI - AI)$  черезъ  $\frac{1}{2} (AB + BI - AI)$ , или, проще, черезъ  $\frac{1}{2} AB$ , такъ какъ разность  $BI - AI$  есть бесконечно-малая второго порядка;  $\sin AB$  и  $\sin AI$  могутъ быть также замѣнены черезъ  $AB$  и  $AI$ . Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} (AB) (AI + IB - AB)}{AB \cdot AI}}. \quad (2)$$

Называя черезъ  $s$  дугу  $AB$ , черезъ  $\varepsilon$  ея уголъ смежности и черезъ  $\frac{1}{\rho}$  ея геодезическую кривизну въ точкѣ  $A$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\varepsilon}{2} = \frac{s}{2\rho}, \\ AI &= \frac{s}{2}, \\ AB &= s; \end{aligned}$$

слѣдовательно, уравненіе (2) принимаетъ видъ

$$\frac{s}{4\rho} = \sqrt{\frac{\frac{s}{4}(AI + IB - AB)}{\frac{s^2}{2}}}, \quad (3)$$

откуда

$$AI + IB - AB = \frac{s^3}{8\rho^2}.$$

Сближая это уравненіе съ полученнымъ выше уравненіемъ

$$s - AB = \frac{s^3}{24\rho^2},$$

выводимъ:

$$AI + IB - s = \frac{s^3}{12\rho^2},$$

что всецѣло подобно результату, полученному для плоскихъ кривыхъ.

#### ТЕОРІЯ СФЕРИЧЕСКИХЪ ЭВОЛЮТЪ

**§ 553.** Сферическая эволюта кривой, нанесенной на сферѣ, есть кривая, касательная къ дугамъ большихъ круговъ, пересѣкающихъ данную кривую подъ прямымъ угломъ; она представляетъ огибающую этихъ нормальныхъ дугъ и, слѣдовательно, геометрическое мѣсто ихъ послѣдовательныхъ пересѣченій, или, что то же самое, геометрическое мѣсто центровъ сферической кривизны данной кривой, которая, по отношенію къ своей эволютѣ, называется эвольвентою. Эволюта сферической кривой даетъ, въ каждой точкѣ, ея кривизну, равную (§ 545) тангенсу угла, соответствующаго дугѣ большого круга, нормально проведенной къ кривой и заключенной между кривою и точкою, въ которой она касается эволюты; кромѣ того, длина дуги сферической эволюты выражается такъ же, какъ въ теоріи плоскихъ кривыхъ: она равна разности дугъ большихъ круговъ, заключенныхъ между ея концами и соответственными точками эвольвенты, и самое доказательство вполне подобно, какъ мы сейчасъ увидимъ, доказательству, данному нами (§ 22) для плоскихъ кривыхъ.

**§ 554.** Начнемъ съ изложенія нѣсколькихъ леммъ, касающихся измѣненія величины дуги большого круга. Когда одинъ изъ концовъ дуги большого круга  $AB$  перемѣщается безконечно-мало по сферѣ, то произтекающее отъ этого измѣненіе длины равно произведенію пройденной имъ безконечно-малой дуги на косинусъ угла, составляемаго направлениемъ перемѣщенія съ направлениемъ рассматриваемой дуги большого круга.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $AB$  (черт. 60) будетъ дуга большого круга конечной длины, и  $BB'$  — безконечно-малое перемѣщеніе конца  $B$ ; изъ точки  $A$ , какъ полюса, сферическимъ радіусомъ  $AB'$  описываемъ дугу малаго круга, пересѣкающую  $AB$  въ точкѣ  $P$ . Приращеніе длины, получаемое  $AB$  при измѣненіи на  $AB'$  есть  $PB$ , и изъ

безконечно-малаго треугольника  $PBB'$ , который можно рассматривать, какъ линейный, имѣемъ:

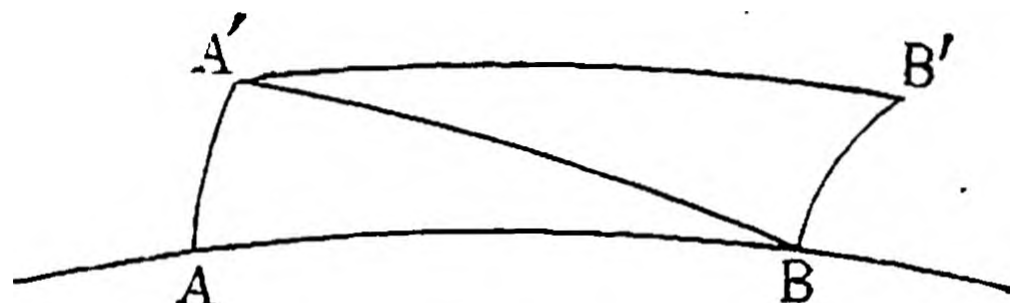


Черт. 60

$$PB = BB' \cos PBB' = -BB' \cos B'BA,$$

что и доказываетъ высказанное предположеніе.

Когда оба конца дуги  $AB$  перемѣщаются одновременно, измѣненіе дуги представляетъ сумму измѣненій, вытекающихъ изъ каждаго перемѣщенія, выполненнаго отдѣльно. Предположимъ, въ самомъ дѣлѣ, что дуга  $AB$  (черт. 61) измѣнилась на



Черт. 61

$A'B'$ ; соединяемъ  $A'$  съ  $B$ ; пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, имѣемъ:

$$\begin{aligned} A'B - AB &= -AA' \cos A'AB, \\ A'B - A'B' &= -BB' \cos BB'A', \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$A'B' - AB = BB' \cos BB'A' - AA' \cos A'AB;$$

уголъ  $BB'A'$  безконечно-мало отличается отъ дополненія  $B'BA$ ; поэтому, пренебрегая безконечно-малыми второго порядка, пишемъ окончательно:

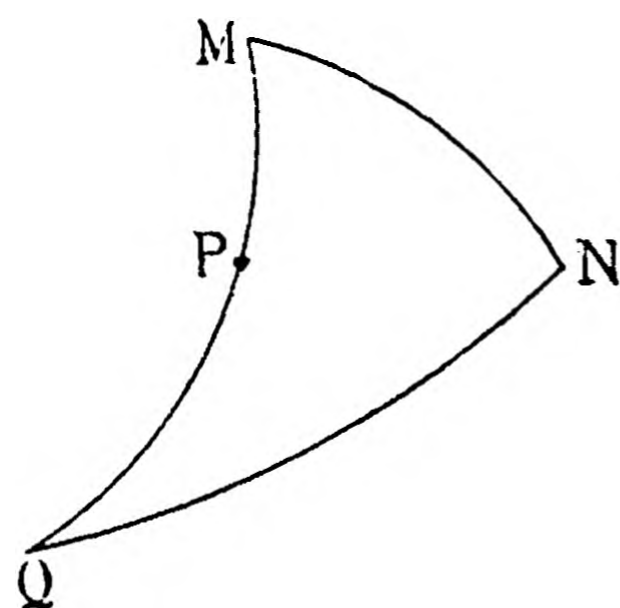
$$A'B' - AB = -BB' \cos B'BA - AA' \cos A'AB = BB' \cos(BB', AB) + AA' \cos(AA', BA).$$

Когда дуга большого круга остается постоянно нормальною къ кривой, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный перемѣщенію этого конца, содержа множителемъ косинусъ прямого угла, обратится въ нуль, и безконечно-малое приращеніе длины выразится всего однимъ членомъ. Если рассматриваемая дуга нормальна въ каждый моментъ къ обѣимъ кривымъ, описываемымъ концами, то ея измѣненіе постоянно равно нулю, и, слѣдовательно, длина ея постоянна. Такимъ образомъ, если двѣ сферическія кривыя пересѣкаютъ ортогонально непрерывный рядъ дугъ большихъ круговъ, расположенныхъ какъ-угодно на сферѣ, то части этихъ дугъ, заключенныя между обѣими кривыми, всѣ равны между собою.

Когда дуга большого круга, перемѣщаясь по сферѣ, остается все время касательною къ кривой, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, то членъ, пропорціональный

перемѣщенію этого конца, содержа множителемъ косинусъ нулевого угла, приводится къ самому перемѣщенію, т.-е. къ бесконечно-малой дугѣ кривой, къ которой разсматриваемая дуга остается касательною.

§ 555. Въ силу предыдущихъ леммъ разсужденія, приведшія насъ къ опредѣленію длины дуги эволюты плоской кривой (§ 22), могутъ быть приложены слово въ слово къ сферической эволютѣ сферической кривой. Пусть, въ самомъ дѣлѣ,  $MN$  (черт. 62)



Черт. 62

будетъ сферическая кривая и  $PQ$ —ея эволюта. Въ то время какъ конецъ  $M$  дуги  $MP$  пробѣгаетъ эвольвенту, конецъ  $P$  въ то же время чертитъ соответственныя точки эволюты; каждое бесконечно-малое приращеніе этой дуги равно соответственной дугѣ эволюты, и полное приращеніе, когда вмѣсто  $MP$  станетъ  $NQ$ , будетъ равно дугѣ  $PQ$ , какъ было высказано нами заранѣе.

#### Кривизна ортогональныхъ траекторій на сферѣ

§ 556. Система кривыхъ, нанесенныхъ на сферѣ и слѣдующихъ одна за другою по закону непрерывности, можетъ быть представлена уравненіемъ между двумя сферическими координатами и произвольнымъ параметромъ. Дѣйствительно, при каждомъ значеніи параметра уравненіе представляетъ опредѣленную кривую, которая бесконечно-мало перемѣщается и видоизмѣняется, когда этотъ послѣдній получаетъ бесконечно-малое приращеніе.

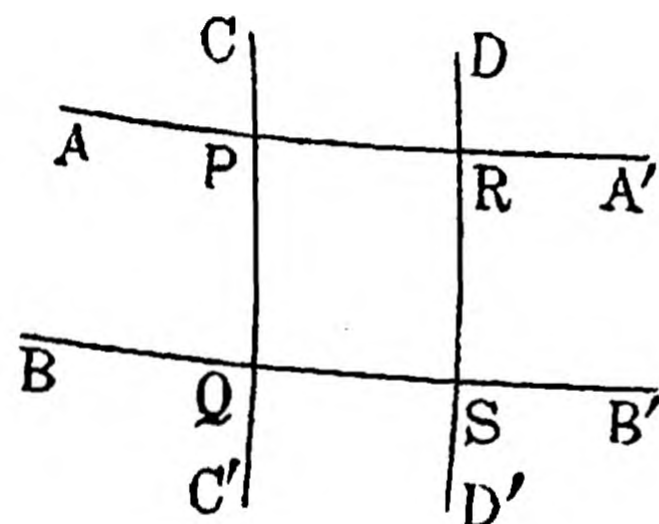
Подобной системѣ сферическихъ кривыхъ всегда отвѣчаетъ вторая система, составленная изъ линій, пересекающихъ первую подъ прямымъ угломъ; ихъ общее уравненіе также будетъ содержать произвольный параметръ, и такъ какъ всякая точка сферы можетъ быть опредѣлена значеніями параметровъ, соответствующихъ кривымъ, пересекающимся въ опредѣляемой точкѣ, то эти параметры образуютъ систему криволинейныхъ координатъ, употребленіе которыхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ весьма полезно.

Переходимъ къ изученію закона измѣненія геодезическихъ кривизнъ обѣихъ системъ кривыхъ, пересекающихся ортогонально на сферѣ. Называемъ черезъ  $\alpha_1$  параметръ, значеніе котораго характеризуетъ кривыя первой системы, и черезъ  $\alpha_2$  параметръ, соответствующій второй системѣ.

Пусть  $AA'$ ,  $BB'$  (черт. 63) представляютъ двѣ бесконечно-близкія кривыя первой системы, соответствующія значеніямъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1$  параметра  $\alpha_1$ , входящаго въ ихъ общее уравненіе, и  $CC'$ ,  $DD'$ —двѣ бесконечно-близкія кривыя второй системы, со-



отвѣтствующія значеніямъ  $\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  второго параметра и составляющія съ двумя первыми кривыми бесконечно-малый прямоугольникъ  $PRQS$ ; сторона  $PR$ , разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, соответствующими одному и тому же



Черт. 63

значенію  $\alpha_1$ , очевидно, пропорціональна  $d\alpha_2$ , и сторона  $PQ$ —величинѣ  $d\alpha_1$ . Поэтому, обозначая черезъ  $h_1$  и  $h_2$  функціи отъ  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которыя мы рассматриваемъ, какъ извѣстныя, полагаемъ:

$$PR = \frac{d\alpha_2}{h_2}, \quad PQ = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

При этомъ, вычисленіе  $h_1$  и  $h_2$  въ каждомъ частномъ случаѣ производится легко, такъ какъ переменныя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  рассматриваются, какъ образующія систему координатъ, и, слѣдовательно, разстояніе между двумя какими-угодно бесконечно-близкими точками такими, какъ  $P$  и  $S$ , соответствующими ординатамъ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + d\alpha_1, \alpha_2 + d\alpha_2$ , очевидно, выразится черезъ

$$ds^2 = \frac{d\alpha_2^2}{h_2^2} + \frac{d\alpha_1^2}{h_1^2};$$

значить, достаточно вычислить это разстояніе, какъ указано въ § 123-мъ, чтобы знать  $h_1$  и  $h_2$ , которыя оба мы принимаемъ за существенно положительныя.

Кривизна  $\frac{1}{\rho_2}$  линіи  $PQ$  равна частному отъ дѣленія угла смежности, образуемаго дугами большихъ круговъ, касательными въ  $P$  и  $Q$ , на длину  $ds_2$  этой дуги  $PQ$ . По принятому же обозначенію имѣемъ:

$$ds_2 = \frac{d\alpha_1}{h_1}.$$

Если, поэтому, назвать черезъ  $\varepsilon$  уголъ смежности, то кривизна  $\frac{1}{\rho_2}$  выразится формулою

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1};$$

остается вычислить  $\varepsilon$ . Этотъ уголъ образуютъ дуги большихъ круговъ, нормальныя соответственно въ  $P$  и  $Q$  къ кривымъ  $AA'$  и  $BB'$ , которыя обѣ пересѣкаются  $PQ$  подъ прямымъ угломъ. Если  $PI$  обозначаетъ первую изъ этихъ дугъ и  $I$ —точку, въ которой она пересѣкаетъ кривую  $BB'$ , то разстояніе  $QI$  есть бесконечно-малая

второго порядка, и, значитъ, можно, при вычисленіи угла  $\varepsilon$ , замѣнить большой кругъ, нормальный въ  $Q$ , большимъ кругомъ, нормальнымъ въ  $I$ , образующимъ съ первымъ бесконечно-малый уголъ второго порядка; слѣдовательно,  $\varepsilon$  есть дополненіе угла, подъ которымъ большой кругъ  $PI$  пересѣкаетъ кривую  $BB'$ . Но мы знаемъ (§ 553), что если въ каждой точкѣ сферической кривой возставить къ ней нормально дугу большого круга и отложить на этихъ дугахъ постоянную длину  $l$ , то геометрическое мѣсто концовъ пересѣчетъ подъ прямымъ угломъ всѣ эти большіе круги, нормальные къ данной кривой; отсюда заключаемъ, что если длина  $l$ , отложенная на каждомъ большомъ кругѣ, измѣняется отъ одной точки къ другой, то элементъ  $d\sigma$  полученной кривой, концы которой соотвѣтствуютъ длинамъ  $l$  и  $l + dl$ , отложеннымъ на двухъ смежныхъ большихъ кругахъ, составитъ съ большими кругами уголъ, косинусъ котораго равенъ  $\frac{dl}{d\sigma}$ . Въ интересующемъ насъ случаѣ двухъ бесконечно-близкихъ кривыхъ элементъ  $d\sigma$  можетъ быть замѣненъ соотвѣтственнымъ элементомъ  $ds$  кривой  $AA'$ , который отличается отъ перваго лишь на бесконечно-малую второго порядка, и бесконечно-малый уголъ  $\varepsilon$ , который можно замѣнить косинусомъ его дополненія, имѣетъ выраженіемъ  $\frac{dl}{ds_1}$ ;  $l$  здѣсь есть разстояніе  $PI$ , равное, какъ сказано выше,  $\frac{d\alpha_1}{h_1}$ , а  $dl$  есть приращеніе, соотвѣтствующее бесконечно-малому измѣненію  $\alpha_2$ ; итакъ, имѣемъ:

$$dl = \frac{d\left(\frac{d\alpha_1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}.$$

Знаменатель же  $ds_1$  частного  $\frac{dl}{ds_1}$  есть бесконечно-малая дуга кривой  $AA'$ , соотвѣтствующая приращенію  $d\alpha_2$  параметра, и мы имѣемъ:

$$ds_1 = \frac{d\alpha_2}{h_2}.$$

Слѣдовательно,

$$\varepsilon = \frac{dl}{ds_1} = h_2 d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2},$$

и, значитъ,

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon h_1}{d\alpha_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = -\frac{h_2}{h_1} \frac{dh_1}{d\alpha_2}.$$

Такъ же находимъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1} = -\frac{h_1}{h_2} \frac{dh_2}{d\alpha_1}.$$

Эти формулы сообщаютъ радіусу кривизны знакъ, по которому можно судить о родѣ кривизны; кривая  $PQ$  дѣлитъ сферу на двѣ части: въ одной параметръ  $\alpha_2$  больше, а въ другой меньше, чѣмъ для точекъ  $PQ$ ; кривизна положительна, когда

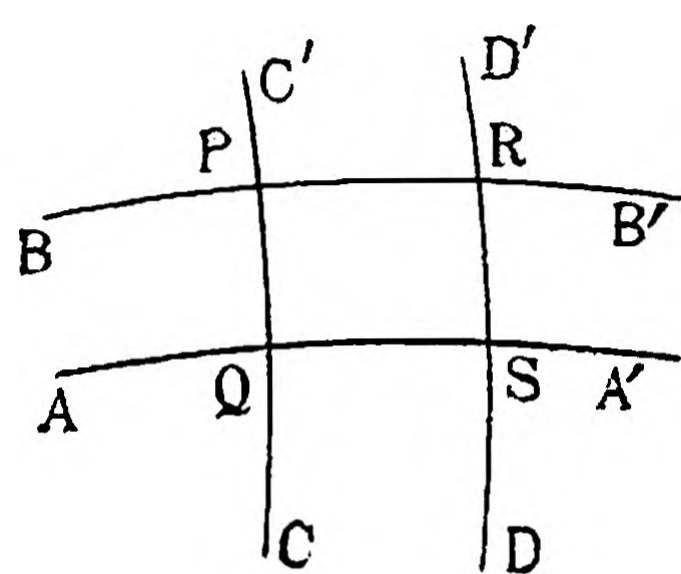
касательный большой круг  $PI$  находится, въ смежности точки касанія, въ первой изъ этихъ двухъ частей, и отрицательна въ противномъ случаѣ.

§ 557. Формула

$$\frac{1}{\rho_2} = h_2 h_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}$$

можетъ быть представлена, подобно такой же формулѣ для плоскихъ кривыхъ, подъ видомъ, поддающимся изящному геометрическому истолкованію.

Пусть  $AA'$ ,  $BB'$  (черт. 64) будутъ двѣ бесконечно-близкія кривыя первой си-



Черт. 64

стемы, соотвѣтствующія параметрамъ  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 + d\alpha_1$ , и  $CC'$ ,  $DD'$  — двѣ кривыя второй системы, пересѣкающія первыя подъ прямымъ угломъ и соотвѣтствующія параметрамъ  $\alpha_2$ ,  $\alpha_2 + d\alpha_2$ .

Имѣемъ:

$$PQ = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$RS = \frac{d\alpha_1}{h_1} + \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_2;$$

слѣдовательно,

$$\frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) = \frac{RS - PQ}{d\alpha_2}.$$

При дифференцированіи по  $\alpha_2$  величина  $d\alpha_1$  принимается за постоянную; значитъ, предыдущее уравненіе даетъ:

$$\frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} = \frac{RS - PQ}{d\alpha_1 d\alpha_2}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho_2} = h_1 h_2 \frac{RS - PQ}{d\alpha_1 d\alpha_2};$$

но

$$PQ = \frac{d\alpha_1}{h_1}, \quad QS = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

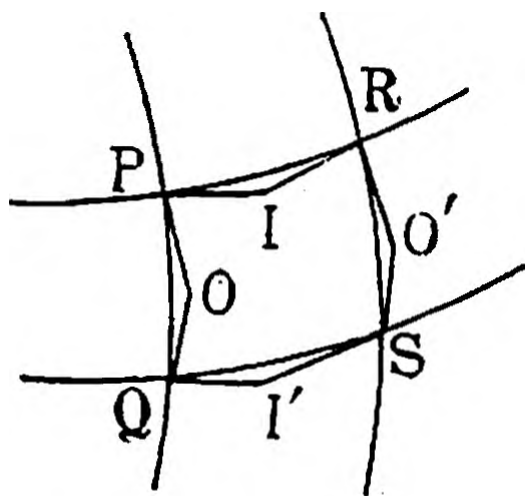
и окончательно пишемъ:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{RS - QP}{(QP)(QS)};$$

эта формула показываетъ, что кривизна дуги  $QP$  равна разности противоположныхъ сторонъ прямоугольника  $PQRS$ , раздѣленной на его площадь.

§ 558. Ищемъ, въ какомъ видѣ предстанетъ, въ случаѣ сферическихъ ортогональныхъ кривыхъ, соотношеніе между производными кривизнъ двухъ кривыхъ въ точкѣ ихъ пересѣченія, данное въ § 511-мъ. Оба приведенныя (§§ 511 и 512) нами доказательства требуютъ легкихъ измѣненій, и прежде всего нужно, разумѣется, замѣнить, для перваго доказательства, прямолинейныя координаты полярными; второе, напротивъ, не требуетъ другихъ измѣненій кромѣ введенія лишняго члена въ первое изъ полученныхъ уравненій. Ограничимся вторымъ доказательствомъ.

Пусть  $PQRS$  (черт. 65) будетъ бесконечно-малый прямоугольникъ, составленный



Черт. 65

кривыми двухъ системъ, соответствующими значеніямъ  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1$  перваго и значеніямъ  $\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  втораго параметра. Ведемъ черезъ вершины  $P, Q, R, S$  дуги большихъ круговъ, касательныя къ сторонамъ этого прямоугольника: получаемъ сферическій восьмиугольникъ  $QOPIRO'SI'$ , площадь котораго измѣряется избыткомъ суммы угловъ надъ 12 прямыми; называя же углы смежности дугъ  $PR, QS$  черезъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1$  и дугъ  $PQ, RS$ —черезъ  $\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2$ , въ данномъ случаѣ чертежа, когда всѣ кривизны положительны, имѣемъ:

$$\begin{aligned} O &= \pi + \varepsilon_2, & I &= \pi + \varepsilon_1, \\ O' &= \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, & I' &= \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1, \end{aligned}$$

гдѣ большія буквы обозначаютъ величины угловъ при соответственныхъ вершинахъ. Слѣдовательно, площадь восьмиугольника измѣрится величиною

$$-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2,$$

при чемъ за единицу площади принимается, какъ извѣстно, квадратъ радіуса сферы, взятаго, по предположенію, за единицу длины. Съ другой стороны, разность между восьмиугольникомъ и прямоугольникомъ  $PQRS$  не ниже третьяго порядка (въ дѣйствительности она—четвертаго порядка), и площадь восьмиугольника можно приравнять произведенію  $PQ \times PR$  двухъ измѣреній прямоугольника, т.-е. можно написать:

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = -PQ \times PR; \quad (1)$$

но

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_1}{PR},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon_2}{PQ},$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \frac{PR}{\rho_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{PQ}{\rho_2},$$

и, слѣдовательно, уравненіе (1) можетъ принять видъ

$$\frac{d\left(\frac{PR}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = -PR \cdot PQ, \quad (2)$$

т.-е.

$$PR \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{d(PR)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + PQ \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{d(PQ)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = -PR \cdot PQ. \quad (3)$$

По предыдущему же (§ 556) имѣемъ:

$$ds_1 = PR = \frac{d\alpha_2}{h_2}, \quad ds_2 = PQ = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

и, значитъ,

$$\frac{d(PR)}{d\alpha_1} = \frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_2}{h_2} \right) = d\alpha_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1},$$

$$\frac{d(PQ)}{d\alpha_2} = \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) = d\alpha_1 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2},$$

или (§ 556), наконецъ,

$$\frac{d(PR)}{d\alpha_1} = d\alpha_2 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{d(PQ)}{d\alpha_2} = d\alpha_1 \frac{1}{h_1 h_2} \frac{1}{\rho_2};$$

отсюда заключаемъ, что уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{h_2} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{h_1 h_2} + \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{h_1} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{h_1 h_2} = -\frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{h_1 h_2};$$

сокращая на множитель  $d\alpha_1 d\alpha_2$  и умножая обѣ части на  $h_1 h_2$ , находимъ:

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1, \quad (4)$$



или, въ силу равенствъ  $\frac{d\alpha_1}{h_1} = ds_2$ ,  $\frac{d\alpha_2}{h_2} = ds_1$ ,

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1. \quad (5)$$

Выражая черезъ  $R$  радіусъ сферы, принимавшійся нами до сихъ поръ за единицу, видимъ, что каждая изъ величинъ  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $ds_1$ ,  $ds_2$  будетъ раздѣлена на  $R$ , и уравненіе (5) перейдетъ въ слѣдующее:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -\frac{1}{R^2}. \quad (6)$$

§ 559. Формула (6) можетъ быть такъ преобразована, что будетъ содержать только функціи  $h_1$ ,  $h_2$  и параметры  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ : отъ которыхъ онѣ зависятъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вернемся къ уравненію

$$h_1 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + h_2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -1.$$

Имѣемъ (§ 556):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1}, \\ \frac{1}{\rho_2} &= h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2}, \end{aligned}$$

и уравненіе переходитъ въ

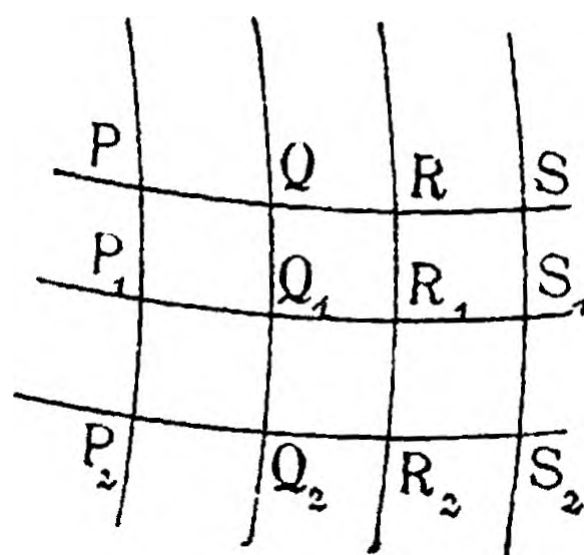
$$h_1 \frac{d}{d\alpha_1} \left( h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1} \right) + h_2 \frac{d}{d\alpha_2} \left( h_1 h_2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} \right) + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1} \right)^2 + h_1^2 h_2^2 \left( \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} \right)^2 = -1,$$

или, послѣ такихъ же упрощеній, какъ въ § 513-мъ,

$$h_1 \frac{d^2\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1^2} + h_2 \frac{d^2\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2^2} - h_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_1} \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_1} - h_2^2 \frac{d\left(\frac{1}{h_1}\right)}{d\alpha_2} \frac{d\left(\frac{1}{h_2}\right)}{d\alpha_2} = -\frac{1}{h_1 h_2}. \quad (7)$$

§ 560. Такъ какъ функціи  $\frac{1}{h_1}$ ,  $\frac{1}{h_2}$  даютъ законъ (§ 556) измѣненія разстоянія между двумя бесконечно-близкими кривыми, принадлежащими къ одной и той же системѣ, то уравненіе (7), имѣющее мѣсто между этими функціями и ихъ производными, выражаетъ неявно законъ измѣненія сторонъ бесконечно-малыхъ прямоугольниковъ, на которые можетъ быть разложена сфера двумя системами ортогональныхъ линій. Для полученія этого закона явно достаточно замѣнить въ формулѣ  $\frac{1}{h_1}$  и  $\frac{1}{h_2}$  ихъ выраженіями въ функціи бесконечно-малыхъ сторонъ этихъ прямоугольниковъ.

Пусть  $PQRS, P_1Q_1R_1S_1, \dots, PP_1P_2, QQ_1Q_2, \dots$  (черт. 66) обозначают линии двух системъ, соотвѣтствующихъ значеніямъ  $\alpha_1, \alpha_2$  параметровъ и тѣмъ ихъ значеніямъ.



Черт. 66

которые получаются послѣ бесконечно-малыхъ приращеній, равныхъ  $d\alpha_1$  для перваго и  $d\alpha_2$  для втораго параметра. Называемъ, какъ прежде, въ случаѣ плоскихъ кривыхъ, черезъ  $x$  и  $y$  стороны  $PQ, PP_1$  перваго прямоугольника и обозначаемъ знакомъ  $d$  измѣненіе, соотвѣтствующее приращенію  $d\alpha_1$  параметра  $\alpha_1$ , и черезъ  $\delta$  измѣненіе, соотвѣтствующее приращенію  $d\alpha_2$  параметра  $\alpha_2$ . Имѣемъ:

$$x = PQ = \frac{d\alpha_2}{h_2},$$

$$y = PP_1 = \frac{d\alpha_1}{h_1},$$

$$dx = P_1Q_1 - PQ = \frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_2}{h_2} \right) d\alpha_1 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1},$$

$$dy = P_2P_1 - PP_1 = \frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_1},$$

$$\delta x = QR - PQ = \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_2}{h_2} \right) d\alpha_2 = d\alpha_2^2 \frac{d \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_2},$$

$$\delta y = QQ_1 - PP_1 = \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{h_1} \right) d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_2},$$

$$d^2x = \frac{d}{d\alpha_1} (dx) d\alpha_1 = d\alpha_1^2 d\alpha_2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_2} \right)}{d\alpha_1^2},$$

$$\delta^2y = \frac{d}{d\alpha_2} (\delta y) d\alpha_2 = d\alpha_1 d\alpha_2^2 \frac{d^2 \left( \frac{1}{h_1} \right)}{d\alpha_2^2}.$$

Подставляя въ уравненіе (7) на мѣсто  $h_1, h_2$  и ихъ производныхъ значенія, выведенныя изъ этихъ формулъ, и опуская знаменатель  $d\alpha_1 d\alpha_2$ , получаемъ:

$$\frac{d^2x}{y} + \frac{\delta^2y}{x} - \frac{dydx}{y^2} - \frac{\delta y \delta x}{x^2} = -xy,$$

или

$$x^2 y d^2x + y^2 x \delta^2y - x^2 dydx - y^2 \delta y \delta x = -x^3 y^3. \quad (8)$$

Такъ какъ переменныя  $\alpha_1, \alpha_2$ , приращенія которыхъ опредѣляли законъ размѣщенія кривыхъ, образующихъ прямоугольники, произвольны, то и самый этотъ законъ произволенъ; такимъ образомъ, уравненіе (8) выражаетъ самый общій законъ управляющій сторонами бесконечно-малыхъ криволинейныхъ прямоугольниковъ, какіе можно уместить на сферѣ, описанной радіусомъ, принятымъ за единицу.

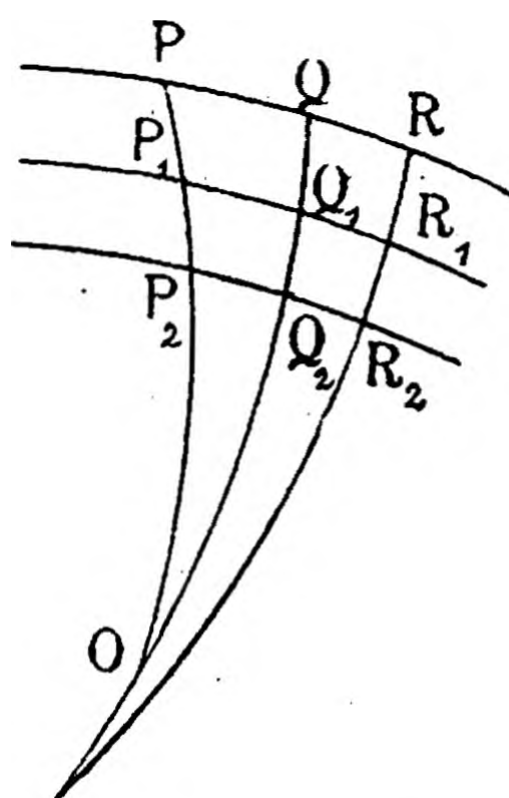
Если требуется измѣнить единицу и представить радіусъ сферы черезъ  $R$ , то  $x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots$ , будучи линіями, должны быть раздѣлены на  $R$ , и уравненіе (8) приметъ видъ

$$x^2 y d^2 x + y^2 x d^2 y - x^2 dy dx - y^2 \delta y \delta x = - \frac{x^3 y^3}{R^2}. \quad (9)$$

Сравнивая это уравненіе съ соотвѣтственнымъ уравненіемъ относительно прямоугольниковъ на плоскости (§ 514), видимъ, что они несовмѣстны и что, слѣдовательно, не существуетъ двухъ поверхностей, одной плоской, другой сферической, покрытыхъ одними и тѣми же бесконечно-малыми прямоугольниками.

Отсюда легко заключить, что плоская географическая карта неизбѣжно измѣняетъ отношенія между длинами линій, нанесенныхъ на сферѣ, если ихъ требуется представить на ней.

§ 561. Уравненіе (9) легко повѣряется въ томъ случаѣ, когда линіями одной изъ системъ являются большіе круги сферы. Двѣ какія-угодно линіи другой системы отсѣкаютъ (§ 554) на большихъ кругахъ, къ которымъ онѣ нормальны, равныя длины; рассмотримъ, въ этомъ случаѣ, три смежныхъ прямоугольника (черт. 67),



Черт. 67

стороны которыхъ входятъ въ формулу; будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} PQ &= x, & QR &= x + \delta x, \\ PP_1 &= y, & \delta y &= 0, & \delta^2 y &= 0, & P_1 P_2 &= y + dy, \\ P_1 Q_1 &= x + dx, & P_2 Q_2 &= x + 2dx + d^2 x, \end{aligned}$$

и уравненіе (9) приметъ видъ

$$x^2 y d^2 x - x^2 dy dx = - \frac{x^3 y^3}{R^2}. \quad (10)$$

Пусть  $R\theta$  будетъ разстояніе точки  $P$  до пересѣченія двухъ большихъ круговъ и  $d\psi$ —уголъ между ними. Имѣемъ, очевидно,

$$x = R \sin \theta d\psi$$

и, замѣчая, что дифференціалъ  $d$  относится къ одному только измѣненію  $\theta$ , пишемъ:

$$\begin{aligned} y &= R d\theta, & dy &= R d^2\theta, \\ dx &= R \cos \theta d\theta d\psi, \\ d^2x &= -R \sin \theta d\theta^2 d\psi + R \cos \theta d^2\theta d\psi; \end{aligned}$$

подстановка этихъ значеній въ уравненіе (10) обращаетъ его въ тождество.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Всякая сферическая кривая съ постоянною геодезическою кривизною есть кругъ.
2. Сферическою эвольвентою малаго круга, нанесеннаго на сферѣ, служатъ винтовая или улиткообразная кривая (*hélice*), т.-е. кривая, касательныя къ которой составляютъ постоянный уголъ съ неподвижною прямою.
3. Если назвать черезъ  $\theta$  разстояніе точки сферической кривой до неподвижнаго полюса, находящагося на сферѣ, и черезъ  $p$  разстояніе этого полюса до касательной дуги большаго круга, то геодезическая кривизна выразится формулою

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d \sin p}{\sin^2 \theta d\theta}.$$

4. Называя сферическимъ эллипсомъ такую кривую, нанесенную на сферѣ, что сумма разстояній каждой изъ ея точекъ до двухъ неподвижныхъ точекъ постоянна, замѣчаемъ, что касательная къ сферическому эллипсу дуга большаго круга образуетъ въ каждой точкѣ равные углы съ радіусами-векторами, исходящими изъ фокусовъ, и что геодезическая кривизна пропорціональна кубу синуса этихъ угловъ.

5. Локсодромія представляетъ такую кривую, нанесенную на сферѣ, которая пересѣкаетъ меридіаны, исходящіе изъ одной точки, подъ постояннымъ угломъ; геодезическая кривизна въ каждой точкѣ выражается формулою

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin V}{\tan \theta},$$

гдѣ  $V$  обозначаетъ постоянный уголъ, составляемый локсодроміей съ меридіанами, а  $\theta$ —разстояніе разсматриваемой точки до полюса, черезъ который проходятъ всѣ меридіаны.

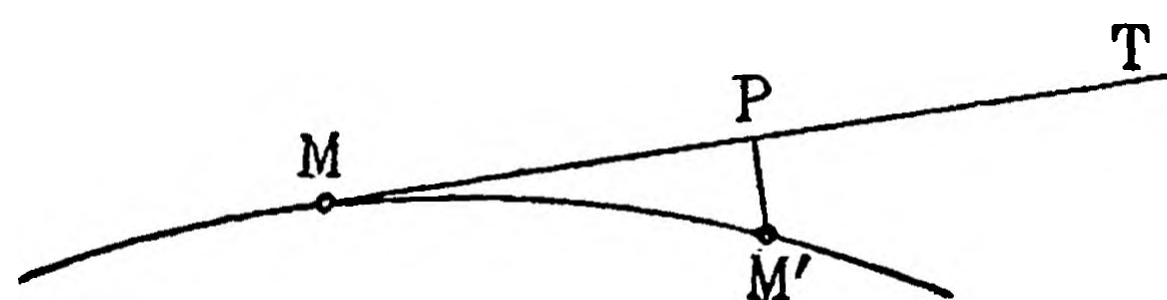
## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### Соприкасающаяся плоскость кривой двойкой кривизны

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

§ 562. Линія, точки которой не всѣ расположены въ одной плоскости, называется кривою двойкой кривизны; она имѣетъ, въ каждой точкѣ, касательную, которая, въ смежности съ точкою касанія, удаляется отъ нея бесконечно менѣе, чѣмъ всякая другая прямая, проходящая черезъ ту же точку. Обращая вниманіе на это отличное свойство касательной, приходимъ къ вопросу, существуетъ ли между всѣми плоскостями, проходящими черезъ данную точку кривой, одна такая, которая удаляется отъ кривой бесконечно менѣе, чѣмъ всѣ другія. Такая плоскость существуетъ всегда; ее называютъ соприкасающеюся плоскостью кривой въ рассматриваемой точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $M$  (черт. 68) будетъ какая-нибудь точка кривой двойкой



Черт. 68

кривизны и  $M'$  — другая точка на той же кривой, бесконечно-близкая къ первой. Если мы примемъ  $MM'$  за бесконечно-малую первого порядка, то легко видѣть, что разстояніе точки  $M'$  до всякой плоскости, проходящей черезъ точку  $M$  и не содержащей касательной, есть бесконечно-малая первого порядка. Дѣйствительно, такая плоскость образуетъ съ  $MM'$  конечный уголъ, и ея разстояніе до точки  $M'$ , равное произведенію  $MM'$  на синусъ этого конечнаго угла, очевидно, того же порядка, что и  $MM'$ .

Когда рассматриваемая плоскость содержитъ касательную  $MT$  въ точкѣ  $M$ , то она образуетъ съ  $MM'$  бесконечно-малый уголъ, и ея разстояніе до точки  $M'$  есть бесконечно-малая относительно  $MM'$  и притомъ, вообще, второго порядка; въ самомъ дѣлѣ, извѣстно (§ 10), что разстояніе точки  $M'$  до касательной  $MT$  — второго порядка, а разстояніе той же точки  $M'$  до плоскости, проходящей черезъ  $MT$ , равно произве-

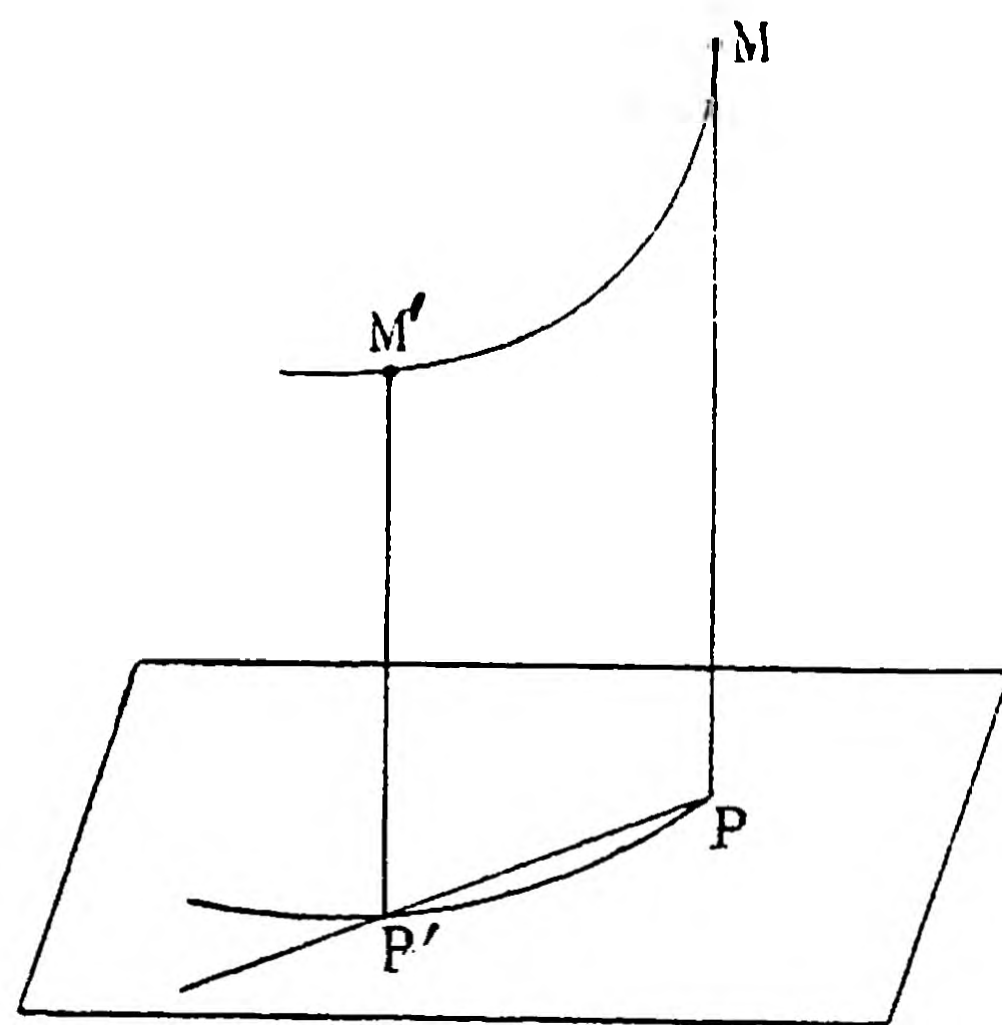


денію этого перпендикуляра  $M'P$  на синусъ угла, образуемаго плоскостью съ линіею  $M'P$ ; значитъ, оно—второго порядка, какъ и  $M'P$ , всякій разъ какъ рассматриваемая плоскость образуетъ съ этою линіею конечный уголъ, и поэтому, чтобы оно было порядка выше второго, нужно, чтобы плоскость составляла съ  $M'P$  бесконечно-малый уголъ, т.-е. чтобы она была предѣломъ плоскости, проходящей черезъ касательную  $MT$  и черезъ точку  $M'$ .

Соприкасающеюся плоскостью въ точкѣ  $M$  будетъ, по предыдущему, предѣлъ плоскости, проходящей черезъ касательную въ  $M$  и черезъ точку  $M'$  кривой, бесконечно-близкую къ  $M$ . Короче и также вполне правильно можно сказать: соприкасающаяся плоскость кривой, въ какой-нибудь точкѣ, есть плоскость, проходящая черезъ касательную и черезъ бесконечно-близкую точку кривой. Дѣйствительно, бесконечно-близкая къ  $M$  точка есть (§ 13) подвижная точка, безпредѣльно приближающаяся къ точкѣ  $M$ , и содержащая ее плоскость является предѣломъ плоскости, проходящей черезъ точку все болѣе и болѣе сближенную съ начальною.

§ 563. Соприкасающуюся въ точкѣ плоскость кривой можно рассматривать какъ предѣлъ плоскости, проведенной черезъ касательную въ этой точкѣ параллельно бесконечно-близкой касательной.

Чтобы установить согласіе этого опредѣленія съ предыдущимъ, проектируемъ кривую на плоскость, перпендикулярную къ касательной въ рассматриваемой точкѣ  $M$  (черт. 69). Пусть  $P$  будетъ проекціею точки  $M$  и  $P'$ —проекціею точки  $M'$ . Слѣдъ



Черт. 69

плоскости, проведенной черезъ касательную въ  $M$  и черезъ точку  $M'$ , есть  $PP'$ ; слѣдъ плоскости, проведенной черезъ  $MP$  параллельно касательной въ  $M'$ , проходитъ черезъ точку  $P$  и параллеленъ проекціи этой касательной, т.-е. параллеленъ касательной къ кривой  $PP'$  въ точкѣ  $P$ . Для обоихъ этихъ слѣдовъ, очевидно, общимъ предѣломъ является касательная въ  $P$  къ кривой  $PP'$ , и, слѣдовательно, оба опредѣленія соприкасающейся плоскости согласуются другъ съ другомъ.

Предыдущее доказательство могло бы, весьма естественно, повести къ неточному слѣдствию, которое важно отмѣтить съ цѣлью показать, съ какою осторожностью слѣдуетъ вести разсужденія при изученіи вопросовъ, касающихся порядка бесконечно-

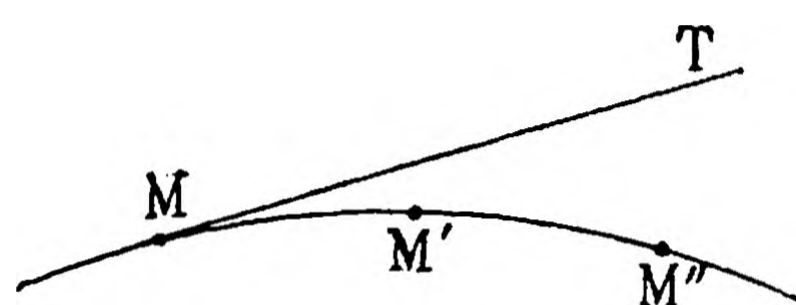
малыхъ. Принимая дугу  $MM'$  на предыдущемъ чертежѣ за бесконечно-малую первого порядка, видимъ, что дуга  $PP'$  проекціи—второго порядка, и такъ какъ, вообще, разстояніе конца бесконечно-малой дуги до касательной, проведенной черезъ другой конецъ, одного порядка съ квадратомъ этой дуги, то разстояніе точки  $P'$  до касательной въ точкѣ  $P$  кривой  $PP'$ , казалось бы, должно выйти четвертаго порядка. Такъ какъ это разстояніе, очевидно, является разстояніемъ точки  $M'$  до соприкасающейся плоскости въ  $M$ , то и выходитъ, что соприкасающаяся плоскость въ точкѣ  $M$  находится на бесконечно-маломъ разстояніи четвертаго порядка отъ расположенной на кривой точки  $M'$ , бесконечно-близкой къ  $M$ ; но такое заключеніе не точно: разстояніе точки  $M'$  до соприкасающейся плоскости въ  $M$  только третьяго порядка, какъ будетъ доказано далѣе. Разсужденію, по которому оно выходитъ четвертаго порядка, недостаетъ строгости, потому что къ точкѣ  $P$  кривой  $PP'$  приложено общее правило, относящееся къ какой-угодно точкѣ кривой, тогда какъ эта точка—особенная, гдѣ кривая, очевидно, представляетъ возвратъ и имѣетъ бесконечно-огромную кривизну.

§ 564. Принимая въ расчетъ возможность исключительныхъ случаевъ, мы равнымъ образомъ пришли бы на предыдущемъ чертежѣ къ ошибочному заключенію относительно разстоянія между двумя бесконечно-близкими касательными.

Дѣйствительно, кратчайшее разстояніе между касательными въ  $M$  и въ  $M'$  равно разстоянію точки  $P$  до касательной къ кривой  $PP'$  въ точкѣ  $P'$ . Это разстояніе должно, казалось бы, выйти одного порядка съ квадратомъ  $PP'$ , т.-е. четвертаго порядка. Однако же, это не такъ: оно, какъ мы увидимъ, третьяго порядка, и нашему разсужденію, подобно предыдущему, недостаетъ строгости, потому что точка  $P$  на кривой  $PP'$ —особенная точка, гдѣ кривизна бесконечно-велика.

§ 565. Иногда соприкасающуюся плоскость кривой опредѣляютъ, какъ содержащую три бесконечно-близкія точки кривой. Покажемъ, что это опредѣленіе согласуется съ двумя предыдущими.

Пусть  $M, M', M''$  (черт. 70) будутъ три бесконечно-близкія точки кривой, раз-



Черт. 70

стоянія между которыми мы примемъ за бесконечно-малыя первого порядка. Нужно доказать, что плоскость, проходящая черезъ эти три точки, имѣетъ тотъ же предѣлъ, что и плоскость, содержащая касательную  $MT$  въ  $M$  и точку  $M'$ . Дѣйствительно, обѣ плоскости пересѣкаются по  $MM'$ , и если бы онѣ составляли между собою конечный уголъ, то точка  $M''$ , расположенная на одной изъ нихъ на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ пересѣченія, находилась бы на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ другой; но этого нѣтъ, такъ какъ разстояніе точки  $M''$  до соприкасающейся плоскости въ  $M$ —порядка выше второго, и если повернуть эту соприкасающуюся плоскость на бесконечно-малый уголъ вокругъ  $MT$  до совпаденія съ  $TMM'$ , то измѣненіе разстоянія до  $M''$  будетъ, очевидно, порядка выше второго,

Итакъ, невозможно, чтобы плоскости  $IMM'$ ,  $MM'M''$  составляли между собою конечный уголъ; слѣдовательно, онѣ совпадаютъ въ предѣлѣ.

§ 566. Когда при изученіи фигуры требуется обратить вниманіе на направленія прямыхъ линій, входящихъ въ эту фигуру, не заботясь объ ихъ абсолютномъ положеніи въ пространствѣ, то ихъ выгодно замѣнить соотвѣтственно параллельными линіями, проведенными черезъ какую-нибудь одну произвольную точку пространства; далѣе, для изученія пучка этихъ параллелей можно послѣднія пересѣчь сферою изъ его вершины, какъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ; такимъ образомъ, каждому направленію будетъ соотвѣтствовать точка сферы. Прямая, параллельная одной и той же плоскости, будутъ соотвѣтствовать различнымъ точкамъ большого круга, который можно принять какъ за эту плоскость, такъ, разумѣется, и за всякую другую, ей параллельную.

Если этотъ способъ представленія, часто употребляемый Гауссомъ, примѣнить къ касательнымъ кривой двойкой кривизны, то каждая изъ нихъ будетъ представлена на сферѣ точкою; непрерывная кривая, служащая геометрическимъ мѣстомъ этихъ точекъ, названа Полемъ Серре сферическою индикатрисою данной кривой.

Такъ какъ сферическая индикатриса, указывая направленія касательныхъ, ничего не даетъ относительно ихъ абсолютнаго положенія, то ея недостаточно для опредѣленія соотвѣтственной кривой. Такъ напр., если сферическая индикатриса кривой есть большой кругъ, то соотвѣтственною кривою будетъ всякая плоская кривая, плоскость которой параллельна плоскости этого большого круга. Значитъ, одной индикатрисы недостаточно при полномъ изученіи кривой, но она можетъ, чему мы сейчасъ приведемъ примѣры, значительно упростить доказательство многихъ важныхъ теоремъ.

Прежде всего, легко видѣть, что сферическая индикатриса кривой можетъ служить для опредѣленія соприкасающихся плоскостей послѣдней. Дѣйствительно, соприкасающаяся плоскость есть предѣлъ плоскости, параллельной двумъ бесконечно-близкимъ касательнымъ; эта же послѣдняя, будучи, очевидно, параллельною плоскости большого круга, соединяющаго точки индикатрисы, соотвѣтствующія упомянутымъ касательнымъ, имѣетъ предѣломъ плоскость, параллельную плоскости большого круга, касательнаго къ сферической индикатрисѣ.

Такимъ образомъ, соприкасающіяся плоскости кривой параллельны плоскостямъ большихъ круговъ, касательныхъ къ сферической индикатрисѣ.

Поэтому уголъ между двумя соприкасающимися плоскостями, проведенными въ двухъ бесконечно-близкихъ точкахъ, является кривизною соотвѣтственной бесконечно-малой дуги сферической индикатрисы (§ 545). Отсюда заключаемъ, что если отбросить бесконечно-малыя второго порядка, то этотъ уголъ явится удвоеннымъ угломъ между одною изъ соприкасающихся плоскостей и плоскостью, проведенною черезъ одну изъ касательныхъ параллельно другой.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $PP'$  обозначаетъ бесконечно-малую дугу сферической индикатрисы; плоскость большого круга  $PP'$ , служащаго для этой дуги хордою, параллельна двумъ касательнымъ данной кривой, которыя соотвѣтствуютъ точкамъ  $P$  и  $P'$ , и углы, образуемые имъ съ большими кругами, касательными въ  $P$  и въ  $P'$ , составляютъ (§ 547) половины угла между этими двумя большими кругами.

§ 567. Соприкасающаяся плоскость кривой образуетъ съ касательною въ бесконечно-близкой точкѣ бесконечно-малый уголъ второго порядка.

Разсмотрѣніе сферической индикатрисы дѣлаетъ эту теорему, такъ сказать, очевидною. Дѣйствительно, уголъ между прямою и плоскостью есть разстояніе точки сферы, представляющей прямую, до большого круга, представляющего плоскость, и, значитъ, высказанная теорема равносильна слѣдующей: большой кругъ, касательный къ сферической индикатрисѣ въ какой-нибудь ея точкѣ, находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ бесконечно-близкой точки индикатрисы.

§ 568. Изъ предыдущей теоремы, очевидно, вытекаетъ, что пересѣченіе соприкасающейся плоскости съ бесконечно-близкою касательною является, въ предѣлѣ, точкою прикосновенія касательной; разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, соприкасающуюся плоскость въ точкѣ  $M$  и касательную въ точкѣ  $M'$ , бесконечно-близкую къ  $M$ ; такъ какъ  $MM'$  — перваго порядка, то разстояніе  $M'P$  точки  $M'$  до соприкасающейся плоскости въ  $M$  есть бесконечно-малая порядка выше второго. Если же назвать черезъ  $\theta$  уголъ этой касательной съ соприкасающеюся плоскостью, то разстояніе ея пересѣченія съ этою плоскостью до точки  $M'$  будетъ равно  $\frac{M'P}{\sin \theta}$  и, слѣдовательно, явится бесконечно-малою, такъ какъ  $\theta$  — второго порядка.

§ 569. Касательная къ кривой двойкой кривизны есть предѣлъ пересѣченія двухъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей.

Дѣйствительно, такъ какъ всякую соприкасающуюся плоскость представляетъ на сферѣ большой кругъ, касательный къ сферической индикатрисѣ, то пересѣченіе двухъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей будетъ представлено пересѣченіемъ двухъ большихъ круговъ, касательныхъ въ двухъ бесконечно-близкихъ точкахъ индикатрисы, т.-е., въ предѣлѣ, самую точку индикатрисы. Такимъ образомъ, пересѣченіе двухъ соприкасающихся плоскостей имѣетъ предѣльнымъ направленіемъ направление касательной къ кривой, и такъ какъ оно проходитъ черезъ точку пересѣченія одной изъ плоскостей съ касательною, содержащеюся въ другой, а эта точка по предыдущему параграфу совпадаетъ въ предѣлѣ съ точкою прикосновенія послѣдней, то касательная и предѣльное пересѣченіе соприкасающихся плоскостей представляютъ параллельныя прямая съ общою точкою и, слѣдовательно, взаимно совпадающія.

§ 570. Всякая точка кривой двойкой кривизны есть предѣлъ пересѣченія трехъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей.

Съ перваго взгляда кажется, что эту теорему можно разсматривать, какъ непосредственное слѣдствіе двухъ предыдущихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, пересѣченіе трехъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей можно разсматривать, какъ пересѣченіе одной изъ нихъ съ прямою пересѣченія двухъ другихъ, которая является (§ 569) касательною къ кривой и пересѣченіе которой съ смежною соприкасающеюся плоскостью совпадаетъ, въ предѣлѣ, съ точкою ея прикосновенія.

Но подобное разсужденіе вовсе не отличается строгостью.

Дѣйствительно, пересѣченіе двухъ соприкасающихся плоскостей не есть касательная къ кривой, а прямая, имѣющая предѣломъ касательную; поэтому, когда въ



предыдущемъ разсужденіи мы рассматриваемъ пересѣченіе двухъ соприкасающихся плоскостей, какъ касательную къ кривой, мы это пересѣченіе замѣняемъ его предѣломъ, подвергая его безконечно-малому перемѣщенію. Когда же идетъ дѣло объ опредѣленіи пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ прямыхъ, то безконечно-малое измѣненіе въ положеніи одной изъ нихъ можетъ перемѣститъ на конечную величину ея пересѣченіе съ другою или даже иногда привести къ полному исчезновенію послѣдняго.

Значитъ, нужно доказать прямо, что пересѣченіе трехъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей есть точка кривой.

Изъ разсмотрѣнія сферической индикатрисы тотчасъ видно, что пересѣченіе двухъ изъ нихъ образуетъ съ третьею безконечно-малый уголъ второго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, это равносильно выраженію, что когда три большихъ круга касаются сферической индикатрисы въ безконечно-близкихъ точкахъ, то пересѣченіе двухъ изъ нихъ находится на безконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ третьяго.

Когда прямая образуетъ съ плоскостью безконечно-малый уголъ второго порядка, то точка этой прямой, разстояніе которой до плоскости есть безконечно-малая порядка выше второго, неизбѣжно находится на безконечно-маломъ разстояніи отъ пересѣченія прямой и плоскости. Но общая точка трехъ соприкасающихся плоскостей есть пересѣченіе третьей изъ этихъ плоскостей съ прямою, по которой пересѣкаются двѣ первыя; поэтому, если мы найдемъ на этой прямой точку, разстояніе которой до третьей соприкасающейся плоскости представитъ безконечно-малую третьяго порядка, то такая точка будетъ безконечно-близка къ общей точкѣ трехъ соприкасающихся плоскостей, съ которою она въ предѣлѣ совпадетъ. Пересѣченіе первой соприкасающейся плоскости съ касательною, лежащею во второй, есть какъ разъ точка, удовлетворяющая этому условію. Дѣйствительно, она лежитъ на пересѣченіи двухъ первыхъ соприкасающихся плоскостей, и ея разстояніе до третьей есть безконечно-малая порядка выше второго, такъ какъ эта точка расположена на касательной на безконечно-маломъ разстояніи отъ точки касанія и, слѣдовательно, также на безконечно-маломъ разстояніи отъ пересѣченія той же касательной съ третьею соприкасающеюся плоскостью, образующею съ послѣдней безконечно-малый уголъ второго порядка. Эта точка, совпадающая въ предѣлѣ съ пересѣченіемъ трехъ соприкасающихся плоскостей, совпадаетъ также, очевидно, съ точкою, въ которой они касаются кривой, и совпаденіе этихъ точекъ въ предѣлѣ является такимъ образомъ доказаннымъ.

#### Огибающая поверхность соприкасающихся плоскостей

**§ 571.** Соприкасающіяся плоскости кривой двоякой кривизны огибаютъ развертывающуюся поверхность, которая является геометрическимъ мѣстомъ ихъ послѣдовательныхъ пересѣченій, и такъ какъ, по предыдущимъ теоремамъ, пересѣченіе двухъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей есть касательная, то мы можемъ заключить, что геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ къ кривой двоякой кривизны будетъ развертывающаяся поверхность, касательныя плоскости которой представляютъ соприкасающіяся плоскости кривой.

Когда прямыя слѣдуютъ въ пространствѣ одна за другою по нѣкоторому непрерывному закону, онѣ образуютъ вообще линейчатую неразвертывающуюся поверхность, касательная плоскость которой не одна и та же вдоль производящей. Изъ предыду-



шаго вытекаетъ, что такія прямая, вообще, не будутъ касательными къ одной и той же кривой и не имѣютъ огибающей кривой. Существуетъ, поэтому, необходимое условіе, чтобы прямая, слѣдующія одна за другою по данному закону, были касательными къ одной и той же кривой, и мы должны изучить это чрезвычайной важности условіе.

Изъ геометріи мы тотчасъ узнаемъ, что если прямая касательна къ одной и той же кривой, то кратчайшее разстояніе каждой изъ нихъ до бесконечно-близкой прямой есть бесконечно-малая порядка выше перваго, при чемъ за бесконечно-малую перваго порядка принимается, понятно, измѣненіе параметра, послѣдовательными значеніями котораго опредѣляются всѣ наши прямая.

Въ самомъ дѣлѣ, если прямая касательна къ одной и той же кривой, то точка касанія какой-нибудь одной изъ нихъ съ кривою имѣетъ, для cadaго значенія разсматриваемаго параметра, опредѣленное положеніе. Поэтому разстояніе двухъ бесконечно-близкихъ точекъ касанія будетъ одного порядка (§ 4) съ разностью соотвѣтственныхъ параметровъ, т.-е. перваго порядка, и кратчайшее разстояніе между двумя касательными, будучи меньше разстоянія одной изъ нихъ до точки касанія другой, очевидно, является бесконечно-малою относительно разстоянія между ихъ точками касанія и, слѣдовательно, бесконечно-малою порядка выше перваго.

Обратно, чтобы прямая была касательна къ одной и той же кривой, достаточно, чтобы кратчайшее разстояніе каждой изъ нихъ до бесконечно-близкой прямой было бесконечно-малою порядка выше перваго. Дѣйствительно, разсмотримъ на каждой прямой точку, въ которой измѣряется ея кратчайшее разстояніе до бесконечно-близкой прямой; геометрическое мѣсто этихъ точекъ есть кривая, и разстояніе между двумя изъ нихъ,  $O$  и  $O'$ , расположенныхъ на бесконечно-близкихъ прямыхъ,  $A$  и  $A'$ , одного порядка (§ 4) съ разностью параметровъ, соотвѣтствующихъ этимъ прямымъ, т.-е. перваго. Слѣдовательно, это разстояніе бесконечно-велико относительно перпендикуляра, опущеннаго изъ какой-нибудь одной изъ этихъ точекъ на прямую, проходящую черезъ другую, такъ какъ этотъ послѣдній, измѣряющій, по предположенію, кратчайшее разстояніе, есть бесконечно-малая порядка выше перваго. Отсюда вытекаетъ, что прямая  $OO'$  образуетъ бесконечно-малые углы съ каждою изъ прямыхъ  $A$  и  $A'$ , и, значитъ, эти прямая касательны къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто точекъ  $O$  и  $O'$ .

**§ 572.** Когда прямая задана своими уравненіями, то легко можно выразить, не прибѣгая къ выраженію ихъ кратчайшаго разстоянія, что онѣ касательны къ одной и той же кривой.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

будутъ уравненія перемѣщающейся прямой, при чемъ  $a, b, p, q$ —данныя функціи отъ одного общаго параметра  $\alpha$ ; если эта прямая постоянно касательна къ кривой, координаты  $x, y, z$  точки касанія должны удовлетворять не только уравненіямъ (1), но еще и уравненіямъ бесконечно-близкой прямой, если отбросить въ нихъ бесконечно-малыя порядка выше втораго. Дѣйствительно, касательная проходитъ на без-

конечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ точки касанія бесконечно-близкой касательной. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$\begin{cases} x = (a + da)z + p + dp, \\ y = (b + db)z + q + dq, \end{cases} \quad (2)$$

и, слѣдовательно, въ силу уравненій (1),

$$\begin{cases} 0 = zda + dp, \\ 0 = zdb + dq. \end{cases} \quad (3)$$

Казалось бы, по самому ходу доказательства, что уравненія (3) должны удовлетворяться только при томъ условіи, если пренебречь бесконечно-малыми порядка выше перваго, но мы сейчасъ покажемъ, что уравненія (3) должны быть при этомъ строго точны; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ  $a, b, p, q$ —функции параметра  $\alpha$ , то  $da, db, dp, dq$  пропорціональны  $d\alpha$ , и, опуская этотъ множитель, мы получимъ уравненія между конечными количествами, обѣ части которыхъ не могутъ различаться на бесконечно-малую величину, не будучи въ то же время строго равны между собою.

Уравненія (3) для своей совмѣстимости требуютъ равенства

$$\frac{da}{db} = \frac{dp}{dq}. \quad (4)$$

Если это условіе выполнено, то можно удовлетворить уравненіямъ (1) и (3) и найти, на каждой прямой, точку, разстояніе которой до смежной прямой представляло бы бесконечно-малую порядка выше перваго. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ есть, очевидно, кривая, касательная ко всѣмъ даннымъ прямымъ.

**§ 573.** По предыдущему достаточно, если въ системѣ прямыхъ кратчайшее разстояніе между двумя смежными прямыми представляетъ бесконечно-малую порядка выше перваго, чтобы прямая вышла касательными къ одной и той же кривой; но Букэ (Bouquet) мы обязаны любопытнымъ замѣчаніемъ, что это кратчайшее разстояніе всегда точно третьяго порядка, и невозможно, чтобы оно было второго.

Дѣйствительно, такъ какъ уравненія двухъ смежныхъ прямыхъ будутъ

$$\begin{aligned} x &= az + p, & y &= bz + q, \\ x &= (a + \Delta a)z + p + \Delta p, & y &= (b + \Delta b)z + q + \Delta q, \end{aligned}$$

то ихъ кратчайшее разстояніе, по формуламъ аналитической геометріи, выразится черезъ

$$\frac{\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p}{\sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + (a \Delta q - b \Delta p)^2}}; \quad (1)$$

знаменатель всегда перваго порядка, числитель, вообще, второго, и, слѣдовательно, кратчайшее разстояніе, вообще, перваго порядка, и не существуетъ кривой, къ которой данныя прямая были бы касательными.

Но числитель кратчайшаго разстоянія можетъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, выйти бесконечно-малымъ порядка выше второго, и тогда прямая будутъ касательными къ

одной и той же кривой. Мы сейчас докажемъ, что въ такомъ случаѣ онъ точно четвертаго порядка и что, слѣдовательно, кратчайшее разстояніе—третьяго.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ (§ 276):

$$\begin{aligned}\Delta a &= da + \frac{1}{2}d^2a + \frac{1}{6}d^3a + \dots, \\ \Delta b &= db + \frac{1}{2}d^2b + \frac{1}{6}d^3b + \dots, \\ \Delta p &= dp + \frac{1}{2}d^2p + \frac{1}{6}d^3p + \dots, \\ \Delta q &= dq + \frac{1}{2}d^2q + \frac{1}{6}d^3q + \dots,\end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\Delta a \Delta q - \Delta b \Delta p = (dadq - dbdp) + \frac{1}{2}(d^2adq + d^2qda - d^2bdp - d^2pdb) + \dots,$$

при чемъ не выписанные члены—порядка выше третьяго; кромѣ того ясно, что второй членъ второй части есть дифференціалъ перваго. Если, поэтому, послѣдній равенъ нулю, то и второй также равенъ нулю, и для выраженія первой части остаются члены не ниже четвертаго порядка. Легко при этомъ доказать, что членъ четвертаго порядка не исчезаетъ никогда, если только не разсматривается случай плоскихъ кривыхъ, гдѣ кратчайшее разстояніе между двумя касательными строго равно нулю. Дѣйствительно, члены четвертаго порядка будутъ

$$\frac{1}{6}(d^3adq + d^3qda - d^3bdp - d^3pdb) + \frac{1}{4}(d^2ad^2q - d^2bd^2p).$$

Допустимъ, что ихъ сумма равна нулю; по предположенію, имѣемъ:

$$d^2adq + d^2qda - d^2bdp - d^2pdb = 0, \quad (2)$$

откуда посредствомъ дифференцірованія

$$d^3adq + d^3qda - d^3bdp - d^3pdb = 2d^2bd^2p - 2d^2ad^2q. \quad (3)$$

Поэтому условіе, чтобы сумма членовъ четвертаго порядка равнялась нулю, будетъ

$$d^2ad^2q - d^2bd^2p = 0,$$

или

$$\frac{d^2p}{d^2a} = \frac{d^2q}{d^2b}. \quad (4)$$

Это уравненіе выражаетъ, что кривая—плоская. Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (3) (§ 572) посредствомъ дифференцірованія даютъ:

$$\begin{aligned}d^2p &= -zd^2a - dadz, \\ d^2q &= -zd^2b - dbdz,\end{aligned}$$

и уравненіе (4) принимаетъ, такимъ образомъ, видъ

$$\frac{d^2a}{da} = \frac{d^2b}{db},$$

или

$$d\lg a = d\lg b;$$

следовательно,  $\lg a$  и  $\lg b$  имѣютъ постоянную разность, и отношеніе  $\frac{da}{db}$  постоянно. Обозначая его черезъ  $k$ , имѣемъ:

$$da = kdb;$$

значить,

$$a = kb + l, \quad (5)$$

гдѣ  $l$ —постоянная.

Это уравненіе выражаетъ, что прямыя параллельны одной и той же плоскости, и ясно, что въ такомъ случаѣ онѣ могутъ быть касательными къ кривой только тогда, когда всѣ расположены въ одной плоскости. Это же можно доказать и аналитически, замѣчая, что  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  пропорціональны  $a$ ,  $b$  и 1, и что, следовательно,

$$dx = kdy + ldz, \quad (6)$$

откуда

$$x = ky + lz + N, \quad (7)$$

гдѣ  $N$ —постоянная. Уравненіе (7) представляетъ плоскость, въ которой лежитъ кривая, геометрическое мѣсто точекъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

#### УРАВНЕНІЕ СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ

§ 574. Зная уравненія кривой, не трудно найти въ любой ея точкѣ уравненіе соприкасающейся плоскости. Пусть  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будутъ координаты рассматриваемой точки;  $t$ ,  $u$ ,  $v$ —координаты какой-угодно точки соприкасающейся плоскости; эта послѣдняя, проходя черезъ точку  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , имѣетъ уравненіе вида:

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0. \quad (1)$$

Для опредѣленія  $A$ ,  $B$ ,  $C$  выражаемъ, что разстояніе этой плоскости до точки  $M'$ , бесконечно-близкой къ  $M$  и взятой на кривой, есть бесконечно-малая третьяго порядка; называя черезъ  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$ ,  $z + \Delta z$  координаты точки  $M'$ , имѣемъ для ея разстоянія до плоскости выраженіе

$$\frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

и такъ какъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ —конечныя количества, то достаточно выразить, что числитель обращается въ нуль, когда отбрасываемъ бесконечно-малыя порядка выше второго. При такомъ предположеніи (§ 276) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= dx + \frac{1}{2} d^2x, \\ \Delta y &= dy + \frac{1}{2} d^2y, \\ \Delta z &= dz + \frac{1}{2} d^2z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Значитъ, чтобы исчезли всѣ члены первого порядка, должно быть:

$$A dx + B dy + C dz = 0; \quad (3)$$

также, для исчезновенія членовъ второго порядка, имѣемъ:

$$A d^2 x + B d^2 y + C d^2 z = 0. \quad (4)$$

Изъ уравненій (3) и (4) выводимъ:

$$\frac{A}{dy d^2 z - dz d^2 y} = \frac{B}{dz d^2 x - dx d^2 z} = \frac{C}{dx d^2 y - dy d^2 x}. \quad (5)$$

Въ уравненіи (1) можно  $A, B, C$  замѣнить пропорціональными имъ выраженіями, и, слѣдовательно, уравненіе соприкасающейся плоскости будетъ

$$(l - x)(dy d^2 z - dz d^2 y) + (u - y)(dz d^2 x - dx d^2 z) + (v - z)(dx d^2 y - dy d^2 x) = 0. \quad (6)$$

Выборъ независимой переменнѣй, остающейся вполнѣ произвольною, вліяетъ, очевидно, на члены этой формулы, не измѣняя, однако, конечнаго результата.

§ 575. Чтобы дать приложеніе предыдущей формулы, поищемъ соприкасающуюся плоскость ребра возврата данной развертывающейся поверхности. Мы знаемъ (§ 571), что такая плоскость есть именно касательная плоскость къ поверхности, и этотъ извѣстный результатъ, найденный снова при помощи нашихъ формулъ, послужитъ для нихъ лишнимъ подтвержденіемъ.

Пусть

$$x\varphi(\alpha) + y\psi(\alpha) + zF(\alpha) = \varpi(\alpha) \quad (1)$$

будетъ уравненіе подвижной плоскости, въ которой  $\alpha$  обозначаетъ переменный параметръ; развертывающаяся поверхность, огибающая этой плоскости, выразится уравненіемъ (1) и его производною по  $\alpha$

$$x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + zF'(\alpha) = \varpi'(\alpha), \quad (2)$$

а ребро возврата поверхности—двумя уравненіями (1) и (2) и уравненіемъ

$$x\varphi''(\alpha) + y\psi''(\alpha) + zF''(\alpha) = \varpi''(\alpha), \quad (3)$$

производною отъ (2) по  $\alpha$ .

Чтобы найти соприкасающуюся плоскость кривой, представленной уравненіями (1), (2) и (3), нужно изъ этихъ уравненій вывести  $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z$  и полученные значенія подставить въ уравненіе соприкасающейся плоскости. При двукратномъ дифференцированіи уравненія (1) члены, происходящіе отъ измѣненія  $\alpha$ , исчезаютъ въ силу уравненій (2) и (3), и мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} dx\varphi(\alpha) + dy\psi(\alpha) + dzF(\alpha) &= 0, \\ d^2x\varphi(\alpha) + d^2y\psi(\alpha) + d^2zF(\alpha) &= 0, \end{aligned}$$



откуда заключаемъ:

$$\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{F(\alpha)} = \frac{dy d^2 z - dz d^2 y}{\varphi(\alpha)} = \frac{dz d^2 x - dx d^2 z}{\psi(\alpha)},$$

и, слѣдовательно, уравненіе соприкасающейся плоскости будетъ

$$(t - x)\varphi(\alpha) + (u - y)\psi(\alpha) + (v - z)F(\alpha) = 0,$$

или, въ силу уравненія (1),

$$t\varphi(\alpha) + u\psi(\alpha) + vF(\alpha) = \omega(\alpha),$$

что какъ разъ мы и должны были найти.

§ 576. Какъ второе приложеніе, отыщемъ соприкасающуюся плоскость винтовой линіи. Подъ *винтовой линіею* мы разумѣемъ кривую, нанесенную на цилиндръ и при развертываніи послѣдняго переходящую въ прямую линію. Каково бы ни было прямое сѣченіе цилиндра, оно переходитъ при развертываніи въ прямую линію, къ которой всѣ производящія перпендикулярны, и если за начало винтовой линіи принять точку на этомъ прямомъ сѣченіи, то координаты развернутой винтовой линіи, отсчитанныя на производящихъ, будутъ, очевидно, пропорціональны абсциссамъ, отсчитаннымъ на прямомъ сѣченіи, т.-е. дугамъ послѣдняго, оканчивающимся у ихъ основанія. Если, поэтому, назвать черезъ  $s$  дугу прямого сѣченія и координаты  $x$  и  $y$  его точекъ, взятыхъ по двумъ осямъ въ его плоскости, выразить посредствомъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

то, беря за ось  $z$ —овъ линію, параллельную производящимъ цилиндра, и называя черезъ  $z$  ординату точки винтовой линіи, проектированную въ точку  $x, y$  прямого сѣченія, будемъ имѣть:

$$z = ms, \quad (2)$$

гдѣ  $m$ —постоянная, равная котангенсу угла, подъ которымъ винтовая линія пересекаетъ производящія. Функции  $\varphi$  и  $\psi$  не произвольны, мы должны имѣть:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2, \quad (3)$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1. \quad (4)$$

Если за независимую переменную принять  $s$ , то уравненія (1) и (2) дадутъ непосредственно коэффициенты уравненія соприкасающейся плоскости. Имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \varphi'(s) ds, \\ dy &= \psi'(s) ds, \\ dz &= m ds, \\ d^2 x &= \varphi''(s) ds^2, \\ d^2 y &= \psi''(s) ds^2, \\ d^2 z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и, значитъ, находимъ, опуская множитель  $ds^3$ , слѣдующее уравненіе соприкасающейся плоскости:

$$(t-x)m\psi''(s) - (u-y)m\varphi''(s) + (v-z) [\psi'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\psi''(s)] = 0. \quad (6)$$

Не трудно замѣтить, что эта плоскость содержитъ нормаль къ цилиндру и пересекается, такимъ образомъ, послѣдній подъ прямымъ угломъ. Дѣйствительно, нормаль къ цилиндру параллельна соответственной нормали прямого сѣченія и, слѣдовательно, образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны

$$-\psi'(s), \quad \varphi'(s) \text{ и } 0;$$

косинусы угловъ, составляемыхъ съ тѣми же осями нормалью къ плоскости, представленной уравненіемъ (6), будутъ

$$\psi''(s), \quad -\varphi''(s), \quad [\psi'(s)\varphi''(s) - \varphi'(s)\psi''(s)],$$

и условіе перпендикулярности,

$$\psi'(s)\psi''(s) + \varphi'(s)\varphi''(s) = 0,$$

является очевиднымъ слѣдствіемъ уравненія (4).

**§ 577.** Геометрическія разсужденія легко приводятъ къ тому же самому заключенію. Такъ какъ касательныя винтовой линіи составляютъ постоянный уголъ съ производящими цилиндра, то ихъ параллели, проведенныя черезъ одну и ту же точку, образуютъ конусъ вращенія, и сферическая индикатриса винтовой линіи, каково бы ни было основаніе цилиндра, на которомъ она нанесена, представляетъ малый кругъ сферы. Соприкасающіяся плоскости параллельны (§ 566) плоскостямъ большихъ круговъ, касательныхъ къ индикатрисѣ, и, слѣдовательно, касательнымъ плоскостямъ конуса вращенія, для котораго этотъ малый кругъ служитъ основаніемъ и вершина котораго помѣщается въ центрѣ сферы. Но плоскость, касательная къ конусу вращенія, перпендикулярна къ меридіональной плоскости, проходящей черезъ ось конуса и соответственную производящую, и, слѣдовательно, къ плоскости, проходящей черезъ производящую цилиндра, параллельную оси конуса, и черезъ касательную къ винтовой линіи, параллельную производящей конуса, т.-е., окончательно, къ плоскости, касательной къ цилиндру; соприкасающаяся плоскость, будучи перпендикулярною къ плоскости, касательной къ цилиндру, содержитъ нормаль къ послѣднему.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### Двѣ кривизны кривой, соприкасающійся кругъ и соприкасающійся шаръ или сфера (la sphère osculatrice)

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ КРИВИЗНЫ

§ 578. Кривизна дуги кривой есть уголъ между крайними касательными. Средняя кривизна есть отношеніе всей кривизны къ длинѣ дуги, и кривизна въ нѣкоторой точкѣ есть средняя кривизна бесконечно-малой дуги, отсчитанной по кривой отъ этой точки. Эти опредѣленія абсолютно тѣ же, что и для плоскихъ кривыхъ; должно только замѣтить, что въ случаѣ кривой двоякой кривизны крайнія касательныя разсматриваемой дуги не встрѣчаются и что уголъ между ними есть уголъ между двумя прямыми, параллельными ихъ направленіямъ и проведенными черезъ какую-нибудь точку пространства. Бесконечно-малый уголъ между двумя бесконечно-близкими касательными называется такъ же, какъ и въ случаѣ плоскихъ кривыхъ, угломъ смежности, и кривизна есть отношеніе угла смежности къ соотвѣтственной бесконечно-малой дугѣ. Такъ какъ уголъ число отвлеченное, то кривизна можетъ быть представлена обратной величиною  $\frac{1}{\rho}$  нѣкоторой линіи; эта линія  $\rho$  есть радіусъ круга, кривизна котораго равна кривизнѣ кривой въ разсматриваемой точкѣ; его называютъ радіусомъ кривизны.

§ 579. Когда прямая перемѣщается по какому-нибудь закону такимъ образомъ, что каждое изъ ея положеній соотвѣтствуетъ одному изъ значеній, приписываемыхъ перемѣнному параметру, то уголъ между двумя бесконечно-близкими положеніями (§ 6)—того же порядка, что и измѣненіе этого параметра. Если разсматриваемая прямая касательна къ кривой, то координаты точки касанія, очевидно, могутъ выражаться въ функціи параметра, опредѣляющаго прямую, и, слѣдовательно, разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками касанія, будетъ одного порядка съ измѣненіями этого параметра. Такимъ образомъ, уголъ между касательными и разстояніе между ихъ точками касанія—бесконечно-малыя одного порядка, и кривизна, являющаяся ихъ отношеніемъ, имѣетъ въ каждой точкѣ конечное значеніе. Точки, въ которыхъ она равна нулю или бесконечно-велика, точки исключительныя и ни въ коемъ случаѣ не

могутъ образоватъ непрерывной дуги. Линія, кривизна которой въ каждой ея точкѣ равна нулю, есть прямая, а если кривизна линіи въ каждой ея точкѣ бесконечно-велика, то такая линія непремѣнно приводится къ одной точкѣ.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ВТОРОЙ КРИВИЗНЫ

**§ 580.** Отношеніе угла между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями къ дугѣ, раздѣляющей ихъ точки касанія, называется второю кривизною кривой двоякой кривизны. Точно такъ же какъ первая кривизна указываетъ на большее или меньшее отклоненіе отъ прямолинейнаго вида, вторая кривизна указываетъ, такъ сказать, черезъ болѣе или менѣе быстрое измѣненіе соприкасающейся плоскости, на быстроту, съ которою кривая удаляется отъ плоскаго вида.

Когда плоскость перемѣщается по какому-нибудь закону такимъ образомъ, что каждое изъ ея положеній соотвѣтствуетъ одному изъ значеній, приписываемыхъ перемѣнному параметру, то уголъ между двумя бесконечно-близкими положеніями—того же порядка, что и измѣненіе этого параметра. Эта теорема, доказанная для прямой (§ 6), очевидно, прилагается къ плоскости, которая къ ней перпендикулярна и два какихъ-нибудь положенія которой составляютъ уголъ, равный углу между двумя ихъ нормальными. Если рассматриваемая плоскость есть плоскость, соприкасающаяся къ кривой, то координаты точки прикосновенія, очевидно, представляютъ опредѣленные функціи параметра, опредѣляющаго плоскость, и, слѣдовательно, разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками прикосновенія будетъ одного порядка съ измѣненіемъ параметра. Такимъ образомъ, уголъ между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями—одного порядка съ разстояніемъ между ихъ точками прикосновенія, и вторая кривизна имѣетъ въ каждой точкѣ конечное значеніе. Точки, въ которыхъ она равна нулю или бесконечно-велика, точки исключительныя и непрерывную дугу могутъ образоватъ лишь въ случаѣ плоской кривой, соприкасающіяся плоскости которой совпадаютъ, или въ случаѣ прямой линіи, для которой онѣ являются неопредѣленными.

#### ОТНОШЕНІЕ ОБѢИХЪ КРИВИЗНЪ

**§ 581.** Отношеніе обѣихъ кривизнъ кривой въ какой-нибудь ея точкѣ равно геодезической кривизнѣ сферической индикатрисы. Дѣйствительно, пусть  $M$  и  $M'$  будутъ двѣ бесконечно-близкія точки кривой двоякой кривизны;  $P$  и  $P'$  — соотвѣтственныя точки ея сферической индикатрисы (§ 566). Дуга  $PP'$  измѣряетъ уголъ смежности, образуемый касательными въ точкахъ  $M$  и  $M'$ ; плоскости большихъ круговъ, касающихся въ  $P$  и  $P'$  сферической индикатрисы, параллельны (§ 566) соприкасающимся плоскостямъ въ  $M$  и  $M'$ , и, слѣдовательно, уголъ между ними равенъ углу между бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями данной кривой. Геодезическая кривизна кривой, служащей индикатрисою, въ точкѣ  $P$  есть отношеніе угла между двумя большими кругами, касательными въ  $P$  и  $P'$ , къ дугѣ, раздѣляющей ихъ точки касанія, т.-е. отношеніе угла, образуемаго соприкасающимися плоскостями данной кривой въ точкахъ  $M$  и  $M'$ , къ углу смежности, образуемому касательными въ  $P$  и  $P'$  сферической индикатрисы.



тельными въ тѣхъ же точкахъ, а это есть, очевидно, отношеніе второй кривизны къ первой. Чтобы отношеніе обѣихъ кривизнъ кривой было постояннымъ, нужно, чтобы была постоянной кривизна сферической индикатрисы; ея эволюта, всякая дуга которой въ такомъ случаѣ будетъ имѣть длину, равную нулю (§ 553), приведется тогда къ точкѣ, и индикатриса представитъ малый кругъ сферы. Условіемъ же для этого, необходимымъ и достаточнымъ, будетъ, если всѣ касательныя къ данной кривой образуютъ равные углы съ неподвижною прямою, и, слѣдовательно, если кривая представляетъ винтовую линію, нанесенную на цилиндръ, производящія котораго параллельны неподвижной прямой.

Такимъ образомъ, отношеніе обѣихъ кривизнъ винтовой линіи постоянно, и это свойство принадлежитъ исключительно винтовымъ линіямъ, нанесеннымъ притомъ на цилиндръ съ какимъ-угодно основаніемъ.

### Кругъ кривизны

§ 582. Кругъ кривизны кривой въ нѣкоторой точкѣ есть кругъ, расположенный въ соприкасающейся плоскости, касающійся кривой въ рассматриваемой точкѣ и имѣющій въ этой точкѣ кривизну, равную кривизнѣ кривой и одного съ этою кривизною характера.

Можно доказать, согласно этому опредѣленію, что кругъ кривизны кривой въ нѣкоторой точкѣ есть кругъ кривизны плоской кривой, проекціи данной кривой на ея соприкасающуюся плоскость въ этой точкѣ. Дѣйствительно, при замѣнѣ кривой ея проекціею на соприкасающуюся плоскость оба безконечно-малыхъ члена отношенія, измѣряющаго кривизну, подвергаются безконечно-малымъ измѣненіямъ порядка выше перваго, которыми можно поэтому пренебречь. Въ самомъ дѣлѣ, параллели двумъ безконечно-близкимъ касательнымъ и проекція одной изъ нихъ на соприкасающуюся плоскость, соотвѣтствующую другой, образуютъ трехгранный уголъ, въ которомъ разность двухъ плоскихъ угловъ меньше третьяго; но двое изъ плоскихъ угловъ являются здѣсь углами смежности, о которыхъ идетъ рѣчь, а третій представляетъ наклоненіе касательной къ безконечно-близкой соприкасающейся плоскости и, слѣдовательно (§ 567), будетъ второго порядка. Также легко замѣчаемъ, что хорда безконечно-малой дуги и хорда проекціи этой дуги на соприкасающуюся плоскость въ одномъ изъ ея концовъ разнятся на величину, меньшую разстоянія этой соприкасающейся плоскости до другого конца дуги, и, слѣдовательно, на величину, самое большее, третьяго порядка; а такъ какъ каждая дуга отличается отъ своей хорды на безконечно-малую третьяго порядка, то отсюда заключаемъ, что разность дугъ есть также третьяго порядка.

Итакъ, проекція кривой на ея соприкасающуюся плоскость въ нѣкоторой точкѣ имѣетъ, въ этой точкѣ, ту же кривизну и, слѣдовательно, тотъ же кругъ кривизны, что и самая кривая.

### Соприкасающійся кругъ

§ 583. Кругъ кривизны кривой двоякой кривизны является въ то же время, подобно кругу кривизны плоской кривой, соприкасающимся кругомъ; иначе говоря,



онъ приближается къ кривой, въ смежности точки прикосновенія, бесконечно болѣе всякаго другого круга, проходящаго черезъ ту же точку.

Дѣйствительно, если отложить на кривой отъ точки  $M$  ея прикосновенія съ кругомъ кривизны бесконечно-малую дугу перваго порядка  $MM'$ , то разстояніе круга до конца  $M'$  этой дуги будетъ бесконечно-малою третьяго порядка. Въ самомъ дѣлѣ, кругъ кривизны по предыдущему есть соприкасающійся кругъ проекціи кривой на соприкасающуюся плоскость въ точкѣ  $M$ ; слѣдовательно, его разстояніе до проекціи точки  $M'$  на эту соприкасающуюся плоскость—третьяго порядка, и такъ какъ разстояніе точки  $M'$  до ея проекціи само третьяго порядка, то ея разстояніе до круга, являясь гипотенузою такого прямоугольнаго треугольника, катеты котораго—третьяго порядка, будетъ также третьяго порядка.

Никакой другой кругъ, касательный къ кривой въ точкѣ  $M$ , не можетъ раздѣлить съ кругомъ кривизны свойства проходить на бесконечно-маломъ разстояніи порядка выше втораго отъ бесконечно-близкой точки  $M'$ . Дѣйствительно, если бы два различныхъ круга, касаясь взаимно въ точкѣ  $M$ , оказались такими, что разстояніе каждаго изъ нихъ до точки  $M'$  было бы порядка выше втораго, то разстояніе между ними въ смежности ихъ точки прикосновенія было бы также порядка выше втораго, что невозможно. Въ самомъ дѣлѣ, если оба круга лежатъ въ одной плоскости, ихъ прикосновеніе непремѣнно перваго порядка, и разстояніе между ними только втораго порядка; если же они въ разныхъ плоскостяхъ, то, принимая во вниманіе, что эти плоскости пересѣкаются подъ конечнымъ угломъ по общей касательной, видимъ, что точка, взятая на одномъ изъ нихъ на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ точки прикосновенія, находится на бесконечно-маломъ разстояніи втораго порядка отъ касательной, служащей пересѣченіемъ обѣихъ плоскостей, и, значитъ, на бесконечно-маломъ разстояніи также втораго порядка отъ плоскости, въ которой лежитъ второй кругъ; такимъ образомъ, разстояніе взятой точки до этого круга, самое большее, втораго порядка.

Слѣдовательно, кругъ, разстояніе котораго до кривой, въ смежности съ данною точкою, есть бесконечно-малая третьяго порядка, является единственнымъ. Онъ приближается къ кривой бесконечно болѣе всякаго другого круга и потому называется соприкасающимся кругомъ; онъ не отличается, по предыдущему, отъ круга кривизны.

#### ВЫЧИСЛЕНІЕ РАДІУСА КРИВИЗНЫ

**§ 584.** Кривизна кривой двоякой кривизны была опредѣлена (§ 578): это есть отношеніе угла, образуемаго двумя бесконечно-близкими касательными, къ дугѣ между ихъ точками касанія. Радиусъ кривизны есть радиусъ круга, имѣющаго ту же кривизну, что и кривая въ разсматриваемой точкѣ. Кривизна равна единицѣ, раздѣленной на радиусъ кривизны.

Когда даны уравненія кривой, не трудно вычислить, въ каждой точкѣ, кривизну  $\frac{1}{\rho}$ . Для этого отыщемъ сначала выраженіе угла смежности.

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  будутъ углы, составляемые съ осями касательною въ точкѣ  $M$ , и  $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma$  — аналогичные углы, соотвѣтствующіе смежной точкѣ  $M'$ .

Ведемъ, черезъ начало  $O$  координатъ, параллели этимъ двумъ направленіямъ и на каждой изъ нихъ отлагаемъ длину, равную единицѣ. Соединяя концы  $T$  и  $T'$  этихъ длинъ, получаемъ равнобедренный треугольникъ  $OTT'$ , въ которомъ уголъ при вершинѣ  $O$  равенъ искомому углу смежности  $\varepsilon$ ; слѣдовательно, имѣемъ:

$$TT' = 2 \sin \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Такъ какъ  $\varepsilon$  бесконечно-мало, то синусъ можетъ быть замѣненъ дугою, и, значитъ, разстояніе  $TT'$  равно углу смежности. Координаты точки  $T$  будутъ  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ; координаты точки  $T'$  равны тѣмъ же косинусамъ, увеличеннымъ на ихъ дифференціалы. Отсюда заключаемъ, что

$$\overline{TT'}^2 = (d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2$$

и

$$\varepsilon = TT' = \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2}.$$

Это выраженіе, очевидно, приложимо и къ углу между двумя какими-угодно бесконечно-близкими прямыми, составляющими съ осями углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta + d\beta$ ,  $\gamma + d\gamma$ .

Кривизна  $\frac{1}{\rho}$  есть, по опредѣленію, отношеніе угла  $\varepsilon$  къ соответственной бесконечно-малой дугѣ  $ds$ ; слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d \cos \alpha}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d \cos \beta}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d \cos \gamma}{ds} \right)^2. \quad (1)$$

Называя черезъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаты разсматриваемой точки на кривой и черезъ  $s$  длину дуги, отсчитанной отъ какого-угодно неподвижнаго начала, имѣемъ для косинусовъ угловъ, составляемыхъ касательною съ осями, выраженія:

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

формула (1) принимаетъ въ такомъ случаѣ видъ

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left( d \frac{dx}{ds} \right)^2}{ds^2} + \frac{\left( d \frac{dy}{ds} \right)^2}{ds^2} + \frac{\left( d \frac{dz}{ds} \right)^2}{ds^2}. \quad (2)$$

Принимая дугу  $s$  за независимую переменную, имѣемъ:

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{d^2 z}{ds^2},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2. \quad (3)$$

Если желательно независимую переменную оставить неопределенною, то нужно писать

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{ds d^2x - dx d^2s}{ds^3},$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(ds d^2x - dx d^2s)^2 + (ds d^2y - dy d^2s)^2 + (ds d^2z - dz d^2s)^2}{ds^6}. \quad (4)$$

Это выраженіе можно преобразовать при помощи уравненія

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad (5)$$

изъ котораго, посредствомъ дифференцированія, выводимъ:

$$dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = ds d^2s. \quad (6)$$

Дѣйствительно, переписывая уравненіе (4) въ видѣ

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] + (d^2s)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - 2ds d^2s(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z)}{ds^6} \quad (7)$$

и принимая во вниманіе уравненія (5) и (6), находимъ:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{ds^4},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z)^2}{ds^6},$$

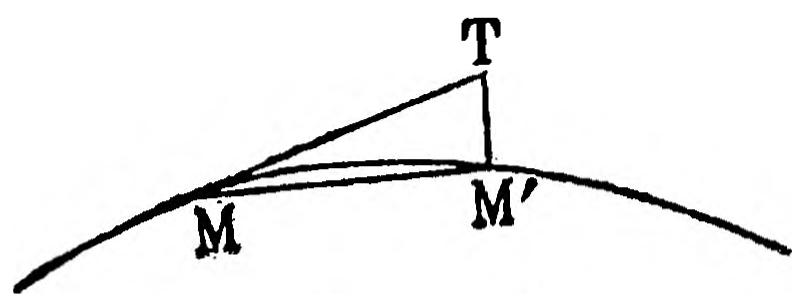
т.-е.

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(dy d^2z - dz d^2y)^2 + (dz d^2x - dx d^2z)^2 + (dx d^2y - dy d^2x)^2}{ds^6}. \quad (8)$$

**§ 585.** Формулу (3) можно изящно истолковать. Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки  $M$  кривой, которая мы рассматриваемъ, какъ функціи дуги  $s$ , отсчитанной отъ произвольнаго начала. Смежная точка, соотвѣтствующая дугѣ  $s + ds$ , будетъ имѣть координатами

$$\begin{aligned} x + \frac{dx}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} ds^2, \\ y + \frac{dy}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{ds^2} ds^2, \\ z + \frac{dz}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{ds^2} ds^2, \end{aligned}$$

если пренебречь безконечно-малыми порядка выше второго. Откладывая (черт. 71) на



Черт. 71

касательной въ  $M$  отъ точки  $M$  длину  $MT$ , равную  $ds$ , будемъ имѣть для координатъ точки  $T$ , вполне строго, выраженія:

$$x + \frac{dx}{ds} ds, \quad y + \frac{dy}{ds} ds, \quad z + \frac{dz}{ds} ds,$$

и, слѣдовательно,

$$\overline{M'T}^2 = \frac{1}{4} ds^4 \left[ \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]; \quad (1)$$

отсюда заключаемъ, по формулѣ (3) предыдущаго параграфа, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2M'T}{ds^2}. \quad (2)$$

Такъ какъ разность между безконечно-малою дугою  $MM'$  и ея хордою — третьяго порядка, то въ треугольникѣ  $TMM'$  разность сторонъ  $MT$ ,  $M'M$  будетъ третьяго порядка и, слѣдовательно, безконечно-малою по отношенію къ основанію  $M'T$ , которое — второго порядка. Отсюда весьма легко заключаемъ, что уголъ  $M'TM$  безконечно-мало отличается отъ прямого и что  $M'T$  можно замѣнить разстояніемъ точки  $M'$  до касательной  $MT$ ; одновременно можно на мѣсто дуги  $ds$  подставить линію  $MM'$ , и уравненіе (2) приметъ тогда видъ, вполне подобный тому, какой былъ выведенъ (§ 499) для плоскихъ кривыхъ.

§ 586. Ту же теорему можно представить подъ другимъ видомъ, которымъ мы будемъ пользоваться. Разстояніе одного изъ концовъ безконечно-малой дуги  $s$  до касательной, проходящей черезъ другой конецъ, выражается черезъ  $\frac{s^2}{2\rho}$ , гдѣ  $\rho$  обозначаетъ радіусъ кривизны дуги.

### ГЛАВНАЯ НОРМАЛЬ

§ 587. Нормаль въ нѣкоторой точкѣ кривой, проходящая черезъ центръ соприкасающагося круга, называется *главною нормалю*. Когда даны уравненія кривой, легко опредѣлить въ каждой ея точкѣ направленіе главной нормали. Задача нѣкоторымъ образомъ рѣшена уже заранѣе формулами, дающими уравненія нормальной и соприкасающейся плоскостей, для которыхъ главная нормаль является пересѣченіемъ. Всѣ-же мы поищемъ выраженіе для косинусовъ угловъ, составляемыхъ этою нормалю съ осями.

Пусть  $M$  и  $M'$  будутъ двѣ смежныя точки кривой; назовемъ черезъ  $s$  дугу, отсчитанную отъ произвольнаго начала и оканчивающуюся въ  $M$ ;  $s + ds$  будетъ дуга, оканчивающаяся въ  $M'$ ; слѣдовательно,  $ds$ , которую мы рассматриваемъ, какъ положительную, обозначаетъ дугу  $MM'$ . Черезъ начало координатъ ведемъ двѣ прямыя  $OP$ ,  $OP'$ , равныя, каждая, по длинѣ единицѣ и параллельныя касательнымъ въ  $M$  и  $M'$ ; прямая  $PP'$  параллельна главной нормали: дѣйствительно, такъ какъ треугольникъ  $OPP'$  равнобедренный и уголъ  $O$  безконечно-малъ, то линія  $PP'$  перпендикулярна къ  $OP$ , т.-е. къ направленію касательной; кромѣ того, плоскость  $POP'$ , въ которой лежитъ  $PP'$ , будучи параллельною двумъ безконечно-близкимъ касательнымъ, парал-

лельна соприкасающейся плоскости: линія, перпендикулярная къ касательной и лежащая въ плоскости, параллельной соприкасающейся плоскости, очевидно, параллельна главной нормали.

Координатами точки  $P$  являются косинусы угловъ, составляемыхъ касательною въ  $M$  съ осями координатъ; называя ихъ черезъ  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ , для координатъ точки  $P'$  имѣемъ выраженія:

$$\cos\alpha + d\cos\alpha, \quad \cos\beta + d\cos\beta, \quad \cos\gamma + d\cos\gamma.$$

Косинусы угловъ  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , составляемыхъ съ осями направлениемъ  $PP'$ , будутъ

$$\left. \begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{d\cos\gamma}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

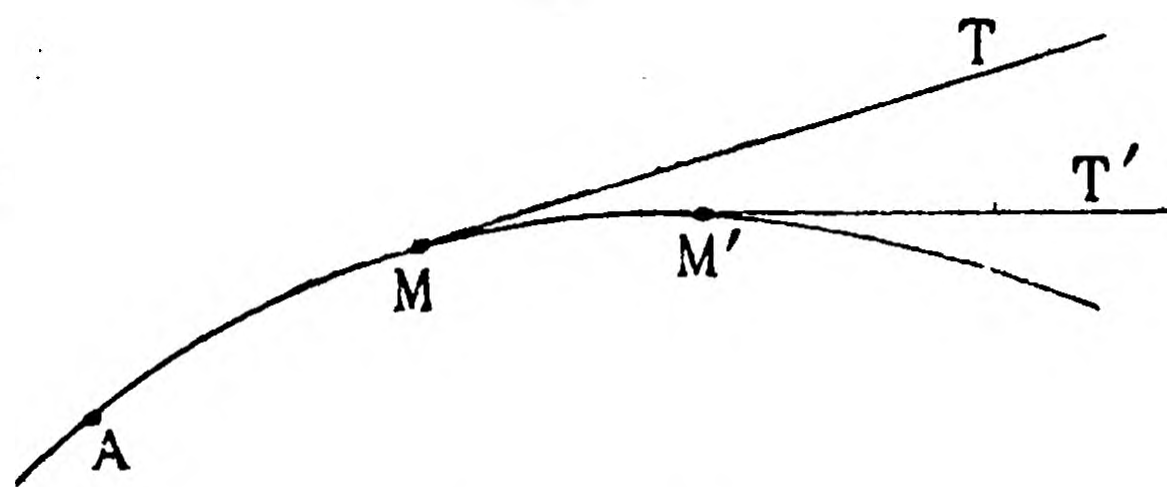
Мы нашли (§ 584), называя черезъ  $\rho$  радіусъ кривизны,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}{ds}.$$

Слѣдовательно, формулы (1) принимаютъ видъ

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \rho \frac{d\cos\alpha}{ds}, \\ \cos\mu &= \rho \frac{d\cos\beta}{ds}, \\ \cos\nu &= \rho \frac{d\cos\gamma}{ds}. \end{aligned}$$

§ 588. Важно различить на главной нормали два противоположныхъ направленія. Предыдущія формулы относятся къ прямой, направляющейся отъ кривой къ центру кривизны. Дѣйствительно,  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  — косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями касательною, направленною отъ точки касанія къ бесконечно-близкой точкѣ, соотвѣтствующей положительному приращенію дуги  $s$ . Поэтому, если  $M$  и  $M'$  — двѣ смежныя



Черт. 72

точки и дуги отсчитаны отъ начала  $A$  (черт. 72), прямыя  $OP$ ,  $OP'$ , рассмотрѣнныя въ доказательствѣ, параллельны  $MT$  и  $M'T'$  и направлены въ томъ же смыслѣ, и



линія, соединяющая  $P$  съ  $P'$ , очевидно, направлена одинаково съ главною нормалью, идущею отъ точки  $M$  къ центру кривизны.

Если бы дуги были отсчитаны въ противоположныхъ направленихъ, приращеніе  $MM'$  дуги  $s$  было бы отрицательнымъ и направлениа, опредѣляемыя косинусами  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$ , измѣнили бы свой смыслъ; то же самое произошло бы съ линіями  $OP$ ,  $OP'$ , и линія  $PP'$ , измѣняясь по направленію, пошла бы въ сторону, противоположную радіусу кривизны, составляющему въ этомъ случаѣ съ осями углы, косинусы которыхъ по знаку противоположны  $d\cos\alpha$ ,  $d\cos\beta$ ,  $d\cos\gamma$ ; но такъ какъ въ настоящемъ случаѣ  $ds$  отрицательно, то эти косинусы выражаются попрежнему, какъ по величинѣ, такъ и по знаку, посредствомъ

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds}.$$

#### ВЫРАЖЕНІЕ ДЛЯ ВТОРОЙ КРИВИЗНЫ

§ 589. Вторая кривизна кривой есть отношеніе угла между двумя безконечно-близкими соприкасающимися плоскостями къ безконечно-малой дугѣ, раздѣляющей ихъ точки прикосновенія; называя черезъ  $\xi$ ,  $\nu$ ,  $\zeta$  углы, составляемыя осью соприкасающейся плоскости съ осями координатъ, пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos\xi &= \frac{dx d^2y - dy d^2x}{D}, \\ \cos\nu &= \frac{dy d^2z - dz d^2y}{D}, \\ \cos\zeta &= \frac{dz d^2x - dx d^2z}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ

$$D = \sqrt{(dx d^2y - dy d^2x)^2 + (dy d^2z - dz d^2y)^2 + (dz d^2x - dx d^2z)^2}; \quad (2)$$

по одной изъ формулъ (§ 584) для радіуса кривизны  $\rho$  имѣемъ:

$$D = \frac{ds^3}{\rho}, \quad (3)$$

и, слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} \cos\xi &= \rho \frac{dx d^2y - dy d^2x}{ds^3}, \\ \cos\nu &= \rho \frac{dy d^2z - dz d^2y}{ds^3}, \\ \cos\zeta &= \rho \frac{dz d^2x - dx d^2z}{ds^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уголъ между двумя соприкасающимися плоскостями равенъ углу между нормальными къ нимъ прямыми; поэтому, если черезъ начало координатъ провести параллели осямъ двухъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей и на каждой изъ нихъ отло-

жить длину, равную единицѣ, то разстояніе между полученными такимъ образомъ точками измѣрить уголъ  $\eta$  между двумя соприкасающимися плоскостями. Такъ какъ координаты этихъ двухъ точекъ, очевидно, слѣдующія:

$$\begin{aligned} & \cos \xi, \quad \cos \nu, \quad \cos \zeta, \\ & \cos \xi + d \cos \xi, \quad \cos \nu + d \cos \nu, \quad \cos \zeta + d \cos \zeta, \end{aligned}$$

то

$$\eta = \sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \nu)^2 + (d \cos \zeta)^2}. \quad (5)$$

Представляя вторую кривизну черезъ  $\frac{1}{r}$ , по опредѣленію имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{\eta}{ds}, \quad (6)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \nu)^2 + (d \cos \zeta)^2}{ds^2}. \quad (7)$$

Представляя, для сокращенія, черезъ

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0$$

уравненіе соприкасающейся плоскости, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \xi &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \zeta &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

отсюда выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} d \cos \xi &= \frac{(B^2 + C^2)dA - ABdB - ACdC}{(A^2 + B^2 + C^2)^{3/2}}, \\ d \cos \nu &= \frac{(C^2 + A^2)dB - BCdC - BA dA}{(A^2 + B^2 + C^2)^{3/2}}, \\ d \cos \zeta &= \frac{(A^2 + B^2)dC - CA dA - CBdB}{(A^2 + B^2 + C^2)^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и, послѣ легкихъ упрощеній, не зависящихъ отъ вида выраженій, представленныхъ буквами  $A, B, C$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \nu)^2 + (d \cos \zeta)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(dA^2 + dB^2 + dC^2) - (AdA + BdB + CdC)^2}}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\eta = \frac{\sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}}{A^2 + B^2 + C^2}; \quad (10)$$

но мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} A &= dyd^2z - dzd^2y, & B &= dzd^2x - dxd^2z, & C &= dxd^2y - dyd^2x, \\ dA &= dyd^3z - dzd^3y, & dB &= dzd^3x - dxd^3z, & dC &= dxd^3y - dyd^3x, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{AdB - BdA}{dz} = \frac{BdC - CdB}{dx} = \frac{CdA - AdC}{dy} = -d^2xdA - d^2ydB - d^2zdC;$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} &= dAd^2x + dBd^2y + dCd^2z, \\ \eta &= \frac{ds(dAd^2x + dBd^2y + dCd^2z)}{A^2 + B^2 + C^2} \end{aligned} \quad (11)$$

и, наконецъ,

$$\frac{\eta}{ds} = \frac{1}{r} = \frac{dAd^2x + dBd^2y + dCd^2z}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (12)$$

Мы нашли (§ 584):

$$A^2 + B^2 + C^2 = [(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2] ds^2,$$

и, значитъ, выраженіе  $\frac{1}{r}$  можно представить подъ видомъ

$$\frac{1}{r} = \frac{dAd^2x + dBd^2y + dCd^2z}{ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]},$$

или, что то же самое, послѣ подстановки значеній  $dA$ ,  $dB$ ,  $dC$ ,

$$\frac{1}{r} = \frac{Ad^3x + Bd^3y + Cd^3z}{ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]}.$$

#### ФОРМУЛЫ СЕРРЕ

**§ 590.** Въ каждой точкѣ кривой двоякой кривизны можно рассмотреть три взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ, положеніе которыхъ глубоко связано со свойствами кривой, а именно: касательную, главную нормаль и перпендикуляръ къ соприкасающейся плоскости. Намъ извѣстны формулы, выражающія косинусы угловъ, образуемыхъ каждымъ изъ этихъ направленій съ осями. Дифференціалы этихъ косинусовъ выражаются также изящно и удовлетворяютъ важнымъ уравненіямъ, даннымъ Серре, съ которыми мы сейчасъ и познакомимся.

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  будут углы, образуемые съ осями касательною въ нѣкоторой точкѣ кривой;  $\xi, \upsilon, \zeta$  — углы, образуемые перпендикуляромъ къ соприкасающейся плоскости;  $\lambda, \mu, \nu$  — углы, образуемые главной нормалью.

Обозначая, какъ всегда, черезъ  $\frac{1}{\rho}$  и  $\frac{1}{r}$  двѣ кривизны кривой, имѣемъ (§ 587):

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \rho \frac{d \cos \alpha}{ds}, \\ \cos \mu &= \rho \frac{d \cos \beta}{ds}, \\ \cos \nu &= \rho \frac{d \cos \gamma}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

откуда выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} d \cos \alpha &= \frac{ds}{\rho} \cos \lambda, \\ d \cos \beta &= \frac{ds}{\rho} \cos \mu, \\ d \cos \gamma &= \frac{ds}{\rho} \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Дифференціалы угловъ  $\xi, \upsilon, \zeta$  можно выразить аналогичнымъ образомъ: дѣйстви-тельно, если черезъ начало координатъ провести перпендикуляры къ двумъ без-конечно-близкимъ соприкасающимся плоскостямъ и на каждомъ изъ нихъ отложить длину, равную единицѣ, то прямая, соединяющая двѣ такимъ образомъ полученныя точки, очевидно, будетъ перпендикулярна къ оси соприкасающейся плоскости и, слѣ-довательно, параллельна этой плоскости; кромѣ того, она лежитъ въ плоскости, пер-пендикулярной къ пересѣченію двухъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плос-костей, и, значитъ, параллельна нормальной плоскости; изъ этихъ двухъ условій вы-текаетъ, что она параллельна главной нормали и составляетъ съ осями углы  $\lambda, \mu, \nu$ ; двѣ точки, соединенныя этою прямою, имѣютъ координатами

$$\begin{aligned} &\cos \xi, \cos \upsilon, \cos \zeta, \\ &\cos \xi + d \cos \xi, \cos \upsilon + d \cos \upsilon, \cos \zeta + d \cos \zeta; \end{aligned}$$

слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{d \cos \xi}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \upsilon)^2 + (d \cos \zeta)^2}}, \\ \cos \mu &= \frac{d \cos \upsilon}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \upsilon)^2 + (d \cos \zeta)^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{d \cos \zeta}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \upsilon)^2 + (d \cos \zeta)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Называя же черезъ  $\eta$  уголъ между двумя смежными соприкасающимися плоскостями, имѣемъ:

$$\eta = \sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \upsilon)^2 + (d \cos \zeta)^2} = \frac{ds}{r};$$

поэтому уравненія (3) принимаютъ видъ

$$\begin{aligned}\cos\lambda &= r \frac{d\cos\xi}{ds}, \\ \cos\mu &= r \frac{d\cos\nu}{ds}, \\ \cos\nu &= r \frac{d\cos\zeta}{ds},\end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned}d\cos\xi &= \frac{ds\cos\lambda}{r}, \\ d\cos\nu &= \frac{ds\cos\mu}{r}, \\ d\cos\zeta &= \frac{ds\cos\nu}{r}.\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ 591. Дифференціалы трехъ другихъ косинусовъ,  $d\cos\lambda$ ,  $d\cos\mu$ ,  $d\cos\nu$ , выводятся изъ только-что полученныхъ. Дѣйствительно, такъ какъ три рассматриваемыя прямыя образуютъ трехгранный уголъ съ тремя прямыми двугранными углами, то сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ ими съ какою-угодно прямою, напр., съ осью  $X$ -овъ, равна единицѣ, и мы имѣемъ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\lambda + \cos^2\xi = 1; \quad (1)$$

отсюда выводимъ:

$$\cos\alpha d\cos\alpha + \cos\lambda d\cos\lambda + \cos\xi d\cos\xi = 0, \quad (2)$$

и, слѣдовательно,

$$d\cos\lambda = -\frac{\cos\alpha}{\cos\lambda} d\cos\alpha - \frac{\cos\xi}{\cos\lambda} d\cos\xi, \quad (3)$$

или, по замѣнѣ  $d\cos\alpha$  и  $d\cos\xi$  ихъ найденными значеніями,

$$d\cos\lambda = -\left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\xi}{r}\right) ds. \quad (4)$$

Такъ же находимъ:

$$\left. \begin{aligned}d\cos\mu &= -\left(\frac{\cos\beta}{\rho} + \frac{\cos\nu}{r}\right) ds, \\ d\cos\nu &= -\left(\frac{\cos\gamma}{\rho} + \frac{\cos\zeta}{r}\right) ds.\end{aligned} \right\} \quad (5)$$

§ 592. Предыдущія формулы позволяютъ вычислить для какой-угодно кривой производныя одной изъ координатъ, взятыя по дугѣ, въ функціи угловъ, опредѣляющихъ касательную, двухъ кривизнъ кривой и ихъ производныхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \cos\alpha, \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \cos\lambda, \\ \frac{d^3x}{ds^3} &= \cos\lambda \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{d\cos\lambda}{ds} = \cos\lambda \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\cos\alpha}{\rho} + \frac{\cos\xi}{r}\right),\end{aligned}$$



и ясно, что слѣдующія производныя можно вычислять послѣдовательно, замѣняя  $d\cos\lambda$ ,  $d\cos\alpha$  и  $d\cos\zeta$  ихъ значеніями; мы увидимъ, что въ нихъ будутъ входить помимо трехъ косинусовъ, только кривизны  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{1}{\rho}$  и ихъ производныя.

#### Ось соприкасающейся плоскости

§ 593. Перпендикуляръ, возставленный къ соприкасающейся плоскости въ центрѣ соприкасающагося круга, часто называется *осью соприкасающагося круга*. Эта прямая есть пересѣченіе двухъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $MM'$  будетъ бесконечно-малая дуга кривой двоякой кривизны и  $MM_1$  — проекція этой дуги на соприкасающуюся плоскость въ точкѣ  $M$ . Пересѣченіе двухъ нормальныхъ плоскостей въ концахъ плоской дуги  $MM_1$  есть, очевидно, ось соприкасающагося круга этой дуги  $MM_1$ , или также ось соприкасающагося круга дуги  $MM'$ , который, какъ мы видѣли (§ 582), является общимъ для обѣихъ дугъ; поэтому достаточно доказать, что замѣна нормальной плоскости въ  $M_1$  къ дугѣ  $MM_1$  нормальной плоскостью въ  $M'$  къ дугѣ  $MM'$  не измѣнитъ предѣла упомянутого пересѣченія. Уголъ между двумя плоскостями, одну изъ которыхъ мы желаемъ замѣнить здѣсь другою изъ нихъ, равенъ углу между касательными, къ которымъ онѣ перпендикулярны, т.-е. углу касательной къ дугѣ  $MM'$  съ соприкасающеюся плоскостью въ  $M$ ; этотъ уголъ (§ 567) есть бесконечно-малая второго порядка. Такимъ образомъ, для совпаденія нормальной плоскости къ  $MM'$  въ  $M'$  съ нормальной плоскостью къ  $MM_1$  въ  $M_1$  достаточно ее повернуть на бесконечно-малый уголъ второго порядка вокругъ нѣкоторой прямой, проходящей черезъ точку  $M'$ , и затѣмъ заставить всѣ ея точки пройти бесконечно-малыя прямыя третьего порядка, равныя и параллельныя  $M'M_1$ : легко видѣть, что каждое изъ этихъ двухъ перемѣщеній измѣняетъ бесконечно-мало пересѣченіе съ неподвижною плоскостью, образующею съ рассматриваемою плоскостью бесконечно-малый уголъ первого порядка.

§ 594. Вычисленіе легко приводитъ къ тому же заключенію. Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты рассматриваемой точки на кривой двоякой кривизны. Уравненіе нормальной плоскости есть

$$(t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = 0. \quad (1)$$

Чтобы получить уравненіе бесконечно-близкой нормальной плоскости, нужно измѣнить  $x, y, z$  соответственно на  $x+dx, y+dy, z+dz$ , и, значитъ, увеличить первую часть уравненія (1) на его дифференціалъ. Слѣдовательно, прямая пересѣченія двухъ нормальныхъ плоскостей получится отъ совмѣстнаго разсмотрѣнія уравненія (1) съ его дифференціаломъ

$$(t-x)d^2x + (u-y)d^2y + (v-z)d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (2)$$

Представляя уравненіе соприкасающейся плоскости въ видѣ

$$A(t-x) + B(u-y) + C(v-z) = 0,$$

имѣемъ (§ 574):

$$\begin{aligned} Adx + Bdy + Cdz &= 0, \\ Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравненія показываютъ, что обѣ плоскости, представленныя уравненіями (1) и (2), перпендикулярны къ соприкасающейся плоскости, къ которой, слѣдовательно, перпендикулярно и ихъ пересѣченіе. Это пересѣченіе проходитъ, кромѣ того, черезъ центръ кривизны, который, будучи расположенъ на главной нормали, на разстояніи  $\rho$  отъ точки  $x, y, z$ , имѣетъ координатами

$$x + \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \quad y + \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \quad z + \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Эти координаты, подставленныя на мѣсто  $t, u, v$ , удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и (2), въ силу извѣстныхъ соотношеній

$$\begin{aligned} dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z &= 0, \\ \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 &= \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned}$$

§ 595. Такъ какъ центръ кривизны находится, по предыдущему, на прямой пересѣченія двухъ безконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей, то его, очевидно, можно разсматривать, какъ пересѣченіе главной нормали съ тою изъ безконечно-близкихъ нормалей, которая ее встрѣчаетъ.

Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей

§ 596. Главныя нормали кривой образуютъ линейчатую поверхность, которая никогда не бываетъ развертывающеюся. Для доказательства замѣтимъ, что поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей къ кривой, имѣетъ касательною плоскостью, въ каждой точкѣ этой кривой, самое соприкасающуюся плоскость кривой. Дѣйствительно, эта касательная плоскость содержитъ двѣ линіи, расположенныя въ соприкасающейся плоскости, а именно, главную нормаль въ разсматриваемой точкѣ, которая служитъ производящею для поверхности, и касательную къ данной кривой, которая, очевидно, принадлежитъ поверхности; если, поэтому, поверхность, представляющая геометрическое мѣсто положеній главной нормали, была бы развертывающеюся, то каждая касательная плоскость оставалась бы одною и тою же вдоль производящей и самая поверхность являлась бы огибающею соприкасающихся плоскостей данной кривой. Но (§ 571) огибающая соприкасающихся плоскостей кривой есть развертывающаяся поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ къ этой кривой; она, очевидно, отлична отъ поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей; такимъ образомъ возникаетъ противорѣчіе при допущеніи, что эта послѣдняя — развертывающаяся. Только однѣ плоскія кривыя представляютъ исключеніе. Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей, и поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ касательныхъ, превращаются тогда въ одну единственную плоскость — плоскость кривой.

§ 597. Изъ предыдущаго замѣчанія вытекаетъ, что геометрическое мѣсто центровъ кривизны кривой двоякой кривизны не имѣетъ касательными главныя нормали этой кривой. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ главныя нормали, будучи касательными къ одной и той же кривой, образовали бы развертывающуюся поверхность: въ этомъ существенное различіе между теоріею кривыхъ двоякой кривизны и теоріею плоскихъ кривыхъ. Кривыя двоякой кривизны имѣютъ, правда, эволюты, теорію которыхъ мы изучимъ въ особой главѣ, но лишь въ случаѣ плоскихъ кривыхъ одна изъ нихъ совпадаетъ съ геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны.

Нѣсколько страницъ, написанныхъ знаменитыми геометрами, прибавили историческій интересъ къ собственной важности предыдущаго замѣчанія. Въ самомъ дѣлѣ, Лагранжъ, когда писалъ теорію аналитическихъ функцій, думалъ, что геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся круговъ можетъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, имѣть касательными главныя нормали кривой; онъ даже ищетъ необходимое для того условіе и не замѣчаетъ, хотя Монжъ уже давно это высказалъ, что однѣ только плоскія кривыя обладаютъ указаннымъ свойствомъ. Ошибка, ускользнувшая отъ знаменитаго автора, была указана Якоби, съ чѣмъ не согласился Пуассонъ, который, ошибаясь относительно подвергнутаго критикѣ мѣста, оспаривалъ вначалѣ точность замѣчанія, а затѣмъ не замедлилъ, по другому поводу, признать ее; вслѣдъ за этимъ Пуансо показалъ, что самый анализъ Лагранжа приводитъ къ точному заключенію, стоитъ только продолжить его вычисленія немного далѣе.

§ 598. Формулы, съ которыми мы познакомились, даютъ, притомъ, возможность весьма просто доказать аналитически, что главныя нормали никогда не бываютъ касательными къ кривой, представляющей геометрическое мѣсто центровъ кривизны.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки кривой;  $a, b, c$  — координаты центра кривизны; сохраняя прежнія (§ 590) обозначенія, имѣемъ:

$$\begin{aligned} a &= x + \rho \cos \lambda, \\ b &= y + \rho \cos \mu, \\ c &= z + \rho \cos \nu, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} da &= dx + \rho d \cos \lambda + \cos \lambda d\rho, \\ db &= dy + \rho d \cos \mu + \cos \mu d\rho, \\ dc &= dz + \rho d \cos \nu + \cos \nu d\rho. \end{aligned}$$

Но если кривая, точки которой имѣютъ координатами  $a, b, c$ , касательна къ главной нормали, то такъ какъ радіусъ кривизны является тогда касательнымъ къ кривой, описываемой однимъ изъ его концовъ, и нормальнымъ къ кривой, описываемой другимъ концомъ, то его приращеніе  $d\rho$  равно (§ 21) перемѣщенію перваго конца, и мы имѣемъ:

$$da = \cos \lambda d\rho, \quad db = \cos \mu d\rho, \quad dc = \cos \nu d\rho.$$

Слѣдовательно, уравненія въ этомъ случаѣ приводятся къ

$$\begin{aligned} dx + \rho d\cos\lambda &= 0, \\ dy + \rho d\cos\mu &= 0, \\ dz + \rho d\cos\nu &= 0. \end{aligned}$$

Замѣняя въ этихъ уравненіяхъ  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  ихъ значеніями  $\cos\alpha ds$ ,  $\cos\beta ds$ ,  $\cos\gamma ds$ , и  $d\cos\lambda$ ,  $d\cos\mu$ ,  $d\cos\nu$  значеніями, найденными въ § 591-мъ, выводимъ:

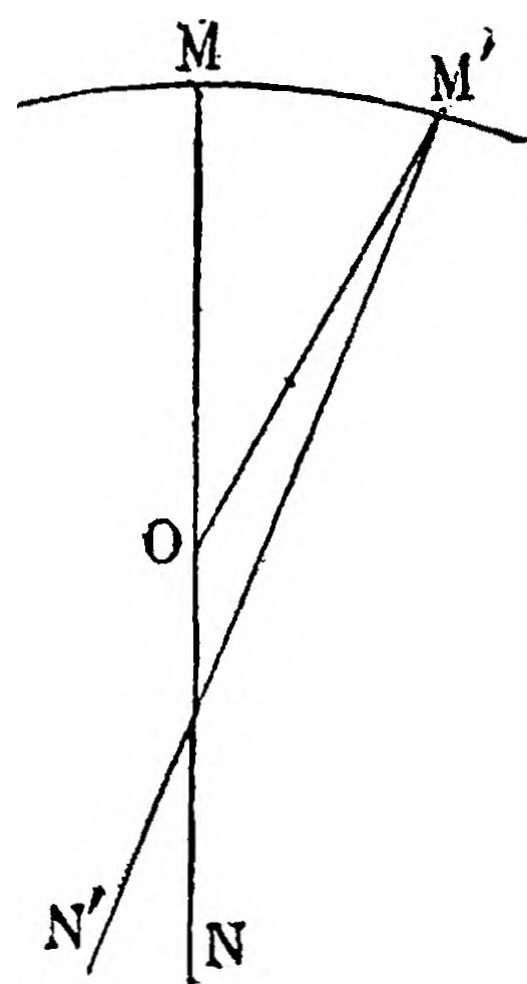
$$\begin{aligned} \frac{\rho}{r} \cos\xi &= 0, \\ \frac{\rho}{r} \cos\nu &= 0, \\ \frac{\rho}{r} \cos\zeta &= 0. \end{aligned}$$

Такъ какъ радіусъ кривизны не можетъ быть нулемъ (§ 579), то эти уравненія требуютъ, чтобы  $r$  было бесконечно-большимъ и чтобы, слѣдовательно, кривая была плоскою.

§ 599. Доказавъ, что главные нормали кривой не могутъ образовать развертывающейся поверхности, естественно себя спросить, будетъ ли это условіе для нихъ единственнымъ и можетъ ли всякая косая поверхность рассматриваться, какъ геометрическое мѣсто главныхъ нормалей къ нанесенной на ней кривой. Но рѣшеніе этого вопроса не можетъ обойтись безъ нѣкоторыхъ выводовъ изъ теоріи поверхностей и потому будетъ изложено въ другой главѣ.

Въ настоящій же моментъ отыщемъ еще выраженіе для угла, образуемаго двумя бесконечно-близкими главными нормальми, а также опредѣлимъ величину и положеніе ихъ кратчайшаго разстоянія, и этимъ закончимъ ученіе о законѣ размѣщенія главныхъ нормалей къ кривой.

Пусть  $MM'$  (черт. 73) будетъ бесконечно-малая дуга кривой двойкой кривизны,



Черт. 73

$MN$  — главная нормаль въ  $M$  и  $M'N'$  — такая же нормаль въ  $M'$ ; эти двѣ прямыя не встрѣчаются, но между нормальми, проведенными черезъ точку  $M'$  къ кривой  $MM'$ , есть одна  $M'O$ , встрѣчающая  $MN$ , и точка пересѣченія  $O$  представляетъ (§ 595) какъ разъ центръ кривизны  $MM'$ . Дѣйствительно, двѣ нормали  $MO$ ,  $M'O$  встрѣтятся непосредственно на пересѣченіи нормальныхъ плоскостей въ  $M$  и въ  $M'$ , т.-е. на оси сопри-



касающагося круга, прямая же  $MN$ , какъ расположенная въ соприкасающейся плоскости, пересѣчетъ эту ось неизбежно въ самомъ центрѣ соприкасающагося круга.

Уголъ между прямыми  $M'O$ ,  $M'N'$  равенъ, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, углу между соприкасающимися плоскостями въ точкахъ  $M$  и  $M'$ . Въ самомъ дѣлѣ, плоскость, содержащая  $M'O$  и  $M'N'$ , есть нормальная плоскость въ точкѣ  $M'$ ; она составляетъ съ плоскостью  $NMM'$ , бесконечно-мало отличающейся отъ соприкасающейся плоскости, уголъ, бесконечно-близкій къ прямому, и уголъ  $OM'N'$  можно разсмотрѣть, какъ наклоненіе  $M'N'$  къ плоскости  $NMM'$ . Эта послѣдняя составляетъ съ соприкасающеюся плоскостью въ  $M$  бесконечно-малый уголъ перваго порядка, для совпаденія же ихъ между собою достаточно повернуть  $NMM'$  вокругъ  $MO$ ; тогда разстоянія различныхъ точекъ  $M'N'$  до этой плоскости измѣнятся только на бесконечно-малыя второго порядка, и, слѣдовательно, углы, образуемые прямою  $M'N'$  съ соприкасающеюся плоскостью въ  $M$  и съ плоскостью  $NMM'$  будутъ отличаться другъ отъ друга на бесконечно-малую второго порядка; а такъ какъ пересѣченіе соприкасающихся плоскостей въ  $M$  и  $M'$  бесконечно-мало отличается (§ 569) отъ касательной, то прямая  $M'N'$ , принадлежащая одной изъ этихъ плоскостей, представить, въ предѣлѣ, перпендикуляръ къ этому пересѣченію, и, значитъ, ея наклоненіе къ другой плоскости можно принять за мѣру угла между обѣими плоскостями. Такимъ образомъ, обозначая  $MM'$  черезъ  $ds$  и называя, какъ всегда, вторую кривизну черезъ  $\frac{1}{r}$ , находимъ, что уголъ  $OM'N'$  равенъ  $\frac{ds}{r}$ .

§ 600. Ведя черезъ какую-нибудь точку пространства параллели тремъ прямымъ  $MN$ ,  $M'N'$ ,  $M'O$ , получаемъ трехгранный уголъ съ прямымъ двуграннымъ угломъ. Соответственный сферическій треугольникъ можетъ быть принятъ за прямолинейный; слѣдовательно, квадратъ плоскаго угла, противолежащаго прямому двугранному, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ плоскихъ угловъ. Но уголъ между  $M'N'$  и  $M'O$ , какъ мы только-что сейчасъ видѣли, равенъ  $\frac{ds}{r}$ ; далѣе, такъ какъ линія  $MO$  равна радіусу кривизны  $\rho$ , то уголъ между  $MO$  и  $M'O$  есть  $\frac{ds}{\rho}$  отсюда заключаемъ, что третій уголъ, составляемый  $M'N'$  и  $MN$ , равенъ

$$\sqrt{\frac{ds^2}{r^2} + \frac{ds^2}{\rho^2}} = ds \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}}.$$

Таково выраженіе для угла между двумя бесконечно-близкими главными нормальми. Бесконечно-малый трехгранный уголъ, только-что нами разсмотрѣнный, даетъ также наклоненіе соприкасающейся плоскости, параллельной одному изъ его плоскихъ угловъ, къ плоскости, параллельной двумъ бесконечно-близкимъ главнымъ нормальмъ, которая параллельна плоскому углу, противолежащему прямому двугранному; косинусъ этого угла равенъ отношенію двухъ прилежащихъ плоскихъ угловъ, т.-е.

$$\frac{\frac{ds}{\rho}}{ds \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{r^2}}};$$

значитъ, тангенсъ этого угла равенъ  $\frac{\rho}{r}$ .



Плоскость, параллельную двумъ главнымъ нормалямъ, можно разсматривать, какъ проходящую черезъ одну изъ нихъ  $MN$ , по которой она, очевидно, будетъ пересѣкать соприкасающуюся плоскость; слѣдовательно, уголъ, составляемый ею съ этою соприкасающеюся плоскостью, равенъ ея наклоненію къ касательной къ кривой, перпендикулярной къ  $MN$ , и, значитъ, равенъ дополненію угла, образуемаго касательною съ кратчайшимъ разстояніемъ между двумя главными нормальми. Отсюда вытекаетъ, что тангенсъ этого послѣдняго угла равенъ  $\frac{r}{\rho}$ .

Если кривая—плоская, то  $\frac{r}{\rho}$  бесконечно-велико; дѣйствительно, само кратчайшее разстояніе въ такомъ случаѣ равно нулю, но его направленіе, всегда опредѣленное, перпендикулярно къ плоскости кривой и, слѣдовательно, къ ея касательной.

Зная направленіе кратчайшаго разстоянія между бесконечно-близкими главными нормальми, не трудно вычислить и его длину; въ самомъ дѣлѣ, она равна проекціи дуги  $ds$  на это извѣстное направленіе, т.-е. произведенію  $ds$  на косинусъ угла, тангенсъ котораго есть  $\frac{r}{\rho}$ .

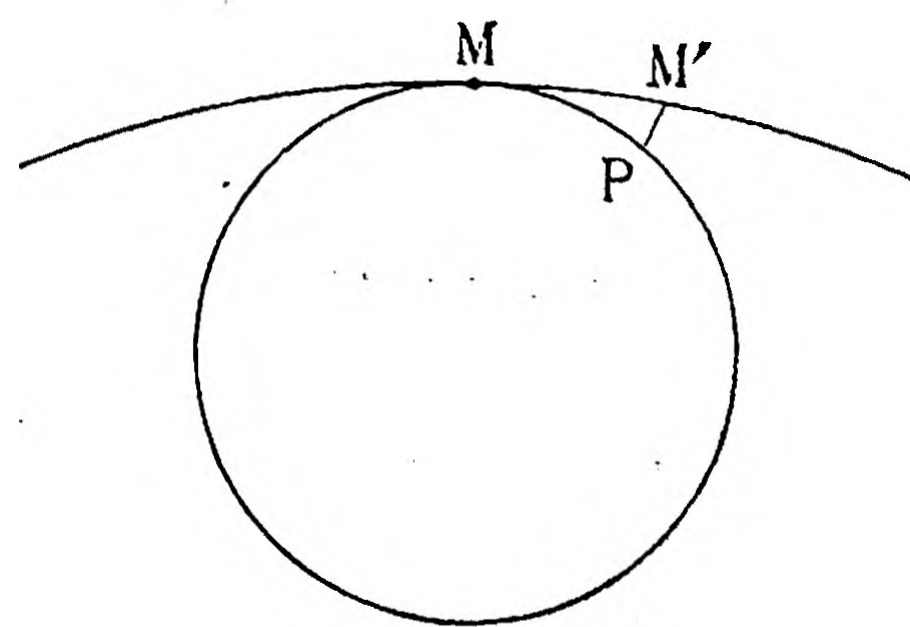
Поэтому кратчайшее разстояніе между двумя бесконечно-близкими главными нормальми выразится формулою

$$\frac{ds\rho}{\sqrt{r^2+\rho^2}}.$$

#### СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ СФЕРА

§ 601. Когда сфера проходитъ черезъ соприкасающійся кругъ кривой, въ точкѣ  $M$ , то разстояніе этой сферы до точки  $M'$ , расположенной на кривой на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ  $M$ , меньше разстоянія той же точки  $M'$  до соприкасающагося круга и, слѣдовательно, самое большее, третьяго порядка. Но между всѣми этими сферами есть одна, приближающаяся къ кривой бесконечно болѣе остальныхъ; ея разстояніе до точки  $M'$  представляетъ бесконечно-малую порядка выше третьяго. Сейчасъ мы докажемъ существованіе такой сферы, называемой соприкасающеюся сферою, и опредѣлимъ ея радіусъ и положеніе ея центра.

Разсмотримъ кривую двоякой кривизны и соприкасающійся кругъ въ точкѣ  $M$  (черт. 74). Пусть  $M'$  будетъ точка кривой, бесконечно-близкая къ  $M$ , и  $M'P$ —раз-



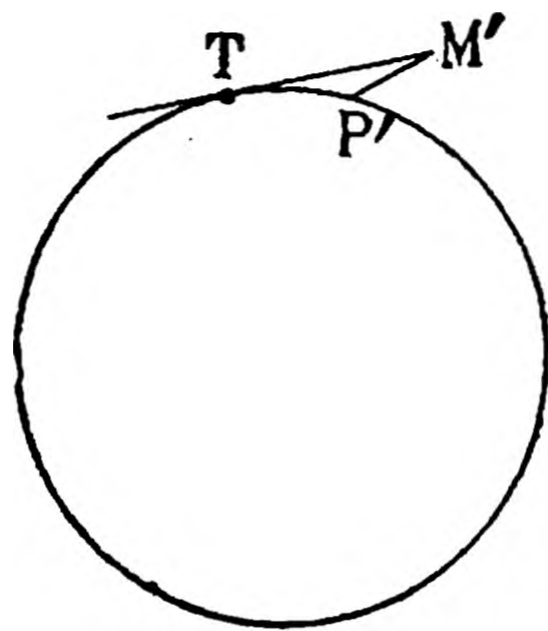
Черт. 74

стояніе точки  $M'$  до соприкасающагося круга въ  $M$ , представляющее бесконечно-малую третьяго порядка. Вообразимъ сферу, проходящую черезъ соприкасающійся

кругъ  $MP$ . Разстояніе точки  $M'$  до этой сферы будетъ прямая  $M'P'$ , нормальная къ сферѣ и образующая съ  $M'P$  въ предѣлѣ прямоугольный треугольникъ, для котораго  $M'P$  является гипотенузою. Такимъ образомъ  $M'P'$  меньше  $M'P$ , и отношеніе этихъ двухъ линій есть синусъ угла при точкѣ  $P$ , т.-е. синусъ угла, подъ которымъ  $M'P$  пересѣкаетъ сферу. Если, поэтому, сфера касательна къ прямой  $M'P$ , то отношеніе обоихъ разстояній въ предѣлѣ равно нулю, и такъ какъ изъ нихъ  $M'P$  — бесконечно-малая третьяго порядка, то  $M'P'$  — бесконечно-малая высшаго порядка. Сфера, для которой это условіе выполнено, называется соприкасающеюся сферою; она опредѣляется кругомъ, содержащимся въ ней, и прямою, касательною къ ней въ точкѣ этого круга.

§ 602. Остановимся здѣсь и покажемъ, на этомъ новомъ примѣрѣ, сколько нужно мелочныхъ предосторожностей въ разсужденіяхъ надъ бесконечно-малыми. Когда точка находится на бесконечно-маломъ разстояніи  $d$  отъ сферы, квадратъ касательной, проведенной изъ этой точки къ сферѣ, есть произведеніе  $d$  на конечную линію, равную въ предѣлѣ діаметру сферы, и слѣдовательно, если касательная — бесконечно-малая третьяго порядка, то разстояніе  $d$  — шестого порядка. На основаніи этого можно было бы утверждать, что разстояніе кривой до соприкасающейся сферы есть бесконечно-малая шестого порядка. Линія  $M'P$ , въ предыдущемъ доказательствѣ, дѣйствительно, третьяго порядка, и если она касательна къ соприкасающейся сферѣ, то нормаль къ этой сферѣ должна быть шестого порядка. Но это разсужденіе, на видъ такое простое, неточно; соприкасающаяся сфера на самомъ дѣлѣ есть предѣльная сфера для той, которая проходитъ черезъ соприкасающійся кругъ въ  $M$ , касаясь линіи  $M'P$ ; для какого-либо положенія точки  $M'$  разстояніе  $M'P$  не касательно къ соприкасающейся сферѣ: оно лишь пересѣкаетъ ее подъ угломъ, стремящимся къ нулю, и этого обстоятельства достаточно, чтобы касательная изъ точки  $M'$  была бесконечно длиннѣе прямой  $M'P'$ .

Дѣйствительно, пусть  $M'T$  (черт. 75) будетъ касательная и  $M'P'$  — прямая, ка-



Черт. 75

сательная въ предѣлѣ и пересѣкающая сферу подъ бесконечно-малымъ угломъ. Имѣемъ:

$$\frac{M'T}{M'P'} = \frac{\sin M'P'T}{\sin M'TP'};$$

оба синуса въ предѣлѣ нули, но ничто не доказываетъ, что ихъ отношеніе конечно; поэтому мы должны ждать аналитическаго изученія вопроса, чтобы сказать съ

точностью, какого порядка разстояніе кривой до соприкасающейся сферы. Здѣсь, при нашемъ доказательствѣ, мы видимъ только, что оно порядка выше третьяго.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ

**§ 603.** Доказавъ существованіе, въ каждой точкѣ кривой, соприкасающейся сферы, отъ которой кривая удаляется, въ смежности точки прикосновенія, бесконечно менѣе соприкасающагося круга, мы дадимъ сейчасъ способъ составить уравненіе этой сферы и опредѣлить по нему центръ и радіусъ.

Пусть

$$(t-a)^2 + (u-b)^2 + (v-c)^2 - R^2 = 0 \quad (1)$$

будетъ уравненіе соприкасающейся сферы въ точкѣ кривой, координаты которой  $x, y, z$ . Разстояніе до этой сферы точки кривой, бесконечно-близкой къ точкѣ прикосновенія, должно быть бесконечно-малою порядка выше третьяго (§ 602). Но это разстояніе—одного порядка съ квадратомъ касательной изъ той же точки къ сферѣ, который выражается, какъ извѣстно, первою частью уравненія (1); значитъ, постоянныя  $a, b, c, R$  должны быть таковы, чтобы уравненіе (1) удовлетворялось при  $t=x, u=y, v=z$  и чтобы, кромѣ того, первая часть являлась бесконечно-малою порядка выше третьяго при замѣнѣ  $x, y, z$  координатами смежной точки, взятой на кривой на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка. Принимая  $x, y, z$  за данныя функціи отъ переменнѣй  $\alpha$ , приращеніе которой  $d\alpha$  соответствуетъ рассматриваемому перемѣщенію на кривой, видимъ, что это условіе равносильно тому, чтобы при измѣненіи  $\alpha$  на  $\alpha + d\alpha$ , въ первой части уравненія (1), и разложеніи затѣмъ по степенямъ  $d\alpha$  коэффициенты членовъ съ  $d\alpha, d\alpha^2$  и  $d\alpha^3$  были по нулю. Слѣдовательно, должно приравнять нулю три первыхъ производныхъ отъ первой части, или, что то же самое, три первыхъ дифференціала, которые мы вычислимъ, оставляя независимую переменную неопредѣленною.

Итакъ, для опредѣленія координатъ  $a, b, c$  центра кривизны будемъ имѣть:

$$\left. \begin{aligned} (x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz &= 0, \\ (x-a)d^2x + (y-b)d^2y + (z-c)d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 &= 0, \\ (x-a)d^3x + (y-b)d^3y + (z-c)d^3z + 3dx d^2x + 3dy d^2y + 3dz d^2z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

**§ 604.** Три предыдущихъ уравненія выражаютъ, что центръ соприкасающейся сферы есть общая точка трехъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей. Дѣйствительно, первое изъ уравненій (2), если рассматривать въ немъ  $a, b, c$ , какъ переменныя, представляетъ нормальную плоскость въ точкѣ  $(x, y, z)$ , а тогда два слѣдующихъ, являющихся первымъ и вторымъ дифференціалами отъ перваго, будучи рассмотрѣны совмѣстно съ нимъ, представляютъ общую точку трехъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей.

Нормальныя плоскости кривой огибаютъ развертывающуюся поверхность, производящими для которой служатъ оси соприкасающихся плоскостей; ребро возврата, къ которому всѣ производящія поверхности касательны, имѣетъ (§ 571) соприкасающи-

мися плоскостями эти самыя нормальныя плоскости, и каждая точка этого ребра возврата, которую можно разсматривать, какъ общую точку трехъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей, совпадаетъ съ центромъ соприкасающейся сферы, пересѣченіемъ трехъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей къ данной кривой.

Слѣдовательно, центръ соприкасающейся сферы въ каждой точкѣ кривой есть соотвѣтственная точка ребра возврата развертывающейся поверхности, огибающей нормальныя плоскости данной кривой и имѣющей производящими оси соприкасающихся круговъ.

**§ 605.** Центръ соприкасающейся сферы есть, по предыдущему, точка встрѣчи трехъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей. Для вычисленія его координатъ нужно разсмотрѣть совмѣстно уравненіе нормальной плоскости съ двумя его первыми дифференціалами, но можно легко придать этимъ уравненіямъ болѣе простой видъ и получить болѣе изящный результатъ.

Если обозначить попрежнему (§ 590) черезъ  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, составляемые касательною съ осями координатъ, то уравненіе нормальной плоскости будетъ

$$(t-x)\cos\alpha + (u-y)\cos\beta + (v-z)\cos\gamma = 0; \quad (1)$$

дифференціалъ, раздѣленный на  $ds$ , есть

$$(t-x)\frac{d\cos\alpha}{ds} + (u-y)\frac{d\cos\beta}{ds} + (v-z)\frac{d\cos\gamma}{ds} - \cos\alpha\frac{dx}{ds} - \cos\beta\frac{dy}{ds} - \cos\gamma\frac{dz}{ds} = 0. \quad (2)$$

Если назвать черезъ  $\lambda, \mu, \nu$  углы главной нормали съ осями, то это уравненіе, въ силу доказанныхъ формулъ (§ 587), приметъ видъ

$$\frac{1}{\rho}[(t-x)\cos\lambda + (u-y)\cos\mu + (v-z)\cos\nu] - 1 = 0. \quad (3)$$

Прежде чѣмъ приступить къ вторичному его дифференцированію, очевидно, можно умножить его на  $\rho$ :

$$(t-x)\cos\lambda + (u-y)\cos\mu + (v-z)\cos\nu - \rho = 0; \quad (4)$$

дифференціалъ будетъ

$$(t-x)\frac{d\cos\lambda}{ds} + (u-y)\frac{d\cos\mu}{ds} + (v-z)\frac{d\cos\nu}{ds} - \frac{d\rho}{ds} = 0; \quad (5)$$

замѣняя здѣсь  $\frac{d\cos\lambda}{ds}$ ,  $\frac{d\cos\mu}{ds}$ ,  $\frac{d\cos\nu}{ds}$  ихъ значеніями (§ 591) и умножая на  $r$ , можемъ написать:

$$(t-x)\cos\xi + (u-y)\cos\psi + (v-z)\cos\zeta - r\frac{d\rho}{ds} = 0. \quad (6)$$

Полученное уравненіе представляетъ плоскость, параллельную соприкасающейся плоскости и проходящую черезъ центръ соприкасающейся сферы, координаты котораго  $t, u, v$  опредѣляются изъ уравненій (1), (4), (6).



Если въ этихъ уравненіяхъ перенести во вторую часть послѣдніе члены и затѣмъ, по возвышеніи въ квадратъ, сложить всѣ три уравненія, то, принимая во вниманіе соотношенія, связывающія косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями тремя взаимно-перпендикулярными прямыми, найдемъ:

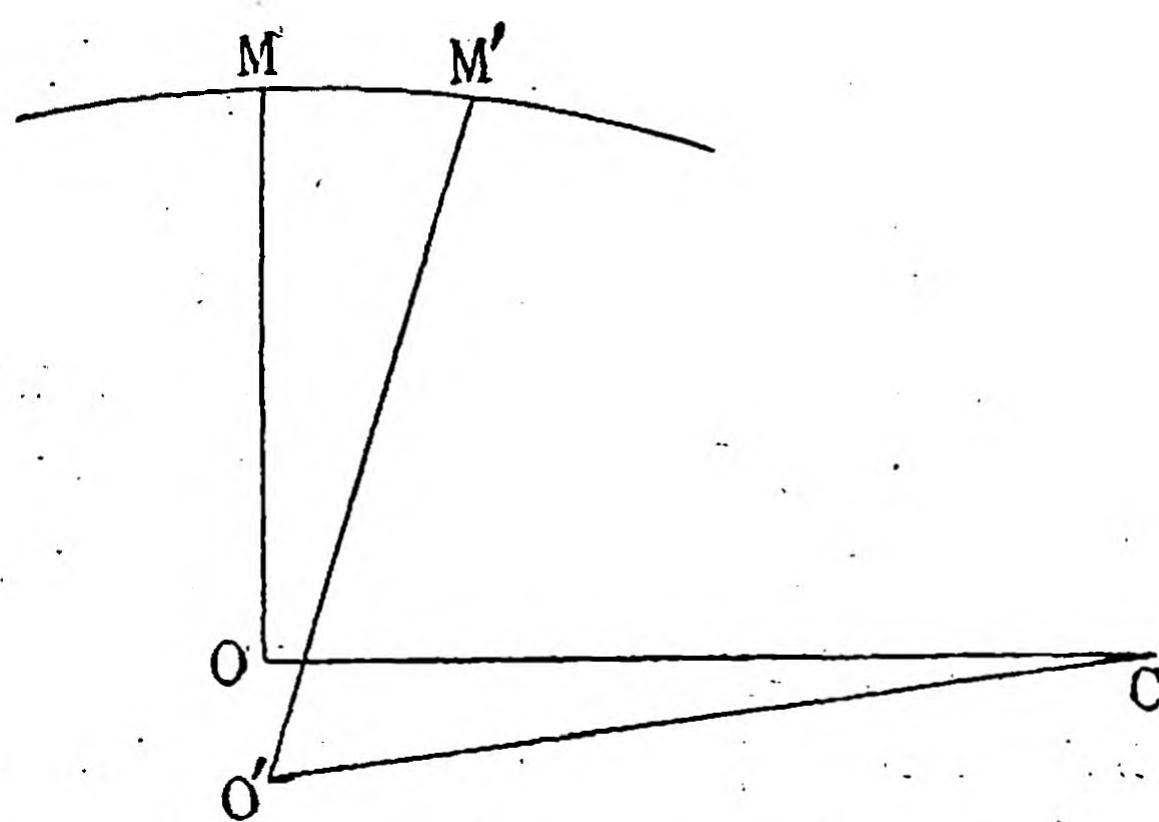
$$(t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2 = \rho^2 + r^2 \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2,$$

что представляетъ выраженіе квадрата радіуса соприкасающейся сферы.

§ 606. Къ тому же результату можно придти чисто геометрическими соображеніями.

Въ самомъ дѣлѣ, центръ соприкасающейся сферы расположенъ на ребрѣ возврата поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ осей соприкасающихся круговъ.

Пусть  $M$  и  $M'$  (черт. 76) будутъ двѣ бесконечно-близкія точки рассматриваемой



Черт. 76

кривой, и  $ds$  — бесконечно-малая дуга  $MM'$ ;  $MO$ ,  $M'O'$  — соответственные радіусы кривизны, и  $OC$ ,  $O'C$  — оси соприкасающихся круговъ, которыя можно рассматривать, какъ пересѣкающіяся въ центрѣ  $C$  соприкасающейся сферы. Линія  $MO$ , находясь въ нормальной плоскости къ  $MM'$ , является касательною къ развертывающейся поверхности, и, слѣдовательно, направленія  $OM$ ,  $OO'$ ,  $OC$  лежатъ въ одной плоскости. Пусть  $\eta$  будетъ уголъ  $OCO'$ , составляемый осями соприкасающихся круговъ въ  $M$  и  $M'$ ; обозначая попережнему вторую кривизну черезъ  $\frac{1}{r}$ , имѣемъ:

$$\eta = \frac{ds}{r}.$$

Полагая  $OC = l$ , и обозначая черезъ  $\theta$  уголъ  $O'OC$ , также, очевидно, имѣемъ:

$$\eta = \frac{OO' \cdot \sin \theta}{l},$$

и, слѣдовательно,

$$l = \frac{r \cdot OO' \cdot \sin \theta}{ds}.$$

Такъ какъ линіи  $MO$ ,  $M'O'$  нормальны къ  $MM'$ , то ихъ разность  $d\rho$  равна



$OO' \cos(MO, M'O')$  (§ 21); принимая же во вниманіе, что  $MO$  перпендикулярна къ  $OC$ , имѣемъ:

$$\cos(MO, M'O') = \sin \theta,$$

и, слѣдовательно,

$$OO' \sin \theta = d\rho;$$

отсюда заключаемъ, что

$$l = r \frac{d\rho}{ds},$$

и такъ какъ радіусъ  $MC$  сферы представляетъ гипотенузу треугольника  $MOC$ , то, наконецъ, имѣемъ:

$$R^2 = \rho^2 + r^2 \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2.$$

§ 607. Когда кривизна кривой постоянна, то  $\frac{d\rho}{ds} = 0$ , и предыдущее уравненіе даетъ  $R = \rho$ . Соприкасающійся кругъ въ этомъ случаѣ есть большой кругъ соприкасающейся сферы. Длина  $l$  обращается въ нуль. Такимъ образомъ, ребро возврата поверхности, огибающей нормальныя плоскости, является въ этомъ случаѣ геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны. Монжъ замѣтилъ, что эта кривая имѣетъ, какъ и данная, постоянный радіусъ кривизны, и что каждая изъ нихъ въ этомъ случаѣ будетъ геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны другой.

Въ самомъ дѣлѣ, называемъ черезъ  $S$  данную кривую и черезъ  $\Sigma$  ребро возврата поверхности, огибающей нормальныя плоскости, которое въ этомъ случаѣ есть заразъ и геометрическое мѣсто центровъ кривизны, и геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ. Касательныя къ кривой  $\Sigma$  будутъ осями соприкасающихся круговъ  $S$ , и, слѣдовательно, нормальныя плоскости  $\Sigma$  — соприкасающимися плоскостями для  $S$ ; огибающая этихъ нормальныхъ плоскостей есть такимъ образомъ развертывающаяся поверхность, для которой  $S$  является ребромъ возврата, и, значитъ, кривая  $S$  есть геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ кривой  $\Sigma$ . Такъ какъ кривыя  $S$  и  $\Sigma$  таковы, что нормальная плоскость къ каждой изъ нихъ есть соприкасающаяся для другой, и такъ какъ главная нормаль есть пересѣченіе соприкасающейся плоскости съ нормальной, то обѣ кривыя имѣютъ однѣ и тѣ же главные нормали, и эти нормали соединяютъ ихъ соотвѣтственные точки. Отсюда вытекаетъ, что для кривой  $\Sigma$ , также какъ и для кривой  $S$ , радіусъ соприкасающейся сферы совпадаетъ съ главною нормалью, и что  $S$ , геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ кривой  $\Sigma$ , есть также геометрическое мѣсто центровъ кривизны послѣдней.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ НѢКОТОРЫХЪ БЕЗКОНЕЧНО-МАЛЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ

§ 608. Разстояніе точки кривой до бесконечно-близкой соприкасающейся плоскости. — Пусть  $MM'$  (черт. 77) будетъ бесконечно-малая дуга кривой двоякой кривизны, которую мы обозначимъ черезъ  $ds$ ; проектируемъ эту дугу на плоскость, перпендику-



Но особое обстоятельство дѣлаетъ этотъ результатъ неточнымъ. Дуга  $PP'$  представляетъ, дѣйствительно, исключительный случай. Радиусъ кривизны въ точкѣ  $P$  равенъ нулю. Въ самомъ дѣлѣ, уголъ смежности  $I$  дуги  $PP'$  есть бесконечно-малая первого порядка, т.-е. одного порядка съ дугою  $MM'$ , обозначенною черезъ  $s$ ; дуга же  $PP'$ , хорда которой равна  $\frac{s^3}{2\rho}$ , второго порядка. Отношеніе угла смежности къ длинѣ дуги такимъ образомъ бесконечно-велико, и радиусъ кривизны равенъ нулю.

Теорема, изъ которой мы вывели уголъ  $TPP'$ , здѣсь не приложима, и намъ нужно, для вычисленія этого угла, прибѣгнуть къ другимъ соображеніямъ. Отнесемъ дугу  $PP'$  къ двумъ прямоугольнымъ осямъ, расположеннымъ въ ея плоскости, беря за ось  $X$ -овъ касательную  $PT$  и за ось  $Y$ -овъ перпендикуляръ къ этой касательной, проведенный черезъ точку  $P$ . Абсциссу точки  $P'$  въ этихъ осяхъ можно разсматривать, какъ равную  $PP'$  т.-е.  $\frac{s^2}{2\rho}$ ; уголъ  $PIT'$ , имѣющій тангенсомъ  $\frac{dy}{dx}$ , равенъ  $\frac{s}{2r}$ ; итакъ, мы имѣемъ:

$$x = \frac{s^2}{2\rho}, \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{2r}, \quad (4)$$

откуда заключаемъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2\rho x)^{\frac{1}{2}}}{2r}; \quad (5)$$

при этомъ, какъ всегда, отбрасываются, о чемъ излишне даже напоминать, бесконечно-малыя порядка высшаго противъ оставляемыхъ.

Изъ уравненія (4), въ силу доказанной теоремы (§ 549), выводимъ:

$$y = \frac{1}{3}(2\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{r}, \quad (6)$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}(2\rho)^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{r} = \frac{2}{3} \frac{dy}{dx} = \frac{s}{3r}; \quad (7)$$

$\frac{y}{x}$  есть тангенсъ угла  $P'PI$ , онъ можетъ замѣнить синусъ въ формулѣ (1), и мы, наконецъ, имѣемъ:

$$P'Q = \frac{s^3}{6r\rho}. \quad (8)$$

Таково разстояніе одного изъ концовъ бесконечно-малой дуги  $s$  до соприкасающейся плоскости въ другомъ концѣ.

**§ 609. Разстояніе между двумя бесконечно-близкими касательными.** — Такъ какъ касательная въ  $M$  проектируется въ точку  $P$ , а касательная въ  $M'$  — по прямой  $P'T'$ , то кратчайшее разстояніе между этими двумя касательными есть перпендикуляръ  $PK$ , опущенный изъ точки  $P$  на  $P'T'$ , и мы, очевидно, имѣемъ:

$$PK = PP' \sin PP'K.$$

По предыдущему  $PP' = \frac{s^2}{2r}$ ; что касается угла  $PP'K$ , то онъ представляетъ разность двухъ уже вычисленныхъ угловъ  $KIP$ ,  $IPR'$ , изъ которыхъ первый равенъ  $\frac{s}{2r}$ , а второй  $\frac{s}{3r}$ ; такимъ образомъ имѣемъ:

$$PP'K = \frac{s}{2r} - \frac{s}{3r} = \frac{s}{6r},$$

и, слѣдовательно,

$$PK = \frac{s^3}{12pr}.$$

Таково выраженіе для кратчайшаго разстоянія между двумя касательными въ концахъ бесконечно-малой дуги  $s$ .

Этими двумя изящными теоремами мы обязаны О. Бонне (O. Bonnet).

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ЭВОЛЮТЫ

**§ 610.** Эволюта кривой есть такая вторая кривая, касательныя къ которой встрѣчаютъ первую и къ ней нормальны.

По этому опредѣленію для полученія эволюты кривой достаточно провести къ ней рядъ нормалей по такому закону, чтобы ихъ совокупность образовала развертывающуюся поверхность, ребро возврата которой будетъ эволютою.

Эту поверхность можно получить слѣдующимъ образомъ: черезъ первую точку  $M$  кривой ведемъ произвольную нормаль; затѣмъ, черезъ точку  $M'$ , смежную съ  $M$ , вторую нормаль, встрѣчающую первую; черезъ точку  $M''$ , смежную съ  $M'$ , нормаль, встрѣчающую вторую, и т. д. Каждая изъ этихъ нормалей, когда задана ея начальная точка, опредѣляется изъ условія находиться въ соотвѣтственной нормальной плоскости и встрѣчать данную прямую. Ихъ совокупность образуетъ многоугольникъ, который, при бесконечномъ сближеніи точекъ  $M$ ,  $M'$ , имѣетъ предѣломъ эволюту. Такъ какъ первая нормаль, исходящая изъ точки  $M$ , произвольна, то каждая кривая имѣетъ безчисленное множество эволютъ. Кривая двойкой кривизны называется, подобно плоской кривой, эвольвентою своей эволюты.

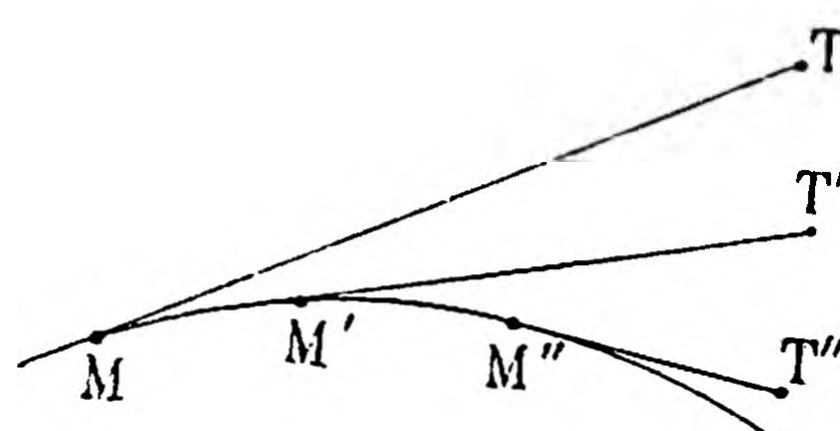
#### Длина дуги эволюты

**§ 611.** Эволюты кривой двойкой кривизны раздѣляютъ характеристическое свойство эволюты плоской кривой: дуга эволюты равна разности касательныхъ въ ея концахъ, отсчитанныхъ отъ точекъ касанія до ихъ пересѣченія съ эвольвентою.

Доказательство, данное въ § 22-мъ, прилагается безъ измѣненія. Когда прямая движется, оставаясь касательною къ кривой, пробѣгаемой однимъ изъ ея концовъ, и нормальною къ кривой, пробѣгаемой другимъ ея концомъ, измѣненіе ея длины между двумя какими-нибудь положеніями равно длинѣ дуги, къ которой прямая оставалась касательною, при чемъ для доказательства безразлично, движется ли прямая въ одной и той же плоскости, или нѣтъ.



Мы видѣли (§ 21), что измѣненіе длины бесконечно-мало перемѣщающейся прямой есть сумма перемѣщеній ея концовъ, соотвѣтственно проектированныхъ на направление прямой. Когда такимъ образомъ одинъ изъ концовъ перемѣщается касательно къ прямой, соотвѣтственный членъ въ измѣненіи длины равенъ бесконечно-малой дугѣ, которую пробѣгаетъ этотъ конецъ; значитъ, чтобы эта дуга представляла все измѣненіе длины, необходимо и достаточно, чтобы перемѣщеніе другого конца было нормально къ прямой. Поэтому, если отложить (черт. 78) на касательныхъ къ какой-



Черт. 78

нибудь кривой такія длины  $MT$ ,  $M'T'$ ,  $M''T''$ , разности между которыми были бы равны дугамъ между ихъ точками касанія, при чемъ первая длина  $MT$  совершенно произвольна, то геометрическое мѣсто точекъ  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$  будетъ нормально ко всѣмъ касательнымъ; слѣдовательно, оно представляетъ эвольвенту данной кривой.

Предыдущій результатъ можно выразить иначе, а именно, что когда нить, на-вернутая на кривую  $MM'M''$  и укрѣпленная въ одномъ изъ своихъ концовъ неподвижно, развертывается съ постояннымъ натяженіемъ развертываемой части вдоль прямой линіи въ направленіи касательной, проведенной въ той точкѣ, гдѣ эта часть отдѣляется отъ кривой, каждая изъ точекъ нити опишетъ эвольвенту.

§ 612. Предыдущимъ доказательствамъ можно легко придать аналитическій видъ.

Пусть  $t, u, v$  будутъ координаты какой-угодно точки данной кривой  $S$ , и  $x, y, z$  — координаты той точки, которую мы получаемъ, отлагая на касательной въ точкѣ  $t, u, v$  отъ точки касанія длину  $l$ . Ищемъ необходимое и достаточное условіе, чтобы кривая  $\Sigma$ , геометрическое мѣсто точекъ  $x, y, z$ , была эвольвентою кривой  $S$ .

Называя черезъ  $\alpha, \beta, \gamma$  углы, составляемые съ осями касательною въ точкѣ  $t, u, v$ , имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= t + l \cos \alpha, \\ y &= u + l \cos \beta, \\ z &= v + l \cos \gamma; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

отсюда выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} dx &= dt + l d \cos \alpha + \cos \alpha dl, \\ dy &= du + l d \cos \beta + \cos \beta dl, \\ dz &= dv + l d \cos \gamma + \cos \gamma dl. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Складываемъ эти уравненія, предварительно умноживъ первое изъ нихъ на  $\cos \alpha$ , второе на  $\cos \beta$  и третье на  $\cos \gamma$ ; принимая при этомъ во вниманіе уравненія

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1, \\ \cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma &= 0, \end{aligned}$$



будемъ имѣть:

$$dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma = \cos \alpha dt + \cos \beta du + \cos \gamma dv + dl. \quad (3)$$

Называя же черезъ  $ds$  дифференціалъ дуги кривой  $S$ , имѣемъ:

$$\cos \alpha = \frac{dt}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{du}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dv}{ds},$$

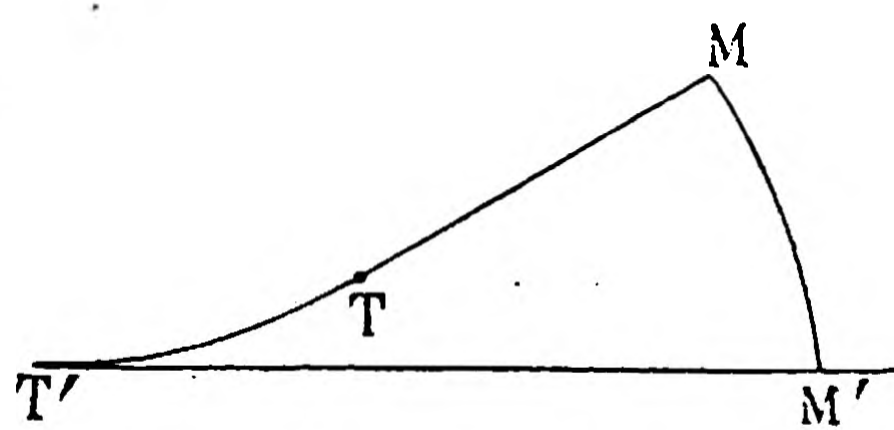
и уравненіе (3) принимаетъ видъ

$$dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma = \frac{dt^2 + du^2 + dv^2}{ds} + dl = ds + dl.$$

Такимъ образомъ, необходимое и достаточное условіе, чтобы  $ds + dl = 0$ , заключается въ томъ, чтобы первая часть была нулемъ и чтобы, слѣдовательно, касательная къ кривой  $\Sigma$ , составляющая съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx, dy, dz$ , была перпендикулярна къ прямой  $l$ , составляющей углы  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**§ 613.** Главная нормаль эволюты параллельна, въ каждой точкѣ, соотвѣтственной касательной эвольвенты.

Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ двѣ смежныя нормали, пересѣкающія эвольвенту въ  $M$  и  $M'$  (черт. 79) и касающіяся эволюты въ соотвѣтственныхъ точкахъ  $T$  и  $T'$ . Главная нормаль въ  $T$  перпендикулярна къ  $MT$  и расположена въ соприкасающейся



Черт. 79

плоскости кривой  $TT'$ , которая (§ 571) касается по  $MT$  развертывающейся поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ  $TM, T'M'$ , и, слѣдовательно, содержитъ касательную къ кривой  $MM'$ , расположенную на этой поверхности. Главная нормаль въ  $T$  и касательная въ  $M$ , лежащія въ одной плоскости и перпендикулярныя обѣ къ прямой  $MT$ , параллельны между собою.

**§ 614.** Легко доказать то же свойство посредствомъ вычисленія. Въ самомъ дѣлѣ, называя черезъ  $t, u, v$  координаты точки  $T$ , черезъ  $x, y, z$  координаты точки  $M$  и черезъ  $l$  разстояніе между ними, мы нашли (§ 612):

$$\left. \begin{aligned} dx &= dt + ld \cos \alpha + \cos \alpha dl, \\ dy &= du + ld \cos \beta + \cos \beta dl, \\ dz &= dv + ld \cos \gamma + \cos \gamma dl; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

но мы имѣемъ:

$$dl + ds = 0,$$

и, кромѣ того,

$$\frac{dt}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{du}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dv}{ds} = \cos \gamma;$$

слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} dl + \cos \alpha dl &= 0, \\ du + \cos \beta dl &= 0, \\ dv + \cos \gamma dl &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и уравненія (1) приводятся къ

$$\left. \begin{aligned} dx &= l d \cos \alpha, \\ dy &= l d \cos \beta, \\ dz &= l d \cos \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Они доказываютъ, что направленіе, составляющее съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx, dy, dz$ , или, что одно и то же, касательная къ эвольвентѣ параллельна направленію, составляющему углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $d \cos \alpha, d \cos \beta, d \cos \gamma$ , т.-е. параллельна главной нормали эволюты.

Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ эволютъ

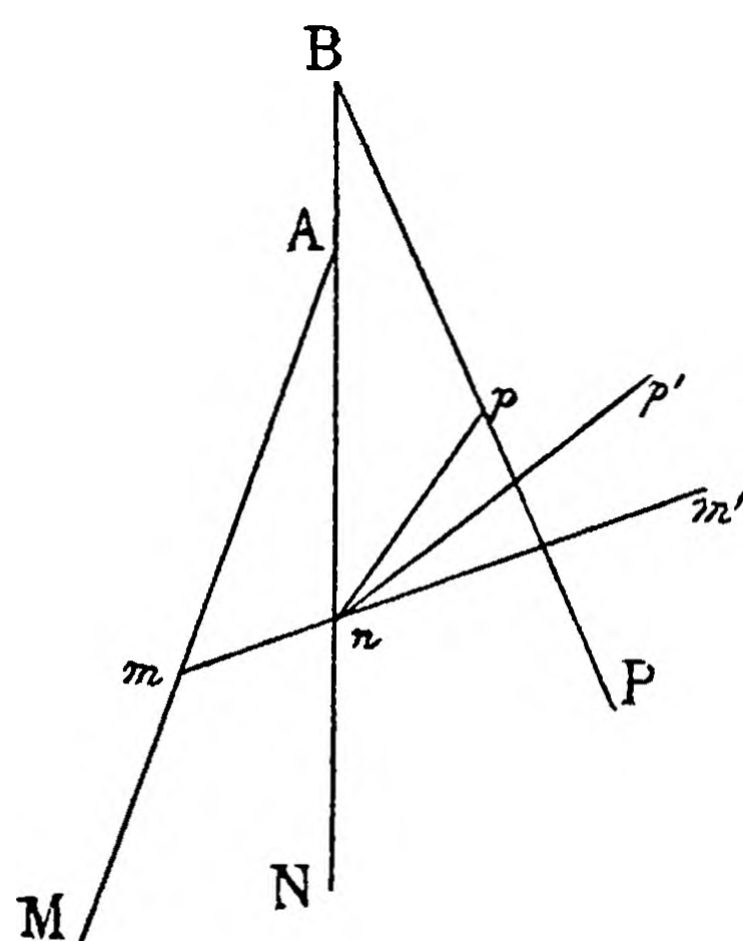
**§ 615.** Каждая точка эволюты есть пересѣченіе двухъ бесконечно-близкихъ нормалей эвольвенты. Значитъ, она расположена на пересѣченіи двухъ бесконечно-близкихъ нормальныхъ плоскостей послѣдней, т.-е. на оси соприкасающейся плоскости; всѣ эволюты кривой расположены, такимъ образомъ, на поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ осей соприкасающихся круговъ. Эта поверхность, геометрическое мѣсто эволютъ, есть также геометрическое мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій нормальныхъ плоскостей эвольвенты, т.-е. развертывающаяся поверхность, огибающая эти нормальные плоскости и имѣющая (§ 604) ребромъ возврата геометрическое мѣсто центровъ соприкасающихся сферъ.

**§ 616.** Эволюты, расположенныя на этой развертывающейся поверхности таковы, что по развертываніи поверхности на плоскость всѣ онѣ переходятъ въ прямыя линіи. Слѣдовательно, онѣ—кратчайшія линіи, какія можно провести между двумя изъ ихъ точекъ на развертывающейся поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ главная нормаль эволюты параллельна касательной въ соотвѣтственной точкѣ эвольвенты, то она перпендикулярна къ нормальной плоскости этой послѣдней, т.-е. къ касательной плоскости развертывающейся поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ эволютъ. Такимъ образомъ, въ каждой точкѣ эволюты ея главная нормаль, а слѣдовательно, и заключающая эту нормаль соприкасающаяся плоскость перпендикулярны къ касательной плоскости развертывающейся поверхности, на которой нанесена рассматриваемая эволюта. Но мы тотчасъ покажемъ, что кривая, соприкасающаяся плоскость которой въ каждой точкѣ нормальна къ развертывающейся поверхности, на которой она нанесена, переходитъ въ прямую линію при развертываніи этой послѣдней.

Для этого ищемъ, какова кривизна линіи, въ которую переходитъ при развертываніи развертывающейся поверхности какая-нибудь нанесенная на ней кривая. Если эта кривизна окажется нулемъ, рассматриваемая кривая переходитъ въ прямую. Рассмотримъ сначала многогранникъ, ребра котораго представляютъ послѣдовательныя

пересѣченія ряда плоскостей; достаточно будетъ предположить, что послѣдовательныя плоскости бесконечно сближаются, чтобы этотъ многогранникъ замѣнился развертывающеюся поверхностью, къ которой полученные результаты будутъ прилагаться, какъ къ предѣлу. Пусть  $AM, BN, BP$  (черт. 80) будутъ три послѣдовательныхъ ребра многогранника, и  $mn, nr$ —двѣ стороны многоугольника, нанесеннаго на поверх-



Черт. 80

ности. Чтобы развернуть многогранникъ на плоскость, нужно послѣдовательно вращать каждую грань вокругъ ребра, соединяющаго ее со смежною гранью. При этомъ движеніи стороны  $mn$  и  $nr$  не измѣнятся по длинѣ, но измѣнится уголъ между ними, или, что то же самое, между ихъ продолженіями. Пусть  $nr'$  будетъ положеніе  $nr$  послѣ вращенія. Полагаемъ  $m'nr = \varepsilon$ ,  $m'nr' = \varepsilon'$ ;  $nr, nr'$ —двѣ производящія конуса, для котораго  $nB$  служитъ осью; значитъ, ихъ плоскость въ предѣлѣ касательна къ этому конусу и, слѣдовательно, перпендикулярна къ плоскости  $Bnr'$ , или, что то же самое, къ  $m'nr'$ . Такимъ образомъ можно, переходя къ предѣлу, разсматривать трехгранный уголъ  $nrr'm'$ , какъ имѣющій прямой двугранный уголъ при ребрѣ  $nr$ , и если положить

$$m'nr = \varepsilon, \quad m'nr' = \varepsilon',$$

то, называя черезъ  $\theta$  двугранный уголъ, составляемый гранями  $r'nr$  и  $nm'$ , будемъ имѣть:

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \operatorname{tang} \varepsilon \cos \theta,$$

или, что то же самое, при бесконечно-малыхъ  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ ,

$$\varepsilon' = \varepsilon \cos \theta.$$

Таково соотношеніе, связывающее уголъ смежности  $\varepsilon'$  кривой, полученной при развертываніи, съ угломъ смежности  $\varepsilon$  первоначальной кривой;  $\theta$  обозначаетъ, очевидно, уголъ между соприкасающеюся плоскостью предѣльной кривой и плоскостью, касательною къ развертывающейся поверхности, проведенною черезъ касательную къ этой кривой. Такъ какъ элементъ кривой при развертываніи не измѣняется по длинѣ, то отношеніе кривизнъ есть отношеніе угловъ смежности, и, слѣдовательно, называя черезъ  $\rho$  радіусъ кривизны кривой, нанесенной на развертывающейся поверхности, и

черезъ  $\rho'$  радіусъ кривизны линіи, въ которую переходитъ разсматриваемая кривая при развертываніи поверхности, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Чтобы  $\frac{1}{\rho'}$  было нулемъ, т.-е. чтобы линія, въ которую переходитъ кривая при развертываніи, была прямою, необходимо и достаточно, чтобы  $\cos \theta$  равнялось нулю, т.-е. чтобы соприкасающаяся плоскость кривой была нормальна къ поверхности, на которой эта кривая нанесена.

**§ 617.** Всѣ эволюты кривой переходятъ въ прямыя линіи при развертываніи развертывающейся поверхности, на которой эти эволюты расположены. Но обратное предложеніе не было бы точнымъ: всякая кривая, нанесенная на развертывающейся поверхности и при развертываніи этой послѣдней переходящая въ прямую линію, не будетъ вслѣдствіе этого эволютою.

Прямыя, въ которыя переходятъ всѣ эволюты, сходятся въ одной точкѣ.

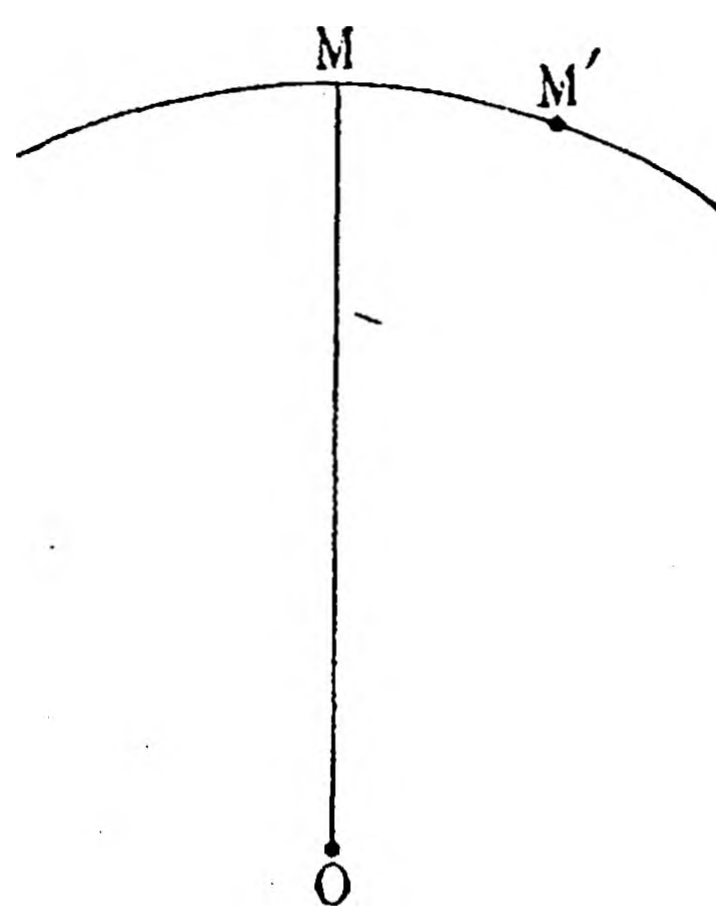
Дѣйствительно, вообразимъ развертывающуюся поверхность, огибающую нормальныя плоскости данной кривой, и на ней всѣ эволюты этой кривой. Пусть будетъ на вернута на ней плоскость, которую мы станемъ развертывать, вращая ее послѣдовательно вокругъ различныхъ производящихъ. Въ любой моментъ производимаго дѣйствія эта плоскость касается поверхности по производящей и на развернутой уже части мы видимъ различныя эволюты въ видѣ прямыхъ, соединяющихся съ частями, оставшимися еще на поверхности; этихъ послѣднихъ прямыхъ касаются какъ разъ на упомянутой производящей, по которой развернутая уже часть поверхности соединяется съ оставшеюся. Всѣ эти точки, въ которыхъ различныя эволюты только-что пересѣкали одну и ту же производящую развертывающейся поверхности, соотвѣтствуютъ одной и только одной точкѣ первообразной кривой, соприкасающейся кругъ которой имѣетъ осью эту производящую; касательныя къ различнымъ эволютамъ сойдутся въ этой точкѣ. Такимъ образомъ, когда касательная плоскость, развертываясь, коснется послѣдовательно развертывающейся поверхности по всѣмъ производящимъ, развертываніе эволютъ преобразуетъ ихъ въ каждый моментъ въ рядъ прямыхъ, сходящихся въ одной перемѣнной точкѣ, которая, будучи увлекаема подвижною касательною плоскостью, опишетъ какъ разъ данную кривую; очевидно, то же самое произойдетъ и въ концѣ развертыванія, и всѣ эволюты дадутъ прямыя, сходящіяся въ одной и той же точкѣ.

**§ 618.** Кривая, служащая геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны данной кривой, расположена на поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ осей соприкасающихся круговъ и содержащей всѣ эволюты, но сама она никогда не представляетъ эволюты. Каждая изъ ея точекъ есть основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ соотвѣтственной точки данной кривой на соотвѣтственную производящую развертывающейся поверхности. Мы только-что видѣли, что каждая изъ точекъ первообразной кривой, связанныхъ по предположенію, съ соотвѣтственными производящими развертывающейся поверхности и вращающихся вмѣстѣ съ касательными плоскостями при развертываніи этой послѣдней, опишетъ самую же кривую по мѣрѣ развертыванія

подвижной плоскости, наверху, по предположенію, на поверхность, такъ что всѣ онѣ соберутся, по окончаніи дѣйствія, въ ту самую точку, въ которой сходятся прямыя, получаемыя отъ развертыванія различныхъ эволютъ. Такимъ образомъ, точки кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны, будутъ, по развертываніи, основаніями перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ неподвижной точки на прямыя, въ которыя переходятъ производящія, т.-е. на касательныя къ кривой, получаемой отъ развертыванія ребра возврата, служащаго геометрическимъ мѣстомъ центровъ соприкасающихся сферъ.

§ 619. Такъ какъ эволюты переходятъ, при развертываніи содержащей ихъ развертывающейся поверхности, въ прямыя, исходящія изъ одной точки, то каждая изъ этихъ прямыхъ въ отдѣльности представляетъ не только соотвѣтствующую ей эволюту, но и всѣ касательныя къ этой эволютѣ, увлекаемыя, по предположенію, развертываніемъ вмѣстѣ съ касательными плоскостями, въ которыхъ онѣ лежатъ. Рассматривая двѣ разныя эволюты, видимъ, что касательныя къ этимъ эволютамъ, соотвѣтствующія одной и той же точкѣ первообразной кривой, расположены въ одной и той же плоскости, нормальной къ этой послѣдней, и слѣдовательно, въ одной и той же плоскости, касательной къ развертывающейся поверхности—геометрическому мѣсту эволютъ. Значитъ, развертываніе не измѣнитъ угла между ними, и, слѣдовательно, этотъ уголъ равенъ углу между двумя прямыми, представляющими по развертываніи эти двѣ эволюты. Поэтому, рассматривая двѣ эволюты одной и той же кривой двойкой кривизны и двѣ группы нормалей къ этой послѣдней, каждая изъ которыхъ представляетъ группу касательныхъ къ одной изъ двухъ взятыхъ эволютъ, заключаемъ, что эти нормали будутъ пересѣкаться по двѣ на данной кривой подъ постояннымъ угломъ. Другими словами, рассматривая нормали, огибающія первую эволюту, видимъ, что для полученія нормалей, огибающихъ вторую эволюту, достаточно повернуть каждую изъ первыхъ на постоянный уголъ вокругъ точки ея встрѣчи съ кривою, не выводя ее, понятно, изъ той нормальной плоскости, въ которой она лежитъ.

§ 620. Рассматривая рядъ нормалей, огибающихъ одну и ту же эволюту, видимъ, что уголъ, составляемый одною изъ нихъ съ соотвѣтственною соприкасаю-



Черт. 81

щеюся плоскостью, измѣняется отъ одной точки до другой и, при замѣнѣ одной



эволюты другою, получаетъ въ каждой точкѣ постоянное приращеніе. Слѣдовательно, дифференціалъ этого угла не зависитъ отъ рассматриваемой эволюты.

Этотъ дифференціалъ равенъ углу между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $M$  и  $M'$  (черт. 81) будутъ двѣ бесконечно-близкія точки кривой двойкой кривизны. Рассматриваемъ ту изъ эволютъ, къ которой касательна главная нормаль въ  $M$ ; такъ какъ наклоненіе этой нормали къ соприкасающейся плоскости равно нулю, то искомый дифференціалъ есть наклоненіе соприкасающейся плоскости въ  $M'$  къ той изъ нормалей въ точкѣ  $M'$ , которая встрѣчаетъ нормаль  $MO$ . Но мы видѣли (§ 599), что это наклоненіе есть какъ разъ уголъ между соприкасающимися плоскостями въ  $M$  и въ  $M'$ .

§ 621. Анализъ легко приводитъ къ тому же заключенію. Такъ же, какъ въ § 590-мъ, рассмотримъ въ точкѣ  $M$  данной кривой касательную, главную нормаль и перпендикуляръ къ соприкасающейся плоскости, образующіе трехгранный уголъ съ тремя прямыми двугранными углами. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \xi, \psi, \zeta$  будутъ углы, составляемые этими тремя прямыми съ осями координатъ; обозначаемъ черезъ  $\lambda', \mu', \nu'$  углы, составляемые съ тѣми же осями тою изъ нормалей, которая касательна къ рассматриваемой эволютѣ; называя черезъ  $\theta$  уголъ этой нормали съ осью соприкасающагося круга, имѣемъ:

$$\cos \theta = \cos \lambda' \cos \xi + \cos \mu' \cos \psi + \cos \nu' \cos \zeta, \quad (1)$$

откуда, дифференцируя, находимъ:

$$\begin{aligned} -\sin \theta d\theta &= \cos \lambda' d\cos \xi + \cos \mu' d\cos \psi + \cos \nu' d\cos \zeta + \\ &+ \cos \xi d\cos \lambda' + \cos \psi d\cos \mu' + \cos \zeta d\cos \nu'; \end{aligned} \quad (2)$$

называя черезъ  $d\eta$  уголъ между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями, имѣемъ:

$$\begin{aligned} d\cos \xi &= d\eta \cos \lambda, \\ d\cos \psi &= d\eta \cos \mu, \\ d\cos \zeta &= d\eta \cos \nu; \end{aligned}$$

кромѣ того,  $d\cos \lambda', d\cos \mu', d\cos \nu'$  пропорціональны косинусамъ угловъ, составляемыхъ съ осями главною нормалью эволюты, параллельною (§ 613) касательной эвольвенты; отсюда вытекаетъ, что сумма трехъ послѣднихъ членовъ уравненія (2) равна нулю, и это уравненіе приводится къ

$$-\sin \theta d\theta = d\eta (\cos \lambda \cos \lambda' + \cos \mu \cos \mu' + \cos \nu \cos \nu'). \quad (3)$$

Множитель при  $d\eta$  во второй части есть косинусъ угла между главною нормалью данной кривой и нормалью, касательной къ эволютѣ; очевидно, онъ равенъ  $\sin \theta$ , и мы, слѣдовательно, имѣемъ:

$$d\theta = -d\eta,$$

что и доказываетъ наше предложеніе.

## УРАВНЕНИЕ ЭВОЛЮТЫ

§ 622. По развѣртываніи на плоскость развѣртывающейся поверхности, заключающей въ себѣ всѣ эволюты, производящія будутъ представлены прямыми линіями, касательными къ одной и той же кривой, въ которую переходитъ ребро возврата. Эволюты переходятъ въ прямыя, пересѣкающія эти различныя касательныя. Называя черезъ  $\alpha$  и  $\alpha_0$  углы, подъ которыми одна и та же эволюта пересѣкаетъ двѣ производящія развѣртывающейся поверхности, и черезъ  $\Omega$  уголъ, составляемый этими производящими по развѣртываніи, очевидно, имѣемъ:

$$\alpha - \alpha_0 = \Omega.$$

Далѣе, для разысканія уравненія эволюты, вычисляютъ уголъ  $\Omega$ , относящійся къ какой-угодно производящей, выбравъ предварительно на развѣртывающейся поверхности начальную производящую, которой соотвѣтствуетъ уголъ  $\alpha_0$ . Такое разысканіе требуетъ употребленія интегральнаго исчисленія. Дифференціалъ  $d\Omega$ , уголъ между двумя безконечно-близкими производящими развѣртывающейся поверхности, есть, въ самомъ дѣлѣ, уголъ между двумя соотвѣтственными соприкасающимися плоскостями данной кривой и можетъ быть принятъ за извѣстный. Предполагаемъ, что  $\Omega$  выражено въ функціи координатъ соотвѣтственной точки данной кривой. Пусть  $\rho$  будетъ радіусъ кривизны въ этой точкѣ, и  $\rho_1$  — ея разстояніе до соотвѣтственной точки эволюты. Разсматривая прямоугольный треугольникъ съ гипотенузою  $\rho_1$  и катетомъ  $\rho$ , видимъ, что противоположный послѣднему уголъ есть  $\alpha_0 + \Omega$ , и, слѣдовательно,

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\sin(\alpha_0 + \Omega)}.$$

Это значеніе  $\rho_1$  дастъ возможность, по выборѣ  $\alpha_0$ , опредѣлить точку эволюты, соотвѣтствующую данной точкѣ эвольвенты, и координаты точки могутъ такимъ образомъ выразиться въ функціи лишь одной переменнѣй, исключеніе которой дастъ уравненія кривой.

§ 623. О. Бонне предложилъ, для аналитическаго опредѣленія эволюты, болѣе прямой методъ, къ которому мы впослѣдствіи вернемся. Здѣсь же мы только покажемъ, какъ онъ сводитъ эту задачу къ опредѣленію функціи, удовлетворяющей нѣ-которому дифференціальному уравненію.

Соприкасающаяся плоскость эволюты содержитъ касательную и главную нормаль; первая изъ этихъ линій нормальна къ эвольвентѣ, а вторая (§ 613) параллельна касательной къ этой послѣдней. Отсюда слѣдуетъ, что соприкасающіяся плоскости эволюты являются плоскостями, проведенными черезъ касательныя къ данной кривой, и притомъ такими, что пересѣченіе каждой изъ нихъ съ безконечно-близкою плоскостью есть нормаль къ кривой.

Выражая это свойство, мы и находимъ указанное уравненіе.

Пусть

$$x = az + p, \quad y = bz + q \quad (1)$$

будутъ уравненія касательной къ данной кривой, гдѣ  $a, b, p, q$  — извѣстныя функціи отъ одного и того же параметра  $\alpha$ , удовлетворяющія (§ 572) условію

$$\frac{da}{dp} = \frac{db}{dq}. \quad (2)$$

Соприкасающаяся плоскость эволюты, проходя черезъ прямую (1), имѣетъ уравненіемъ

$$(x - az - p) + \lambda(y - bz - q) = 0, \quad (3)$$

гдѣ  $\lambda$  представляетъ неизвѣстную функцію отъ  $\alpha$ . Касательная къ эволютѣ, являясь пересѣченіемъ двухъ бесконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей, выразится уравненіемъ (3) и его дифференціаломъ

$$zda + dp + \lambda(zdb + dq) - d\lambda(y - bz - q) = 0. \quad (4)$$

Условіе, чтобы прямая, представленная уравненіями (3) и (4), была перпендикулярна къ касательной данной кривой, есть

$$(a^2 + b^2 + 1)d\lambda + \lambda(bdb - ada) - \lambda^2(adb + bda) = 0,$$

и если найти функцію  $\lambda$ , удовлетворяющую этому уравненію, то будемъ имѣть общее уравненіе соприкасающихся плоскостей эволюты, откуда можемъ (§ 575) вывести уравненіе этой послѣдней.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Даны уравненія кривой; узнать, будетъ ли она вся расположена на одной и той же сферѣ.
2. Плоскость, проведенная черезъ касательную и черезъ точку кривой, взятую на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки касанія, образуетъ съ соприкасающеюся плоскостью уголъ, равный одной трети угла между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями.
3. Перпендикуляръ, общій для двухъ бесконечно-близкихъ касательныхъ, образуетъ съ перпендикуляромъ къ одной изъ соотвѣтственныхъ соприкасающихся плоскостей уголъ, равный половине угла между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями.
4. Даны двѣ кривыя, взаимно-касательныя въ точкѣ  $O$ ; отъ этой точки на каждой изъ нихъ откладывается бесконечно-малая длина, равная  $l$ . Найти предѣльное направленіе линіи, соединяющей концы этихъ длинъ.
5. Центры кривизны всѣхъ проекцій кривой на плоскости, проведенныя черезъ касательную въ точкѣ, расположены на одной и той же прямой, перпендикулярной къ соприкасающейся плоскости кривой.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### Теорія кривизны поверхностей

#### Кривизна нормальных сѣченій

§ 624. Кривизна поверхности въ точкѣ не представляетъ такого простаго понятія, какъ кривизна кривой линіи, и для ея познанія необходимо, повидимому, опредѣлить не только кривизны сѣченій, но еще и кривизну линій двоякой кривизны, проходящихъ черезъ разсматриваемую точку. Эти различныя кривизны связаны, для всякой поверхности, замѣчательными законами, съ которыми мы и познакомимся въ этой главѣ.

Изучимъ сначала кривизну сѣченій на поверхности нормальными плоскостями. Примемъ за ось  $Z$ -овъ нормаль  $OZ$  въ точкѣ  $O$  разсматриваемой поверхности, а за оси  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ взаимно-перпендикулярныя прямыя, проведенныя въ плоскости, касательной въ точкѣ  $O$ . Пусть  $z = \varphi(x, y)$  будетъ уравненіе поверхности, отнесенной къ этимъ осямъ;  $z, \frac{dz}{dx}$  и  $\frac{dz}{dy}$ , очевидно, всѣ трое по нулю при  $x = 0, y = 0$ . Поищемъ кривизну сѣченія на поверхности плоскостью, проведенною черезъ ось  $z$ -овъ и наклоненною подъ угломъ  $\alpha$  къ плоскости  $ZOX$ . Уравненіе такой плоскости есть  $y = x \tan \alpha$ .

Отнесемъ кривую, по которой она пересѣкаетъ данную поверхность, къ двумъ осямъ, расположеннымъ въ ея плоскости, изъ которыхъ одна  $OZ$  совпадала бы какъ разъ съ осью  $Z$ -овъ, а другая  $OX_1$  была бы слѣдомъ этой плоскости на плоскость  $XY$ . Называя черезъ  $x_1$  и  $z_1$  координаты какой-нибудь точки кривой относительно этихъ новыхъ осей и черезъ  $x, y, z$  координаты той же точки относительно первоначальныхъ осей, очевидно, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} z &= z_1, \\ x &= x_1 \cos \alpha, \\ y &= x_1 \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и такъ какъ точка находится на поверхности, уравненіе которой есть  $z = \varphi(x, y)$ , то

$$z_1 = \varphi(x_1 \cos \alpha, x_1 \sin \alpha).$$

Это—уравнение кривой, отнесенной къ осямъ  $OZ, OX_1$ , расположеннымъ въ ея плоскости. Радиусъ кривизны опредѣляется по формулѣ

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2z_1}{dx_1^2}}, \quad (2)$$

въ которой нужно положить  $x_1 = 0$  и, слѣдовательно,  $\frac{dz_1}{dx_1} = 0$ , потому что кривая, очевидно, касательна къ оси  $X_1$ -овъ. Для вычисленія  $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$  достаточно продифференцировать два раза по  $x_1$  уравненіе

$$z = \varphi(x, y),$$

принявъ во вниманіе соотношенія (1); такимъ образомъ получаемъ:

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dx_1} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx_1} = \cos \alpha \frac{dz}{dx} + \sin \alpha \frac{dz}{dy}, \quad (3)$$

и, дифференцируя снова по  $x_1$ , пишемъ:

$$\frac{d^2z}{dx_1^2} = \cos^2 \alpha \frac{d^2z}{dx^2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{d^2z}{dx dy} + \sin^2 \alpha \frac{d^2z}{dy^2}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) относятся къ какой-угодно точкѣ кривой пересѣченія; чтобы вывести отсюда значенія производныхъ въ точкѣ  $O$ , началѣ координатъ, нужно въ этихъ формулахъ положить  $x = 0, y = 0$ ; тогда  $\frac{dz}{dx} = 0, \frac{dz}{dy} = 0$ ; производныя второго порядка  $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$  примутъ опредѣленные значенія, которыя мы обозначимъ черезъ  $A, B, C$ , и мы будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx_1} &= 0, \\ \frac{d^2z}{dx_1^2} &= A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha; \end{aligned}$$

такъ какъ  $z$  ничѣмъ не отличается отъ  $z_1$ , то эти значенія, подставленные въ уравненіе (2), дадутъ радиусъ кривизны  $\rho$ :

$$\rho = \frac{1}{A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha}.$$

Эта формула вполне рѣшаетъ задачу; она показываетъ, что законъ измѣненія радиуса кривизны  $\rho$  всегда одинъ и тотъ же и что только численные значенія трехъ постоянныхъ  $A, B, C$  измѣняются отъ одной поверхности къ другой.

**§ 625.** Съ перваго взгляда можетъ показаться необычайнымъ, что законъ измѣненія радиусовъ кривизны сѣченій какой-нибудь поверхности выведенъ независимо отъ частнаго опредѣленія послѣдней. Въ самомъ дѣлѣ, ничто, повидимому, не связываетъ между собою различныхъ значеній радиуса кривизны. Когда дается точка



поверхности и нормаль въ этой точкѣ, сѣченія поверхности различными плоскостями, проведенными черезъ нормаль, остаются произвольными и независимыми другъ отъ друга. Каковы бы ни были кривыя, лишь бы только онѣ слѣдовали одна за другою, видоизмѣняясь, по непрерывному закону, ихъ совокупность образуетъ поверхность, и ничто, очевидно, не ограничиваетъ закона, по которому могутъ измѣняться радиусы кривизны. Такое весьма простое разсужденіе показываетъ только, что доказанная выше теорема должна представлять исключенія. Уже самое ея доказательство, если всмотрѣться въ него по-внимательнѣе, приводитъ къ тому же заключенію. Дѣйствительно, мы допустили, что производныя  $\frac{d^2z}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dx dy}$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2}$  принимаютъ, при  $x=0$ ,  $y=0$ , опредѣленные значенія, обозначенныя нами черезъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , но можетъ случиться, что рассматриваемыя выраженія, будучи хотя и опредѣленными функціями отъ  $x$  и  $y$ , явятся неопредѣленными для этой частной системы значеній переменныхъ. Подобное обстоятельство имѣетъ, напр., мѣсто при зависимости упомянутыхъ выраженій отъ отношенія  $\frac{y}{x}$ , значеніе котораго, для  $x=0$ ,  $y=0$ , произвольно. Впрочемъ, эти исключенія, являющіяся лишь въ особенныхъ точкахъ нѣкоторыхъ поверхностей, не представляютъ важности: они такъ же мало ослабляютъ общую теорію кривизны, какъ мало вліяетъ существованіе угловой точки въ родѣ вершины конуса на устраненіе существованія касательной плоскости.

§ 626. Кривизна  $\frac{1}{\rho}$  всякаго нормальнаго сѣченія выражается посредствомъ

$$\frac{1}{\rho} = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha.$$

Постоянныхъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , измѣняющихся отъ одной поверхности къ другой, и отъ одной точки къ другой на одной и той же поверхности, достаточно, когда онѣ извѣстны, для опредѣленія кривизнъ всѣхъ нормальныхъ сѣченій.

При измѣненіи угла  $\alpha$  трехчленъ, представляющій  $\frac{1}{\rho}$ , проходитъ черезъ maximum и minimum своего значенія, которые мы получимъ оба за-разъ, приравнявъ производную нулю; такимъ образомъ имѣемъ:

$$(C - A) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha = 0, \\ \text{tang } 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Это уравненіе даетъ для  $\alpha$  безконечное число значеній, которымъ соотвѣтствуютъ, какъ извѣстно, два взаимно-перпендикулярныхъ направленія. Вторая производная отъ  $\frac{1}{\rho}$  есть

$$2(C - A) \cos 2\alpha - 4B \sin 2\alpha.$$

Замѣняя здѣсь послѣдовательно  $\alpha$  двумя значеніями  $\alpha_1$  и  $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ , обращающими первую производную въ нуль, получаемъ, очевидно, двѣ величины съ противоположными знаками. Слѣдовательно, одна изъ нихъ соотвѣтствуетъ maximum'у, а другая minimum'у.

§ 627. Два взаимно-перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченія, кривизны которыхъ представляютъ maximum и minimum, называются главными сѣченіями поверхности въ рассматриваемой точкѣ.

Если мы примемъ плоскости этихъ двухъ сѣченій, существованіе которыхъ теперь доказано, за плоскости  $ZX$  и  $ZY$ , то maximum и minimum кривизны будутъ соответствовать значеніямъ  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и въ обоихъ этихъ случаяхъ мы будемъ имѣть:

$$\operatorname{tang} 2\alpha = 0;$$

значить, постоянная  $B$  должна равняться нулю, и выраженіе для кривизны какого-угодно сѣченія принимаетъ видъ

$$\frac{1}{\rho} = A \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha. \quad (1)$$

Чтобы получить кривизны максимальную и минимальную, которыя мы назовемъ черезъ  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$ , нужно послѣдовательно положить  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и мы найдемъ  $\frac{1}{R_1} = A$ ,  $\frac{1}{R_2} = C$ , такъ что общее выраженіе кривизны нормального сѣченія можно представить подъ видомъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha. \quad (2)$$

Изъ этого уравненія выводится замѣчательная теорема.

Кривизны въ точкѣ  $O$  двухъ взаимно-перпендикулярныхъ нормальныхъ сѣченій мы получимъ, замѣняя  $\alpha$  въ уравненіи (2) послѣдовательно двумя значеніями  $\omega$  и  $\omega + \frac{\pi}{2}$ ; такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{1}{R_1} \cos^2 \omega + \frac{1}{R_2} \sin^2 \omega, \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

а это показываетъ, что сумма кривизнъ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ сѣченій постоянна и равна суммѣ кривизнъ максимальной и минимальной.

§ 628. Мы должны замѣтить, что формула для радіуса кривизны, сообщая послѣднему тотъ или другой знакъ (§ 492), этимъ самымъ указываетъ на характеръ кривизны. Значить, общее выраженіе для  $\frac{1}{\rho}$  можетъ быть, смотря по обстоятельствамъ, положительнымъ или отрицательнымъ, и значеніе нуль, когда оно его достигнетъ, minimum'a собою, вообще, не представитъ. Если, поэтому, радіусъ кривизны сѣченія бесконечно-великъ, то не должно, по нашему анализу, принимать его за

максимальный радиус кривизны, и соответствующее ему сѣченіе не есть, вообще, главное.

Разсмотримъ, напр., косою гиперболоидъ; между всѣми нормальными сѣченіями вокругъ одной точки есть два прямолинейныхъ, для которыхъ кривизна  $\frac{1}{\rho}$  равна нулю. Это не главные сѣченія: дѣйствительно,  $\frac{1}{\rho}$ , обращаясь въ нуль, мѣняетъ знакъ и не приобретаетъ максимальнаго значенія. Главными сѣченіями будутъ тѣ, которыя соответствуютъ наибольшимъ абсолютнымъ значеніямъ  $\frac{1}{\rho}$ , одному — положительному и другому — отрицательному. Такимъ образомъ, главными сѣченіями будутъ два сѣченія съ противоположными кривизнами, каждое изъ которыхъ имѣетъ минимальный радиусъ кривизны между всѣми сѣченіями, изогнутыми въ одномъ и томъ же направленіи.

#### Кривизна наклоннаго сѣченія

§ 629. Разсмотримъ теперь наклонное сѣченіе поверхности и поищемъ выраженіе его радиуса кривизны въ нѣкоторой точкѣ. Беремъ какъ всегда за ось  $Z$ -овъ нормаль къ поверхности въ рассматриваемой точкѣ и направляемъ ось  $X$ -овъ по прямой пересѣченія касательной плоскости и плоскости рассматриваемаго сѣченія. Эта плоскость, проходя такимъ образомъ черезъ ось  $X$ -овъ, будетъ имѣть уравненіемъ

$$y = z \operatorname{tang} \gamma, \quad (1)$$

гдѣ  $\gamma$  обозначаетъ уголъ, образуемый ею съ плоскостью  $XZ$ . Пусть

$$z = \varphi(x, y) \quad (2)$$

будетъ уравненіе поверхности. Отнесемъ кривую пересѣченія къ двумъ такимъ прямоугольнымъ осямъ, расположеннымъ въ ея плоскости, одною изъ которыхъ была бы ось  $X$ -овъ, а другою — слѣдъ плоскости кривой на плоскость  $ZY$ ; называя черезъ  $x_1, z_1$  координаты точки кривой относительно этихъ двухъ осей и черезъ  $x, y, z$  координаты той же точки относительно трехъ первоначальныхъ осей, очевидно, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1, \\ z &= z_1 \cos \gamma, \\ y &= z_1 \sin \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и уравненіе (2), слѣдовательно, даетъ:

$$z_1 \cos \gamma = \varphi(x_1, z_1 \sin \gamma), \quad (4)$$

что представляетъ уравненіе кривой относительно осей, расположенныхъ въ ея плоскости. Выраженіе радиуса кривизны есть

$$\rho_\gamma = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{dz_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}}. \quad (5)$$

Для полученія входящихъ сюда производныхъ  $\frac{dz_1}{dx_1}$ ,  $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$  беремъ производную по  $x_1$  отъ уравненія

$$z = \varphi(x, y);$$

принимая во вниманіе формулы (3), будемъ имѣть:

$$\frac{dz_1}{dx_1} \cos \gamma = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dz_1}{dx_1} \sin \gamma. \quad (6)$$

Это уравненіе дастъ значеніе  $\frac{dz_1}{dx_1}$ ; беря снова производную по  $x_1$ , получимъ  $\frac{d^2z_1}{dx_1^2}$ , но такъ какъ мы желаемъ имѣть значеніе только при  $x_1 = 0$ , то вычисленіе можно упростить. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ кривая, очевидно, касательна къ оси  $X$ -овъ, то  $\frac{dz_1}{dx_1}$  въ рассматриваемой точкѣ обращается въ нуль; въ той же точкѣ, очевидно, обращается въ нуль и  $\frac{dz}{dy}$ . А такъ какъ эти выраженія входятъ множителями въ послѣдній членъ второй части и такъ какъ для полученія производной отъ произведенія нужно дифференцировать за-разъ только одинъ множитель, то оба члена, составляющіе эту производную, будутъ по нулю при  $x_1 = 0$ , и ихъ поэтому бесполезно писать. Такимъ образомъ, для точки  $O$  будемъ имѣть:

$$\frac{d^2z_1}{dx_1^2} \cos \gamma = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad (7)$$

откуда

$$\frac{d^2z_1}{dx_1^2} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\cos \gamma}. \quad (8)$$

Здѣсь  $\frac{d^2z}{dx^2}$  соотвѣтствуетъ точкѣ, координаты которой  $x = 0$ ,  $y = 0$ , и, значитъ, является опредѣленною постоянною, которую мы обозначимъ черезъ  $A$ . Слѣдовательно, принявъ еще во вниманіе, что  $\frac{dz_1}{dx_1}$  равно нулю, для значенія радіуса кривизны  $\rho_\gamma$  будемъ имѣть:

$$\rho_\gamma = \frac{\cos \gamma}{A}. \quad (9)$$

При  $\gamma = 0$  эта формула представитъ радіусъ кривизны нормального сѣченія, проведеннаго черезъ ось  $X$ -овъ, и мы имѣемъ, называя его черезъ  $\rho_N$ ,

$$\rho_N = \frac{1}{A}. \quad (10)$$

Изъ уравненій (9) и (10) выводимъ:

$$\rho_\gamma = \rho_N \cos \gamma, \quad (11)$$

а это показываетъ, что радіусъ кривизны наклоннаго сѣченія равенъ произведенію радіуса кривизны нормального сѣченія, имѣющаго ту же касательную, на косинусъ угла между плоскостями обоихъ сѣченій.

## КРИВИЗНА ЛИНІИ ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

§ 630. Изъ предыдущей теоремы можно вывести радіусъ кривизны какой-угодно линіи, нанесенной на данной поверхности. Дѣйствительно, мы сейчасъ докажемъ, что кривизна, въ какой-угодно точкѣ, линіи, нанесенной на поверхности, равна кривизнѣ плоскаго сѣченія поверхности соприкасающеюся плоскостью разсматриваемой линіи въ этой точкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, соприкасающаяся плоскость находится, въ смежности своей точки соприкосновенія, на бесконечно-маломъ разстояніи третьяго порядка отъ кривой, т.-е., какъ изложено выше (§ 562), точка, взятая на кривой на бесконечно-маломъ разстояніи перваго порядка отъ точки соприкосновенія, находится на бесконечно-маломъ разстояніи третьяго порядка отъ соприкасающейся плоскости. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что она находится также на бесконечно-маломъ разстояніи третьяго порядка отъ пересѣченія поверхности соприкасающеюся плоскостью, и, слѣдовательно, если оставить въ сторонѣ единственно возможный случай исключенія, когда соприкасающаяся плоскость касательна къ поверхности, обѣ кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же соприкасающійся кругъ.

Отсюда слѣдуетъ, что радіусъ кривизны какой-угодно кривой, нанесенной на поверхности, равенъ произведенію радіуса кривизны нормального сѣченія, имѣющаго ту же касательную, на косинусъ угла, составляемаго плоскостью этого сѣченія съ соприкасающеюся плоскостью разсматриваемой кривой. Изъ всѣхъ кривыхъ, нанесенныхъ на данной поверхности и имѣющихъ общую касательную, кривая съ наибольшимъ радіусомъ кривизны есть та, соприкасающаяся плоскость которой нормальна; ихъ, очевидно, безчисленное множество.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНІЯ (*ligne minima*) НА КАКОЙ-УГОДНО ПОВЕРХНОСТИ

§ 631. Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, что геодезическая линія на какой-угодно поверхности владѣетъ тѣмъ свойствомъ, что въ каждой ея точкѣ соприкасающаяся плоскость нормальна къ поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что если нѣкоторая линія есть кратчайшая между двумя ея крайними точками, то она и *подавно* кратчайшая изъ всѣхъ, какія можно провести между двумя какими-угодно промежуточными точками и, въ частности, между двумя бесконечно-близкими точками, произвольно выбранными на ея длинѣ. Но когда даны двѣ бесконечно-близкія точки поверхности, то такъ какъ хорда соединяющей ихъ дуги опредѣленна, эта дуга будетъ тѣмъ меньше (§ 517), чѣмъ больше радіусъ кривизны; съ другой же стороны, касательная опредѣленна, потому что ее можно разсматривать, какъ совпадающую съ заданною бесконечно-малою хордою; такимъ образомъ, радіусъ кривизны будетъ максимумъ, если соприкасающаяся плоскость нормальна къ поверхности, и это условіе должно выполняться въ каждой точкѣ геодезической кривой.

Эта теорема была уже доказана (§ 616) для развертывающейся поверхности; мы ее выведемъ ниже изъ другой теоріи и часто будемъ имѣть случаи для ея приложенія.



БОЛѢ ОБЩІЯ ФОРМУЛЫ, ОТНОСЯЩІЯСЯ КЪ КАКИМЪ-УГОДНО ОСЯМЪ  
КООРДИНАТЪ

§ 632. Получивъ общія формулы, позволяющія выразить радіусъ кривизны какой-угодно кривой, нанесенной на поверхности, въ функціи главныхъ радіусовъ кривизны и элементовъ, опредѣляющихъ положеніе соприкасающейся плоскости этой кривой, необходимо снова пересмотрѣть ту же теорію, не дѣлая никакихъ предположеній относительно координатныхъ осей, чтобы имѣть возможность находить, для всякой поверхности, отнесенной къ какимъ-угодно осямъ, положеніе главныхъ сѣченій и выраженіе ихъ кривизнъ.

Разсмотримъ какую-нибудь кривую, расположенную на данной поверхности, отнесенной къ какимъ-угодно осямъ, и поищемъ выраженіе ея радіуса кривизны.

Если  $x, y, z$  координаты точки кривой, нормальная плоскость въ этой точкѣ имѣетъ уравненіемъ

$$(t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = 0. \quad (1)$$

Уравненіе бесконечно-близкой нормальной плоскости получимъ, измѣняя  $x, y, z$  на  $x+dx, y+dy, z+dz$ , такъ что прямая пересѣченія обѣихъ плоскостей, т.-е. ось соприкасающагося круга, будетъ представлена уравненіемъ (1) совмѣстно съ его дифференціаломъ

$$(t-x)d^2x + (u-y)d^2y + (v-z)d^2z - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0. \quad (2)$$

Эта прямая, выраженная уравненіями (1) и (2), перпендикулярна къ соприкасающейся плоскости рассматриваемой кривой въ центрѣ кривизны этой кривой; находясь въ нормальной плоскости кривой, нанесенной на поверхности, она, очевидно, встрѣтитъ нормаль къ поверхности, уравненія которой

$$\left. \begin{aligned} t-x + p(v-z) &= 0, \\ u-y + q(v-z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и совокупность четырехъ предыдущихъ уравненій даетъ для координатъ точки пересѣченія

$$\left. \begin{aligned} t &= x - \frac{p}{D}, \\ u &= y - \frac{q}{D}, \\ v &= z + \frac{1}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

при чемъ

$$d^2z - pd^2x - qd^2y = Dds^2. \quad (5)$$

Пусть  $N$  будетъ часть нормали къ поверхности, взятая между поверхностью и точкою, координаты которой мы только-что опредѣлили. Искомый радіусъ кривизны

есть, очевидно, проекція  $N$  на соприкасающуюся плоскость кривой. Поэтому, обозначая через  $\theta$  уголъ, составляемый нормалью къ поверхности съ радіусомъ кривизны кривой, будемъ имѣть для выраженія радіуса кривизны  $\rho$

$$\rho = N \cos \theta, \quad (6)$$

но такъ какъ уравненія (4) даютъ

$$N^2 = (t - x)^2 + (u - y)^2 + (v - z)^2 = \frac{1 + p^2 + q^2}{D^2}, \quad (7)$$

то, принявъ во вниманіе уравненіе (5), находимъ:

$$\rho = \frac{\cos \theta \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{\frac{d^2 z}{ds^2} - p \frac{d^2 x}{ds^2} - q \frac{d^2 y}{ds^2}}. \quad (8)$$

Далѣе мы имѣемъ:

$$dz = p dx + q dy;$$

дифференцируя это равенство по дугѣ  $s$  разсматриваемой кривой и полагая

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2 z}{dx dy} = s, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = t,$$

выводимъ:

$$d^2 z = p d^2 x + q d^2 y + r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2,$$

и, слѣдовательно,

$$d^2 z - p d^2 x - q d^2 y = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2, \quad (9)$$

что даетъ:

$$D = r \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + 2s \left( \frac{dx}{ds} \right) \left( \frac{dy}{ds} \right) + t \left( \frac{dy}{ds} \right)^2; \quad (10)$$

называя же черезъ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  углы, образуемые съ осями касательною къ кривой, пишемъ:

$$D = r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta \quad (11)$$

и, наконецъ, имѣемъ:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2} \cos \theta}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta}. \quad (12)$$

Эта формула показываетъ, что такъ какъ  $\alpha$  и  $\beta$  остаются постоянными, то  $\rho$  пропорціонально  $\cos \theta$ . Если соприкасающаяся плоскость разсматриваемой кривой нормальна къ поверхности, то уголъ  $\theta$  обращается въ нуль, и множитель  $\cos \theta$  приводится къ единицѣ; формула (12) выражаетъ тогда радіусъ кривизны нормального сѣченія, проведеннаго черезъ разсматриваемую касательную. Мы видимъ, что для полученія радіуса кривизны всякой другой линіи, расположенной на поверхности и имѣющей ту же касательную, нужно умножить радіусъ нормального сѣченія на косинусъ угла, образуемаго имъ съ радіусомъ кривизны разсматриваемой кривой.

§ 633. Если ограничиться разсмотрѣніемъ нормальныхъ сѣченій въ данной точкѣ  $O$  поверхности, то общее выраженіе ихъ радіуса кривизны, по предыдущему, будетъ

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta}; \quad (1)$$

$p, q, r, s, t$  — частныя производныя, приводящіяся для разсматриваемой точки къ постояннымъ, численное значеніе которыхъ должно считаться извѣстнымъ. Изъ количествъ, измѣняющихся съ направлениемъ сѣченія, будутъ только углы  $\alpha$  и  $\beta$ , составляемые касательною съ осями  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ.

Для опредѣленія направленій главныхъ сѣченій нужно разыскать, при какихъ значеніяхъ  $\alpha$  и  $\beta$  наступаетъ maximum или minimum для знаменателя

$$r\cos^2\alpha+2s\cos\alpha\cos\beta+t\cos^2\beta; \quad (2)$$

$\cos\alpha$  и  $\cos\beta$  связаны съ угломъ  $\gamma$ , который касательная составляетъ съ осью  $z$ -овъ, уравненіемъ

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \quad (3)$$

имѣющимъ мѣсто при всякомъ направленіи, и соотношеніемъ

$$\cos\gamma=p\cos\alpha+q\cos\beta, \quad (4)$$

выражающимъ, что направленіе касательной перпендикулярно къ нормали, образующей, какъ извѣстно, съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $p, q$ , — 1.

Исключеніе  $\cos\gamma$  между двумя уравненіями (3) и (4) даетъ:

$$(1+p^2)\cos^2\alpha+2pq\cos\alpha\cos\beta+(1+q^2)\cos^2\beta=1; \quad (5)$$

такъ какъ выраженіе (2) должно достигать maximum'a или minimum'a подъ условіемъ, чтобы удовлетворялось уравненіе (5), то нужно приравнять нулю два дифференціала, и мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} (r\cos\alpha+s\cos\beta)d\cos\alpha+(s\cos\alpha+t\cos\beta)d\cos\beta &= 0, \\ [(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta]d\cos\alpha+[(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha]d\cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

Исключая отсюда дифференціалы, находимъ:

$$\frac{r\cos\alpha+s\cos\beta}{(1+p^2)\cos\alpha+pq\cos\beta}=\frac{t\cos\beta+s\cos\alpha}{(1+q^2)\cos\beta+pq\cos\alpha}, \quad (6)$$

т.-е.

$$[pqt-(1+q^2)s]\cos^2\beta+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]\cos\alpha\cos\beta+[(1+p^2)s-pqr]\cos^2\alpha=0, \quad (7)$$

и это уравненіе вмѣстѣ съ соотношеніями (3) и (4) опредѣлитъ направленіе главныхъ нормалей. Можно легко показать, что ихъ направленія взаимно-перпендикулярны. Въ самомъ дѣлѣ, пишемъ уравненіе (7) подъ видомъ

$$A\cos^2\beta+B\cos\alpha\cos\beta+C\cos^2\alpha=0. \quad (8)$$

Обозначая через  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  углы, составляемые касательными къ главнымъ сѣченіямъ съ осями, имѣемъ:

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= p \cos \alpha + q \cos \beta, \\ \cos \gamma' &= p \cos \alpha' + q \cos \beta',\end{aligned}$$

и уравненіе, выражающее перпендикулярность,

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

можетъ быть замѣнено уравненіемъ

$$\cos \alpha \cos \alpha' (1 + p^2) + \cos \beta \cos \beta' (1 + q^2) + pq (\cos \alpha \cos \beta' + \cos \beta \cos \alpha') = 0,$$

или, по раздѣленіи на  $\cos \beta \cos \beta'$ , уравненіемъ

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} (1 + p^2) + (1 + q^2) + pq \left( \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} \right) = 0. \quad (9)$$

Но  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'}$  — два корня уравненія (7), въ которомъ  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$  разсматривается, какъ неизвѣстная; поэтому имѣемъ:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} &= -\frac{A}{C}, \\ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'} &= -\frac{B}{C},\end{aligned}$$

и уравненіе (9) принимаетъ видъ

$$-\frac{A}{C} (1 + p^2) + (1 + q^2) - \frac{B}{C} pq = 0,$$

или

$$A(1 + p^2) + C(1 + q^2) - Bpq = 0,$$

что обращается въ тождество при замѣнѣ  $A, B, C$  ихъ значеніями.

§ 634. Направленія главныхъ нормалей опредѣлены; намъ остается найти выраженіе соотвѣтственныхъ радіусовъ кривизны. Для этого возвращаемся къ уравненію

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r \cos^2 \alpha + 2s \cos \alpha \cos \beta + t \cos^2 \beta} \quad (1)$$

и къ соотношенію

$$\frac{r \cos \alpha + s \cos \beta}{(1 + p^2) \cos \alpha + pq \cos \beta} = \frac{t \cos \beta + s \cos \alpha}{(1 + q^2) \cos \beta + pq \cos \alpha}. \quad (6)$$

Если умножить на  $\cos \alpha$  оба члена дроби, образующей первую часть уравненія (6), и на  $\cos \beta$  оба члена дроби, образующей вторую часть, и затѣмъ сложить отдѣльно числителей и отдѣльно знаменателей, то числитель полученной такимъ образомъ дроби, равной каждой изъ двухъ остальныхъ дробей, будетъ какъ-разъ знаменателемъ  $D$  значенія  $\rho$ , а знаменатель, въ силу уравненія (5), будетъ равенъ единицѣ. Слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{r \cos \alpha + s \cos \beta}{(1 + p^2) \cos \alpha + pq \cos \beta} = D, \quad (10)$$

$$\frac{t \cos \beta + s \cos \alpha}{(1 + q^2) \cos \beta + pq \cos \alpha} = D. \quad (11)$$

Исключая между этими уравнениями отношение  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$ , находимъ:

$$(1 + p^2 + q^2)D^2 - D[(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs] + rt - s^2 = 0 \quad (12)$$

и такъ какъ

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{D},$$

то

$$\rho^2(rt - s^2) - \rho \sqrt{1 + p^2 + q^2} [(1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0. \quad (13)$$

Это уравненіе имѣетъ корнями два главныхъ радіуса кривизны поверхности въ разсматриваемой точкѣ; эти радіусы всегда вещественны; дѣйствительно, легко показать, что корни уравненія всегда вещественны; въ силу соотношенія, связывающаго  $\rho$  съ  $D$ , достаточно доказать, что это такъ для уравненія (12) съ неизвѣстною  $D$ . Но это уравненіе можно представить подъ видомъ

$$[D(1 + p^2) - r][D(1 + q^2) - t] - (s - pqD)^2 = 0, \quad (14)$$

а въ такомъ случаѣ ясно, что, подставляя послѣдовательно на мѣсто  $D$  въ первой части значенія

$$D = -\infty, \quad D = \frac{r}{1 + p^2}, \quad D = +\infty,$$

мы получимъ знаки  $+$ ,  $-$ ,  $+$ ; значить, уравненіе имѣетъ два вещественныхъ корня, одинъ меньше, а другой больше  $\frac{r}{1 + p^2}$ . Подставляя вмѣсто этой дроби  $\frac{t}{1 + q^2}$ , мы такъ же нашли бы, что одинъ изъ корней меньше, а другой больше  $\frac{t}{1 + q^2}$ .

§ 635. Изъ предыдущихъ замѣчаній вытекаетъ, что оба корня уравненія съ  $D$  и, слѣдовательно, оба значенія  $\rho$  могутъ быть равны только при

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2};$$

кромѣ того, общее значеніе этихъ двухъ дробей будетъ тогда, очевидно, значеніемъ  $D$ , удовлетворяющимъ уравненію (14), и мы должны имѣть:

$$s - pqD = 0,$$

т.-е. каждая изъ дробей должна равняться  $\frac{s}{pq}$ .

Слѣдовательно, необходимыми и достаточными условіями, чтобы радіусы кривизны были равны между собою, являются равенства

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{t}{1 + q^2} = \frac{s}{pq}.$$

Важно замѣтить, что ихъ два и что вслѣдствіе этого они вмѣстѣ съ уравненіемъ поверхности опредѣляютъ конечное число точекъ, въ которыхъ всѣ нормальныя сѣ-



ченія имѣютъ одну и ту же кривизну; эти точки называются точками округленія (ombilics).

§ 636. Уравненіе

$$A \cos^2 \beta + B \cos \alpha \cos \beta + C \cos^2 \alpha = 0, \quad (1)$$

которому удовлетворяютъ косинусы угловъ, образуемыхъ однимъ изъ главныхъ направлений съ двумя изъ координатныхъ осей, приводитъ къ замѣчательному соотношенію между бесконечно-малыми измѣненіями количествъ  $x, y, z, p, q$ , когда мы перемѣщаемся послѣдовательно по каждому изъ двухъ сѣченій. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ буквою  $d$  дифференціалъ, относящійся къ перемѣщенію по одному изъ сѣченій, и буквою  $\delta$  дифференціалъ при перемѣщеніи по другому сѣченію; значенія  $\cos \beta$  и  $\cos \alpha$ , соотвѣтствующія первому сѣченію, пропорціональны  $dy$  и  $dx$ , а соотвѣтствующія второму сѣченію, пропорціональны  $\delta y$  и  $\delta x$ ; слѣдовательно,  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{\delta y}{\delta x}$  являются двумя корнями уравненія

$$Au^2 + Bu + C = 0, \quad (2)$$

и мы имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\delta y}{\delta x} &= \frac{C}{A}, \\ \frac{dy}{dx} + \frac{\delta y}{\delta x} &= -\frac{B}{A}. \end{aligned}$$

Кромѣ того, принимая во вниманіе значенія  $A, B, C$ , имѣемъ тождественно:

$$Ar + Ct = Bs.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$r + t \frac{dy}{dx} \frac{\delta y}{\delta x} + s \left( \frac{dy}{dx} + \frac{\delta y}{\delta x} \right) = 0,$$

т.-е.

$$dx(r\delta x + s\delta y) + dy(s\delta x + t\delta y) = 0,$$

а такъ какъ

$$r\delta x + s\delta y = \delta p, \quad s\delta x + t\delta y = \delta q,$$

то

$$dx\delta p + dy\delta q = 0; \quad (3)$$

также, очевидно, имѣемъ:

$$\delta x dp + \delta y dq = 0. \quad (4)$$

Эти два уравненія выражаютъ весьма важную теорему, къ которой мы еще вернемся; они выражаютъ, что нормали къ поверхности, проведенныя черезъ двѣ бесконечно-близкія точки главнаго сѣченія, можно разсматривать, какъ встрѣчающіяся, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка. Дѣйствительно, косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями касательною къ главному сѣченію, пропорціо-

нальны  $dx, dy, dz$ , а косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью, пропорціональны  $p, q, -1$ . Такъ какъ эти два направленія взаимно-перпендикулярны, то

$$pdx + qdy - dz = 0. \quad (5)$$

Нормаль въ точкѣ, координаты которой  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ , образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $p + \delta p, q + \delta q, -1$ ; значитъ, необходимое и достаточное условіе, чтобы она была перпендикулярна къ касательной главнаго сѣченія въ точкѣ  $x, y, z$ , есть

$$dx(p + \delta p) + dy(q + \delta q) - dz = 0,$$

что приводится, въ силу равенства (5), къ

$$dx\delta p + dy\delta q = 0. \quad (6)$$

Итакъ, это уравненіе выражаетъ, что касательная къ одному изъ главныхъ сѣченій въ нѣкоторой точкѣ перпендикулярна къ нормали, проведенной къ поверхности черезъ бесконечно-близкую точку другого главнаго сѣченія. Для этого необходимо и достаточно, чтобы двѣ смежныя нормали встрѣчались и находились въ одной и той же плоскости, перпендикулярной къ разсматриваемой касательной. Впрочемъ, такъ какъ при вычисленіи были отброшены бесконечно-малыя второго порядка, то, строго говоря, встрѣчи двухъ нормалей не происходитъ, и мы должны только говорить, что ихъ кратчайшее разстояніе есть бесконечно-малая порядка выше перваго. Принимая во вниманіе, что двѣ встрѣчающіяся бесконечно-близкія нормали расположены въ плоскости главнаго сѣченія, видимъ, что точка ихъ встрѣчи есть какъ разъ центръ кривизны послѣдняго, и разстояніе этой точки до поверхности равно одному изъ главныхъ радіусовъ кривизны.

**§ 637.** Предыдущія теоремы приводятъ къ одному весьма простому и не безполезному въ нѣкоторыхъ случаяхъ соотношенію, характеризующему направленія главныхъ сѣченій.

Обозначимъ черезъ  $X, Y, Z$  косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью разсматриваемой поверхности съ координатными осями, и рассмотримъ главное сѣченіе въ точкѣ, координаты которой  $x, y, z$ ; бесконечно-близкая точка того же сѣченія имѣетъ координаты  $x + dx, y + dy, z + dz$ ; косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями нормалью въ этой точкѣ, будутъ  $X + dX, Y + dY, Z + dZ$ ; обѣ нормали, какъ сказано выше, встрѣчаются въ центрѣ кривизны разсматриваемаго нормального сѣченія; называемъ черезъ  $R$  радіусъ кривизны этого сѣченія; обѣ нормали и бесконечно-малая дуга  $ds$ , раздѣляющая ихъ начальныя точки на поверхности, образуютъ равнобедренный треугольникъ. Проекція  $dx$  основанія на ось  $X$ -овъ равна разности проекцій двухъ другихъ сторонъ, т.-е.  $RdX$ , и мы, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{R};$$

такъ же находимъ:

$$\frac{dY}{dy} = \frac{1}{R},$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{R};$$

значитъ,

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}.$$

Это условіе является къ тому же характеристическимъ и выражаетъ, что точка, координаты которой  $x + dx, y + dy, z + dz$ , находится на главномъ сѣченіи въ точкѣ  $x, y, z$ . Изъ него не трудно было бы вывести уже найденное выше уравненіе для опредѣленія главныхъ сѣченій.

### Геометрическое доказательство предыдущихъ теоремъ

#### Индикатриса

§ 638. Предыдущія теоремы и, въ особенности, ту, которая даетъ законъ измѣненія кривизны нормальныхъ сѣченій въ нѣкоторой точкѣ поверхности, можно легко вывести и изящно представить при помощи кривой, разсмотрѣнной впервые Дюпеномъ (Dupin) и названной имъ же *индикатрисою*.

Индикатриса поверхности въ точкѣ  $M$  этой поверхности есть сѣченіе на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки  $M$  плоскостью, параллельною касательной плоскости въ  $M$ . Нужно только при этомъ имѣть въ виду, что если кривая пересѣченія имѣетъ конечные размѣры, какъ, напр., у поверхностей съ противоположными кривизнами, пересѣченныхъ ихъ касательною плоскостью, то названіе индикатрисы дается только той части кривой пересѣченія, которая расположена на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки  $M$ .

Мы начнемъ съ доказательства слѣдующей теоремы:

*Во всякой точкѣ поверхности индикатриса есть кривая второго порядка.*

Беремъ за ось  $Z$ -овъ нормаль къ поверхности въ рассматриваемой точкѣ и за плоскость  $XY$  касательную плоскость въ этой точкѣ. Пусть

$$z = \varphi(x, y) \quad (1)$$

будетъ уравненіе поверхности, отнесенное къ этимъ осямъ. Плоскость, параллельная касательной плоскости, будетъ имѣть уравненіемъ  $z = h$ , и индикатриса, проектированная въ настоящую свою величину на плоскость  $XY$ , выразится уравненіемъ

$$h = \varphi(x, y). \quad (2)$$

Такъ какъ здѣсь  $x$  и  $y$  бесконечно-малыя для всѣхъ точекъ индикатрисы, то, развертывая вторую часть по теоремѣ Маклорена, будемъ имѣть:

$$h = \varphi(0,0) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2 \left(\frac{d^2\varphi}{dx dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)_0 y^2 \right] + R,$$

гдѣ  $R$  бесконечно-малая (§ 276) относительно предшествующихъ членовъ; кромѣ того, во всей строгости имѣемъ:

$$\varphi(0,0) = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_0 = 0,$$

потому что поверхность проходитъ черезъ начало координатъ и касательна въ этой точкѣ къ плоскости  $XY$ ; уравненіе индикатрисы приводится поэтому къ

$$h = \frac{x^2}{2} \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_0 + xy \left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)_0 + \frac{y^2}{2} \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)_0 + R.$$

Пусть  $x', y'$  будутъ координаты точки, принадлежащей подобной кривой, имѣющей центромъ подобія начало и отношеніемъ подобія  $m$ ; будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} x' &= mx, & y' &= my, \\ h &= \frac{x'^2}{2m^2} \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_0 + \frac{x'y'}{m^2} \left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)_0 + \frac{y'^2}{2m^2} \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)_0 + R, \end{aligned}$$

или, по умноженіи на  $m^2$ ,

$$2hm^2 = x'^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_0 + 2x'y' \left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)_0 + y'^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)_0 + 2m^2 R.$$

Предполагаемъ, что  $m^2$  растетъ въ то время, какъ  $h$  убываетъ и при томъ такъ, что  $m^2 h$  имѣетъ конечный предѣлъ  $k$ . Тогда  $x'$  и  $y'$  будутъ также имѣть конечные предѣлы, и  $m^2 R$  пойдетъ къ нулю, потому что  $R$  бесконечно-малая относительно членовъ, сдѣлавшихся послѣ умноженія на  $m^2$  конечными. Значитъ, въ предѣлѣ имѣемъ:

$$k = x'^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_0 + 2x'y' \left( \frac{d^2\varphi}{dxdy} \right)_0 + y'^2 \left( \frac{d^2\varphi}{dy^2} \right)_0, \quad (3)$$

и кривая, подобная индикатрисѣ, есть кривая второго порядка, имѣющая центромъ начало координатъ.

**§ 639.** Индикатриса можетъ быть эллипсомъ или гиперболою; эти два случая соотвѣтствуютъ двумъ весьма различнымъ видамъ, какіе можетъ имѣть поверхность вокругъ разсматриваемой точки.

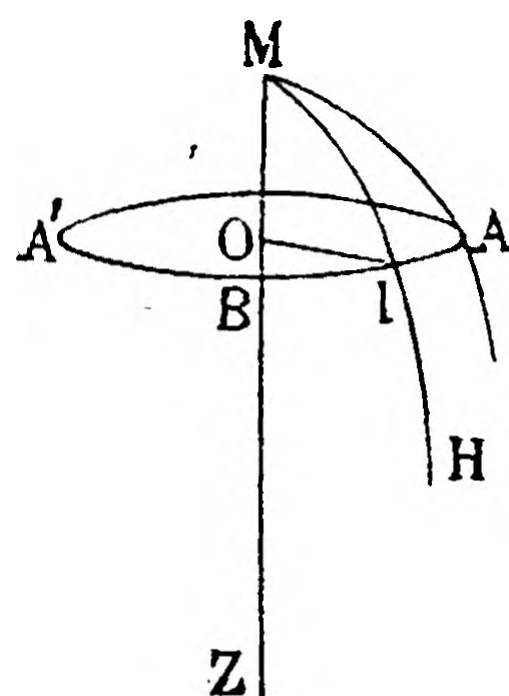
Когда индикатриса есть эллипсъ, то при перемѣнѣ  $h$  на  $-h$  и, значитъ,  $k$  на  $-k$ , уравненіе представитъ мнимую кривую; слѣдовательно, плоскости, проведенныя по одну только сторону касательной плоскости, пересѣкаютъ поверхность по вещественнымъ кривымъ. Такимъ образомъ, поверхность вся цѣликомъ находится по одну сторону своей касательной плоскости, и эллиптическій видъ бесконечно-малаго сѣченія плоскостью, смежною съ этою касательною плоскостью, достаточно показываетъ, что поверхность походитъ на эллиптическій параболоидъ въ смежности его вершины.

Когда индикатриса есть гипербола, то при перемѣнѣ  $h$  на  $-h$  и, значитъ,  $k$  на  $-k$  кривая, представленная уравненіемъ (3), остается вещественною. Отсюда заключаемъ, что плоскости, проведенныя параллельно по какую бы то ни было сторону касательной плоскости, пересѣкаютъ поверхность, которая такимъ образомъ выходитъ расположенною по обѣ стороны послѣдней и, слѣдовательно, пересѣкаетъ ее. Изслѣдуя тогда различныя сѣченія въ разсматриваемой точкѣ плоскостями, нормальными къ поверхности, видимъ, что одни изъ этихъ сѣченій будутъ надъ касательною плоскостью, другія подъ нею; первыя будутъ пересѣкаться плоскостью, проведенною параллельно касательной плоскости по одну изъ ея сторонъ, а вторыя — плоскостью,

проведенною параллельно по другую изъ ея сторонъ, такъ что каждая индикатриса имѣетъ вещественные радіусы-векторы, соотвѣтствующие нормальнымъ сѣченіямъ, изогнутымъ по одну изъ сторонъ плоскости, и мнимые радіусы-векторы, соотвѣтствующие нормальнымъ сѣченіямъ, имѣющимъ противоположную кривизну. Ясно, что при одновременномъ разсмотрѣніи двухъ индикатрисъ, соотвѣтствующихъ сѣченіямъ съ той и съ другой стороны касательной плоскости, вещественные радіусы-векторы одной соотвѣтствуютъ мнимымъ радіусамъ другой, и обратно; впрочемъ, это видно изъ уравненія (3), потому что приписывая  $h$  и, значитъ,  $k$  два равныхъ по абсолютной величинѣ, но противоположныхъ по знаку значенія, получаемъ двѣ сопряженныхъ гиперболы, имѣющихъ общія асимптоты, но расположенныхъ въ различныхъ углахъ.

### Законъ кривизны нормальныхъ сѣченій

§ 640. Теперь мы можемъ изучить законъ измѣненія кривизны нормальныхъ сѣченій поверхности вокругъ данной точки. Пусть  $M$  (черт. 82) будетъ эта точка,



Черт. 82

$MZ$  — нормаль,  $ABA'$  — индикатриса съ вершинами  $A$  и  $A'$ . Ведемъ черезъ нормаль  $MZ$  какую-нибудь плоскость, пересекающую поверхность по кривой  $MHN$ ; радіусъ кривизны этой кривой опредѣляется по формулѣ (§ 499)  $2R = \frac{\overline{IO}^2}{OM}$ , и такъ какъ  $OM$  имѣетъ одно и то же значеніе для различныхъ нормальныхъ сѣченій, то радіусъ кривизны пропорціоналенъ квадрату радіуса индикатрисы, служащаго слѣдомъ для плоскости разсматриваемаго сѣченія. Отсюда тотчасъ видно, что сѣченія съ наибольшею и съ наименьшею кривизною имѣютъ слѣдами оси индикатрисы и, слѣдовательно, взаимно-перпендикулярны. Кромѣ того, соотношеніе, связывающее радіусъ кривизны какого-угодно сѣченія съ двумя радіусами, максимальнымъ и минимальнымъ, совпадаетъ съ соотношеніемъ, связывающимъ квадратъ діаметра конического сѣченія съ квадратами двухъ осей кривой; поэтому, называя черезъ  $R$  и  $R'$  максимальный и минимальный радіусы и черезъ  $\rho$  радіусъ, соотвѣтствующій сѣченію, образуемому угломъ  $\varphi$  съ сѣченіемъ, радіусъ котораго  $R'$ , будемъ имѣть:

$$\rho = \frac{RR'}{R\cos^2\varphi + R'\sin^2\varphi},$$



т.-е.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R} \sin^2 \varphi,$$

что какъ разъ и есть полученное выше (§ 627) соотношеніе.

§ 641. Случай, когда индикатриса представляетъ гиперболу, долженъ быть изслѣдованъ особо; повидимому, занимающій насъ методъ прилагается только къ сѣченіямъ, соответствующимъ вещественнымъ радіусамъ-векторамъ индикатрисы, и, значитъ, для изученія кривизны другихъ сѣченій, необходимо рассмотретьъ вторую индикатрису, которая опредѣляется плоскостью, расположенною по другую сторону касательной плоскости. Однако, на самомъ дѣлѣ этого не требуется, и рассмотрѣніе только одной индикатрисы можетъ дать кривизну всѣхъ сѣченій безъ исключенія. Дѣйствительно, замѣчаемъ, что двѣ индикатрисы, расположенныя съ обѣихъ сторонъ касательной плоскости, представляютъ сопряженныя гиперболы и что, слѣдовательно, вещественные радіусы-векторы одной изъ нихъ получаются черезъ умноженія на  $\sqrt{-1}$  мнимыхъ радіусовъ другой, направленныхъ по тому же діаметру. А такъ какъ радіусы кривизны пропорціональны квадрату радіуса индикатрисы, то всѣ ихъ можно вывести изъ одной только гиперболы, принимая при этомъ во вниманіе, что квадраты мнимыхъ радіусовъ, будучи отрицательными, даютъ какъ разъ отрицательные радіусы для сѣченій съ кривизною, противоположною кривизнѣ сѣченій, радіусы которыхъ приняты за положительные.

Въ случаѣ, когда индикатриса представляетъ гиперболу, существуютъ два сѣченія, радіусъ кривизны которыхъ бесконечно-великъ. Это — сѣченія, имѣющія слѣдами на касательную плоскость асимптоты индикатрисы. Они отдѣляютъ сѣченія, изогнутыя въ одномъ направленіи, относительно касательной плоскости, отъ сѣченій, изогнутыхъ въ противоположномъ направленіи; имѣя нулевую кривизну, они будутъ расположены на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ касательной плоскости и, слѣдовательно, будутъ касательными къ кривой, по которой эта плоскость пересѣкаетъ поверхность.

Можетъ показаться необычнымъ, что эти сѣченія, радіусъ кривизны которыхъ бесконечно-великъ, отличны отъ сѣченій, радіусъ кривизны которыхъ есть maximum; это происходитъ отъ того, что выраженіе, которое подводятъ къ maximum'у или minimum'у, обратно радіусу кривизны и можетъ принимать отрицательныя значенія, меньшія нуля, а это значитъ, что кривизна, когда и достигнетъ нуля, не будетъ еще, говоря аналитически, возможно наименьшею. Предѣльными кривизнами будутъ наибольшія абсолютныя кривизны сѣченій въ одномъ и въ другомъ направленіи.

§ 642. Можетъ случиться, что индикатриса будетъ параболическаго рода; но такъ какъ по виду своего уравненія она всегда кривая съ центромъ, то она въ этомъ случаѣ приведется къ двумъ параллельнымъ прямымъ; сѣченіе съ наименьшею кривизною имѣетъ тогда бесконечно-большой радіусъ кривизны, а другое, перпендикулярное къ нему, имѣетъ конечную кривизну. Это бываетъ обыкновенно въ исключительныхъ точкахъ; но для особаго класса развертывающихся поверхностей индикатриса, какъ мы увидимъ дальше, повсюду параболическая.

## КРИВИЗНА НАКЛОННАГО СЪЧЕНІЯ

§ 643. Пусть  $OT$  будетъ прямая, касательная къ поверхности въ точкѣ  $O$ ; ведемъ черезъ эту прямую и черезъ нормаль  $ON$  къ поверхности плоскость, пересекающую поверхность по кривой  $ok$ , и вторую плоскость, составляющую съ первою уголъ  $\theta$  и пересекающую поверхность по кривой  $ok'$ . Для сравненія кривизнъ этихъ двухъ сѣченій беремъ на линіи  $OT$ , очевидно, касательной къ нимъ обоимъ, безконечно-малую длину  $OM$  и въ точкѣ  $M$  возставляемъ въ плоскости каждой кривой перпендикуляры  $MI$ ,  $MI'$ , уголъ между которыми будетъ  $\theta$ , измѣряющій наклоненіе этихъ плоскостей; кривизна первой кривой есть (§ 499)

$$\frac{2MI}{MO^2},$$

а второй

$$\frac{2MI'}{OM^2};$$

такимъ образомъ ихъ отношеніе равно  $\frac{MI}{MI'}$ . Но треугольникъ  $MII'$  въ предѣлѣ прямоугленъ при точкѣ  $I$ , потому что  $MI$ , параллельная нормали въ  $O$ , безконечно-близка къ прямой, нормальной къ поверхности въ  $I$ , и  $II'$  въ предѣлѣ касательна къ этой поверхности; значитъ, принимая во вниманіе, что уголъ  $IMI'$  равенъ  $\theta$ , имѣемъ:

$$\frac{MI}{MI'} = \cos \theta,$$

и, слѣдовательно, отношеніе двухъ кривизнъ есть  $\cos \theta$ . Итакъ, радіусъ кривизны наклоннаго сѣченія равенъ, какъ мы уже видѣли (§ 629), произведенію радіуса кривизны соотвѣтственнаго нормальнаго сѣченія на косинусъ угла между плоскостями обоихъ сѣченій.

## СОПРЯЖЕННЫЯ КАСАТЕЛЬНЫЯ

§ 644. Двѣ касательныя, параллельныя двумъ сопряженнымъ діаметрамъ индикатрисы въ точкѣ  $M$ , носятъ названіе сопряженныхъ касательныхъ. Если разсмотримъ на поверхности точку  $M'$ , безконечно-близкую къ  $M$ , то пересѣченіе касательныхъ плоскостей въ  $M$  и въ  $M'$  дастъ, въ предѣлѣ, касательную, сопряженную съ  $MM'$ . Въ самомъ дѣлѣ, плоскость индикатрисы, проходящей черезъ точку  $M'$ , параллельна касательной плоскости въ  $M$ , и прямая ея пересѣченія съ касательною плоскостью въ  $M'$ , т.-е. касательная въ  $M'$  къ индикатрисѣ, параллельна пересѣченію обѣихъ касательныхъ плоскостей. Но эта касательная параллельна также діаметру, сопряженному съ діаметромъ, оканчивающимся въ  $M'$  и совпадающимъ въ предѣлѣ съ направленіемъ  $MM'$ ; итакъ, доказано, что направленіе  $MM'$  и пересѣченіе двухъ касательныхъ плоскостей параллельны, въ предѣлѣ, двумъ сопряженнымъ діаметрамъ индикатрисы.

§ 645. Разсмотримъ цилиндръ, описанный около поверхности, и пусть  $MM'$  будетъ бесконечно-малая дуга, принадлежащая кривой прикосновенія. Направленіе  $MM'$  есть направленіе, сопряженное съ производящею цилиндра въ  $M$ . Дѣйствительно, плоскости, касательныя къ поверхности въ  $M$  и въ  $M'$ , касательны въ то же время къ цилиндру; значитъ, ихъ пересѣченіе представляетъ въ предѣлѣ производящую цилиндра, которая, слѣдовательно, есть касательная, сопряженная съ направленіемъ  $MM'$ .

Также очевидно, что то же соотношеніе и по тѣмъ же соображеніямъ существуетъ между производящею какой-угодно развертывающейся поверхности, описанной около данной поверхности, и касательною къ кривой прикосновенія.

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. Даны двѣ пересѣкающіяся поверхности; чтобы получить кривизну линіи пересѣченія въ одной изъ ея точекъ, можно поступить слѣдующимъ образомъ: провести черезъ разсматриваемую точку двѣ плоскости, соотвѣтственно касательныя къ двумъ поверхностямъ; каждая изъ нихъ пересѣчетъ другую поверхность по нѣкоторой кривой; если отложить на нормали къ каждой изъ этихъ кривыхъ длину, равную ея кривизнѣ, то діагональ параллелограмма, построеннаго на этихъ линіяхъ, совпадетъ съ направленіемъ главной нормали къ кривой пересѣченія и измѣритъ кривизну этой послѣдней.

2. Даны двѣ поверхности, взаимно-касательныя въ нѣкоторой точкѣ; зная направленіе ихъ главныхъ сѣченій и величину ихъ радіусовъ кривизны, найти касательныя къ обѣимъ вѣтвямъ кривой ихъ пересѣченія.

3. Приложить предыдущій методъ къ разысканію касательной къ пересѣченію кольцевой поверхности (d'un tore) одною изъ ея касательныхъ плоскостей.

4. Если провести черезъ точку поверхности  $n$  нормальныхъ сѣченій, послѣдовательныя плоскости которыхъ составляли бы между собою уголъ, равный  $\frac{2\pi}{n}$ , то средняя между кривизнами этихъ сѣченій не зависитъ ни отъ числа  $n$ , ни отъ выбора первой плоскости.

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### Ученіе о нормаляхъ къ одной и той же поверхности

---

Не существуетъ, вообще, поверхности, нормальной къ прямымъ пучка

§ 646. Расположеніе въ пространствѣ нормалей къ одной и той же поверхности подчиняется необходимымъ законамъ, самое существованіе которыхъ далеко отъ очевидности *à priori*. Привычка переносить, по аналогіи, въ геометрію трехъ измѣреній результаты плоской геометріи привела бы, напротивъ, къ мысли, что никакого закона существовать не должно. Дѣйствительно, по какому бы закону ни слѣдовали прямыя одна за другою на плоскости, но только такъ, чтобы черезъ каждую точку плоскости проходила одна изъ нихъ, всегда существуютъ кривыя, пересѣкающія ихъ подъ прямымъ угломъ. Значитъ, свойство быть нормальными къ одной и той же кривой не налагаетъ на прямыя пучка никакого особеннаго условія; но мы впали бы, вмѣстѣ съ нѣкоторыми искусными геометрами, въ грубую ошибку, заключая отсюда по аналогіи, что прямыя, слѣдующія въ пространствѣ одна за другою по такому закону, что черезъ каждую точку проходитъ одна изъ нихъ, можно всегда пересѣчь подъ прямымъ угломъ одною и тою же поверхностью. Для этого онѣ должны удовлетворять весьма опредѣленнымъ условіямъ, изученію которыхъ и посвящается эта глава.

§ 647. Мы начнемъ съ доказательства, что прямыя, слѣдующія одна за другою по какому-угодно закону, не будутъ, вообще, нормальными къ одной и той же поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ такой пучокъ, чтобы черезъ каждую точку пространства проходила одна изъ составляющихъ его прямыхъ, и пусть  $AB$  будетъ какая-нибудь одна изъ этихъ прямыхъ. Предположимъ, если это возможно, что поверхность  $S$ , нормальная ко всѣмъ прямымъ пучка, пересѣкаетъ  $AB$  въ  $M$ ; ищемъ, въ какой точкѣ эта поверхность  $S$  встрѣтитъ другую линію  $A'B'$ , принадлежащую пучку и расположенную на конечномъ разстояніи отъ  $AB$ . Соединяемъ для этого произвольною кривою  $C$  нѣкоторую точку линіи  $AB$  съ точкою линіи  $A'B'$ ; прямыя пучка, встрѣчающія кривую  $C$ , образуютъ линейчатую поверхность  $\Sigma$ , производящія которой, по предположенію, нормальны къ поверхности  $S$ ; слѣдовательно, пересѣченіе поверх-

ностей  $S$  и  $\Sigma$  есть кривая, проходящая через точку  $M$  и расположенная на линейчатой поверхности  $\Sigma$ , всѣ производящія которой она пересѣкаетъ подѣ прямымъ угломъ; такъ какъ такое свойство опредѣляетъ ее вполне, то точка  $M'$ , въ которой она встрѣчаетъ  $A'B'$ , является также опредѣленною, и эта точка  $M'$  представляетъ, очевидно, пересѣченіе прямой  $A'B'$  съ неизвѣстною поверхностью  $S$ . Но кривая  $C$ , соединяющая прямые  $AB$  и  $A'B'$ , произвольна; значитъ, ее можно замѣнить безчисленнымъ множествомъ другихъ кривыхъ и тѣмъ самымъ подставить, на мѣсто поверхности  $\Sigma$ , безчисленное множество другихъ линейчатыхъ поверхностей, имѣющихъ общаго съ первою только крайнія производящія. На каждой изъ этихъ поверхностей кривая, нормальная къ производящимъ и исходящая изъ точки  $M$ , будетъ, вообще, пересѣкать  $A'B'$  въ точкѣ, отличной отъ другихъ точекъ пересѣченія; отсюда заключаемъ, что пересѣченію прямой  $A'B'$  съ поверхностью  $S$  должно назначить безчисленное множество различныхъ положеній, а это показываетъ, что такой поверхности не существуетъ.

#### Необходимое условіе для существованія поверхности

§ 648. Прямые, составляющія пучокъ, должны, по предыдущему, удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ, чтобы существовала поверхность, пересѣкающая ихъ подѣ прямымъ угломъ. Сейчасъ мы отыщемъ аналитическое выраженіе этого условія.

Разсмотримъ каждую изъ прямыхъ, составляющихъ пучокъ, какъ исходящую изъ точки ея встрѣчи съ данною поверхностью, выбранною притомъ какъ-угодно. Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты одной изъ этихъ точекъ отправленія, и  $X, Y, Z$  — косинусы угловъ, составляемыхъ съ осями соотвѣтственною прямою. Такъ какъ точка  $x, y, z$  лежитъ на данной поверхности, то  $z$  есть извѣстная функція отъ  $x$  и  $y$ ; предположимъ, что  $X, Y, Z$  равнымъ образомъ даны въ функціи отъ тѣхъ же переменныхъ. Если на каждой изъ прямыхъ пучка отложить отъ точки отправленія длину  $l$ , измѣняющуюся отъ одной точки къ другой, то координаты  $x_1, y_1, z_1$  ея конца будутъ

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + lX, \\ y_1 &= y + lY, \\ z_1 &= z + lZ, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и чтобы поверхность, геометрическое мѣсто точекъ  $x_1, y_1, z_1$ , пересѣкала нормально всѣ разсматриваемыя прямые, должно имѣть:

$$Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1 = 0. \quad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе выражаетъ, что направленіе, образующее съ осями углы, косинусы которыхъ  $X, Y, Z$ , перпендикулярно къ направленію, образующему углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $dx_1, dy_1, dz_1$ .

Уравненія (1) даютъ:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= dx + l dX + X dl, \\ dy_1 &= dy + l dY + Y dl, \\ dz_1 &= dz + l dZ + Z dl; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



отсюда, принимая во вниманіе очевидныя соотношенія

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ XdX + YdY + ZdZ &= 0, \end{aligned}$$

выводимъ:

$$Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1 = Xdx + Ydy + Zdz + dl; \quad (4)$$

слѣдовательно, условное уравненіе (2) равносильно

$$dl = -(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (5)$$

Уравненіе поверхности, представляющей геометрическое мѣсто точекъ  $x, y, z$ , даетъ соотношение вида

$$dz = pdx + qdy,$$

гдѣ  $p$  и  $q$  извѣстныя функціи отъ  $x$  и  $y$ ; уравненіе (5) принимаетъ поэтому видъ

$$dl = -(X + pZ)dx - (Y + qZ)dy, \quad (6)$$

что равносильно

$$\frac{dl}{dx} = -(X + pZ), \quad \frac{dl}{dy} = -(Y + qZ), \quad (7)$$

и такъ какъ, какова бы ни была функція, обозначенная буквою  $l$ ,

$$\frac{d^2l}{dxdy} = \frac{d^2l}{dydx},$$

то два этихъ уравненія требуютъ соотношенія

$$\frac{d(X + pZ)}{dy} = \frac{d(Y + qZ)}{dx}, \quad (8)$$

гдѣ  $X, Y, Z, p$  и  $q$  выражены, конечно, въ функціи отъ  $x$  и  $y$ .

Уравненіе (8) выражаетъ необходимое условіе для существованія нормальной поверхности къ даннымъ прямымъ. Мы увидимъ въ другой главѣ, что оно достаточно для существованія функціи  $l$ , опредѣляемой уравненіями (7). Итакъ, это уравненіе (8) рѣшаетъ предложенную задачу, но ему можно, какъ мы сейчасъ покажемъ, придать болѣе простой видъ и истолковать геометрически, что играетъ большую роль въ теоріи поверхностей.

**§ 649.** Когда разсматриваемый пучокъ прямыхъ данъ, поверхность, отъ которой идутъ эти прямыя, вполне произвольна и, очевидно, нисколько не вліяетъ на существованіе или несуществованіе поверхности, пересекающей пучокъ подъ прямымъ угломъ. Чтобы истолковать уравненіе (8), предполагаемъ, что произвольная поверхность, которую можно назвать начальною поверхностью, нормальна къ одной изъ прямыхъ пучка; кромѣ того, предположимъ, что эта послѣдняя параллельна оси  $Z$ -овъ; тогда для этой прямой и для ея точки отправленія, расположенной на произвольной поверхности, пересекающей ее подъ прямымъ угломъ, будемъ имѣть:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 1, \quad p = 0, \quad q = 0;$$

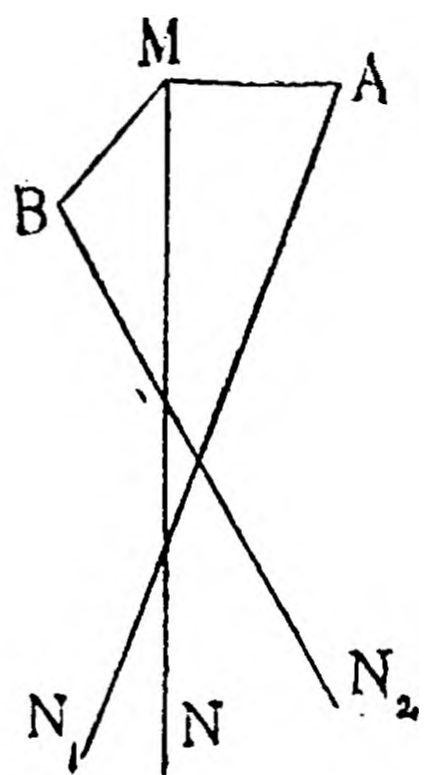
уравненіе (8) приметъ въ такомъ случаѣ, въ этой точкѣ, видъ

$$\frac{dX}{dy} + \frac{dp}{dy} = \frac{dY}{dx} + \frac{dq}{dx}, \quad (1)$$

и такъ какъ всегда  $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ , то оно приводится къ

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}. \quad (2)$$

Пусть  $MN$  (черт. 83) будетъ рассматриваемая прямая, параллельная, по предполо-



Черт. 83

женію, оси  $Z$ -овъ. Принимая во вниманіе равенство  $X = 0$ , заключаемъ, что числитель частнаго  $\frac{dX}{dy}$  представляетъ безконечно-малое значеніе, которое принимаетъ  $X$  при безконечно-маломъ перемѣщеніи точки отправленія  $M$  параллельно оси  $Y$ -овъ. Числитель частнаго  $\frac{dY}{dx}$  представляетъ, по той же причинѣ, безконечно-малое значеніе, которое принимаетъ  $Y$ , когда точка  $M$  получаетъ перемѣщеніе  $dx$ , параллельное оси  $X$ -овъ. Разсмотримъ поэтому двѣ безконечно-малыя прямыя одинаковой длины,  $MA$ ,  $MB$ , исходящія изъ точки  $M$  и параллельныя: одна оси  $X$ -овъ, другая оси  $Y$ -овъ; уравненіе (2) выражаетъ, что прямая  $AN_1$ , исходящая изъ точки  $A$ , образуетъ съ осью  $Y$ -овъ такой же уголъ, какой прямая  $BN_2$  образуетъ съ осью  $X$ -овъ; другими словами, что, очевидно, приводитъ къ тому же самому, прямая, исходящая изъ  $A$ , образуетъ съ плоскостью  $NMA$  такой же уголъ, какой прямая, исходящая изъ  $B$ , образуетъ съ плоскостью  $NMB$ . Кромѣ того, такъ какъ косинусы угловъ, составляемыхъ первою прямою съ  $MB$  и второю съ  $MA$ , равны между собою и по величинѣ, и по знаку, то обѣ прямыя расположены или за-разъ внутри двуграннаго угла  $BMA$ , или за-разъ внѣ его. Замѣчая, что оси координатъ произвольны и что найденное условіе есть геометрическое значеніе уравненія, выражающаго существованіе нормальной поверхности къ рассматриваемымъ прямымъ, видимъ, что если предыдущее условіе удовлетворяется для двухъ прямыхъ  $MA$ ,  $MB$ , то оно, тѣмъ самымъ, будетъ удовлетворяться для двухъ какихъ-угодно другихъ направленій, перпендикулярныхъ между собою и къ  $MN$ .

Предполагаемъ, что двѣ прямыя, исходящія изъ точекъ  $A$  и  $B$  и направленные по одну сторону начальной поверхности, находятся обѣ внутри двуграннаго угла  $AMB$ ;

если бесконечно-малая прямая  $MA$  вращается вокруг  $M$  до совпаденія съ  $MB$ , то ея конецъ будетъ перемѣщаться по четверти круга, проходящей черезъ  $A$ , и прямая, исходящая изъ этого конца и бывшая вначалѣ  $AN_1$ , окончитъ совпаденіемъ съ  $BN_2$ ; для этого же, очевидно, нужно, чтобы она пересѣкала плоскость, проходящую черезъ  $MN$  и черезъ ея точку отправленія, и, слѣдовательно, на пробѣгаемой четверти круга найдется такая точка  $C$ , что прямая, исходящая изъ  $C$ , будетъ расположена въ плоскости  $MNC$ . Разсматривая бесконечно-малую прямую  $MD$ , равную  $MC$  и перпендикулярную къ  $MC$  и къ  $MN$ , видимъ, что та изъ прямыхъ пучка, которая отправляется изъ точки  $D$ , образуетъ съ плоскостью  $MND$  такой же уголъ, какой прямая, отправляющаяся изъ точки  $C$ , образуетъ съ  $MNC$ , т.-е. уголъ, равный нулю. Итакъ, существуютъ, въ смежности каждой прямой  $MN$ , двѣ другія прямыя, принадлежащія пучку и расположенныя въ двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ  $MN$ .

Эта теорема, открытая Монжемъ, играетъ важную роль въ теоріи поверхностей.

§ 650. Мы докажемъ прямо, что нормали къ какой-угодно поверхности выполняютъ только-что найденное условіе, и дадимъ въ то же время болѣе опредѣленное выраженіе закона, по которому онѣ распредѣляются вокругъ какой-нибудь одной изъ нихъ.

Разсмотримъ какую-нибудь поверхность, отнесенную къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ и представленную уравненіемъ

$$z = \varphi(x, y). \quad (1)$$

Полагаемъ, согласно нашему обычному обозначенію,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{dp}{dx} = r, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s, \quad \frac{dq}{dy} = t;$$

называя черезъ  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  текущія координаты, имѣемъ для нормали уравненія

$$\left. \begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) &= 0, \\ \eta - y + q(\zeta - z) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Беремъ за начало точку  $O$  поверхности и за ось  $Z$ -овъ нормаль въ этой точкѣ; такъ какъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $p$ ,  $q$  нули въ точкѣ  $O$ , то уравненія нормали въ этой точкѣ приведутся къ

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \\ \eta &= 0. \end{aligned}$$

Пусть  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  будутъ координаты точки  $O_1$ , взятой на поверхности бесконечно-близко къ  $O$ ; такъ какъ  $p$  и  $q$  въ точкѣ  $O$  равны нулю, то значенія  $p_1$ ,  $q_1$  этихъ производныхъ, соотвѣтствующія точкѣ  $O_1$ , будутъ, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{dp}{dx} x_1 + \frac{dp}{dy} y_1 = rx_1 + sy_1, \\ q_1 &= \frac{dq}{dx} x_1 + \frac{dq}{dy} y_1 = sx_1 + ty_1; \end{aligned}$$

слѣдовательно, уравненіями нормали въ этой точкѣ являются

$$\left. \begin{aligned} \xi - x_1 + (rx_1 + sy_1)(\zeta - z_1) &= 0, \\ \eta - y_1 + (sx_1 + ty_1)(\zeta - z_1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

называя черезъ  $\alpha$  уголъ, который плоскость  $ZOO_1$  образуетъ съ  $ZOX$  и черезъ  $\delta$  разстояніе  $OO_1$ , имѣемъ, пренебрегая какъ всегда бесконечно-малыми второго порядка,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \delta \cos \alpha, \\ y_1 &= \delta \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Нормаль въ  $O_1$  можно опредѣлить посредствомъ бесконечно-малаго угла, который она образуетъ съ проекціею на плоскость  $ZOO_1$ , и посредствомъ угла  $\omega$ , который эта проекція образуетъ съ осью  $Z$ -овъ; первый уголъ  $\theta$  есть положительное или отрицательное дополненіе угла, составляемаго нормалью въ  $O_1$  съ перпендикуляромъ къ плоскости  $ZOO_1$ , проведеннымъ черезъ точку  $O$  въ плоскости  $O_1OX$ . Называя же черезъ  $\lambda$  уголъ нормали въ  $O_1$  съ осью  $Z$ -овъ, видимъ, что косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ, на основаніи уравненій этой прямой, будутъ

$$-\cos \lambda (rx_1 + sy_1), \quad -\cos \lambda (sx_1 + ty_1),$$

т.-е.

$$-\delta \cos \lambda (r \cos \alpha + s \sin \alpha), \quad -\delta \cos \lambda (s \cos \alpha + t \sin \alpha);$$

далѣе, перпендикуляръ къ плоскости  $ZOO_1$  образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ

$$\sin \alpha, \quad -\cos \alpha;$$

значитъ, принимая во вниманіе формулу косинуса угла между двумя прямыми и отбрасывая бесконечно-малыя второго порядка, что даетъ возможность предположить  $\cos \lambda = 1$ , имѣемъ для угла  $\theta$ , составляемаго нормалью въ  $O_1$  съ плоскостью  $ZOO_1$ , формулу

$$\sin \theta = \delta [(t - r) \sin \alpha \cos \alpha + s(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)],$$

или, подставляя бесконечно-малую дугу на мѣсто ея синуса,

$$\theta = \frac{1}{2} \delta [(t - r) \sin 2\alpha + 2s \cos 2\alpha]. \quad (5)$$

Если подставить вмѣсто направленія  $OO_1$  перпендикулярное направленіе  $OO_2$ , то въ формулахъ нужно измѣнить  $\alpha$  на  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ;  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$  перемѣнятъ тогда знакъ, сохраняя ту же самую абсолютную величину и, слѣдовательно, уголъ  $\theta_2$ , соотвѣтствующій точкѣ  $O_2$ , будетъ, при прежнемъ, конечно, значеніи  $\delta$ , равенъ, но противоположенъ по знаку углу  $\theta_1$ , соотвѣтствующему точкѣ  $O_1$ .

Значеніе  $\alpha$ , при которомъ уголъ  $\theta_1$  равенъ нулю, дается уравненіемъ

$$(t - r) \sin 2\alpha + 2s \cos 2\alpha = 0,$$

или

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s}{r-t}. \quad (6)$$

Такимъ образомъ, существуютъ два взаимно-перпендикулярныхъ направленія, для которыхъ уголъ  $\theta$  равенъ нулю, когда отбрасываются безконечно-малыя второго порядка. Для всякаго направленія, составляющаго съ первымъ конечный уголъ, уголъ  $\theta$  является безконечно-малою первого порядка.

Если бы мы взяли, тотчасъ же, ось  $X$ -овъ и ось  $Y$ -овъ въ направленіяхъ  $OO_1$ ,  $OO_2$ , для которыхъ уголъ, обозначенный буквою  $\theta$ , равенъ нулю, уравненіе

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2s}{r-t}$$

будетъ имѣть рѣшеніемъ  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , и мы, слѣдовательно, должны имѣть  $s = 0$ .

Мы видѣли (§ 627), что оси, для которыхъ выполняется это условіе, представляютъ касательныя къ главнымъ сѣченіямъ. Такимъ образомъ мы снова приходимъ къ полученному уже результату (§ 636): нормаль въ нѣкоторой точкѣ поверхности и нормаль въ безконечно-близкой точкѣ, расположенной на одномъ изъ главныхъ сѣченій, взаимно пересѣкаются; эта теорема всегда предполагаетъ, что безконечно-малыя второго порядка отбрасываются.

Если допустить оси касательными къ главнымъ сѣченіямъ, для которыхъ, какъ мы только-что говорили,  $s$  равно нулю, то выраженіе для угла  $\theta$  упрощается, и мы имѣемъ:

$$\theta = \frac{1}{2} \delta(t-r) \sin 2\alpha. \quad (7)$$

**§ 651.** Направленіе нормали къ рассматриваемой поверхности въ точкѣ  $O_1$ , безконечно-близкой къ  $O$ , можно, какъ мы говорили, опредѣлять двумя углами. Первый есть уголъ  $\theta$ , образуемый этою нормалью  $O_1N$  съ плоскостью  $ZOO_1$ , проходящею черезъ ея точку отправления и черезъ нормаль  $OZ$ . Мы только-что вычислили общее его выраженіе. Второй изъ двухъ угловъ представляетъ наклоненіе къ  $OZ$  проекціи нормали въ  $O_1$  на плоскость  $ZOO_1$ . Для полученія этого второго угла  $\omega$  замѣчаемъ, что  $\operatorname{tang} \omega$  строго равенъ косинусу угла, который  $O_1N$  составляетъ съ  $OO_1$ , раздѣленному на косинусъ угла, образуемаго  $O_1N$  съ  $OZ$ . Въ самомъ дѣлѣ, если принять  $ZOO_1$  за плоскость  $ZX$  и за ось  $X$ -овъ касательную въ  $O$  къ безконечно-малой дугѣ  $OO_1$ , то, такъ какъ координаты точки  $O_1$  равны  $x_1$ ,  $0$  и  $z_1$ , проекція на плоскость  $XZ$  нормали, проведенной въ  $O_1$ , будетъ имѣть уравненіемъ

$$X - x_1 = \operatorname{tang} \omega (Z - z_1); \quad (1)$$

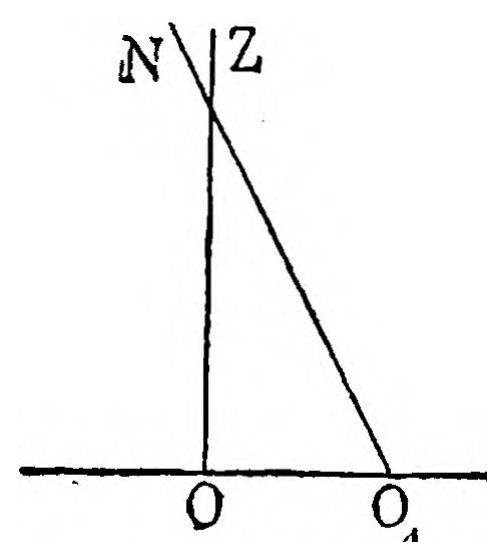
отсюда выводимъ:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{X - x_1}{Z - z_1} \quad (2)$$

и, принимая во вниманіе, что координаты  $X$  и  $Z$  проекціи точки нормали на плоскость  $XZ$  одинаковы съ одноименными координатами самой точки, заключаемъ, что отношеніе



$\frac{X-x_1}{Z-z_1}$  есть, какъ мы и сказали, отношеніе проекцій отрѣзка нормали на ось  $X$ -овъ и на ось  $Z$ -овъ, т.-е. отношеніе косинусовъ угловъ, образуемыхъ этою нормалью съ двумя осями. Замѣтимъ, что въ предыдущей формулѣ уголъ  $\omega$  обозначаетъ уголъ, составляемый осью положительныхъ  $Z$ -овъ съ отрѣзкомъ проекціи, направленнымъ въ сторону положительныхъ  $X$ -овъ; поэтому, если  $OZ$  (черт. 84) представляетъ ось  $Z$ -овъ и  $O_1N$



Черт. 84

проекцію нормали на плоскость  $ZOO_1$ , то значеніе  $\tan \omega$  по формулѣ (2) выйдетъ отрицательнымъ, и намъ придется, обозначая черезъ  $\omega$  бесконечно-малый уголъ, подлежащій изученію, измѣнить знакъ этого значенія. Уголъ нормали съ  $OZ$  есть бесконечно-малая; значитъ, косинусъ этого угла, образующій знаменатель значенія  $\tan \omega$ , можно замѣнить единицею, и такъ какъ числитель представляетъ бесконечно-малую, то допущенная ошибка отразится только на бесконечно-малыхъ второго порядка. Подставляя въ то же время на мѣсто угла  $\omega$  его тангенсъ и дѣлая указанное выше измѣненіе знака, будемъ имѣть:

$$\omega = \cos(O_1N, O_1O).$$

Для вычисленія этого косинуса замѣчаемъ, что по уравненіямъ нормали  $O_1N$  косинусы угловъ, образуемыхъ ею съ тремя осями, какъ уже сказано было выше (§ 650), выражаются формулами

$$-\delta \cos \lambda (r \cos \alpha + s \sin \alpha), \quad -\delta \cos \lambda (s \cos \alpha + t \sin \alpha), \quad \cos \lambda,$$

гдѣ  $\lambda$  попрежнему обозначаетъ уголъ разсматриваемой нормали съ осью  $Z$ -овъ, а  $\delta$ —бесконечно-малое разстояніе  $OO_1$ ; косинусы угловъ, образуемыхъ  $O_1O$  съ тѣми же осями, будутъ

$$-\cos \alpha, \quad -\sin \alpha \quad \text{и} \quad 0.$$

Слѣдовательно, имѣемъ:

$$\omega = \cos O_1N = \delta \cos \lambda (r \cos^2 \alpha + 2s \sin \alpha \cos \alpha + t \sin^2 \alpha);$$

такъ какъ  $\lambda$  бесконечно-малая, то въ этой формулѣ можно, пренебрегая лишь бесконечно-малыми второго порядка, замѣнить  $\cos \lambda$  единицею. Если, кромѣ того, предположить оси выбранными такъ, что производная  $s$  будетъ равна нулю, то окончательно будемъ имѣть:

$$\omega = \delta (r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha). \quad (3)$$

Отношеніе  $\frac{\omega}{\delta}$  не отличается отъ найденнаго (§ 627) выраженія для кривизны сѣченія поверхности нормальною плоскостью  $ZOO_1$ . Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что проекція нормали въ  $O_1$  на плоскость  $ZOO_1$  есть какъ разъ нормаль къ кривой пересѣченія этой плоскости съ поверхностью. Значитъ, уголъ  $\omega$ , образуемый этою нормалью съ  $OZ$ , есть полная кривизна бесконечно-малой дуги длиною  $\delta$ , и  $\frac{\omega}{\delta}$  представляетъ кривизну. Поэтому мы могли бы не вычислять угла  $\omega$  и писать непосредственно уравненіе (3), какъ слѣдствіе формулъ, относящихся къ кривизнѣ нормальныхъ сѣченій.

§ 652. Уголъ, составляемый нормалью  $OZ$  въ точкѣ  $O$  съ нормалью въ бесконечно-близкой точкѣ  $O_1$ , выводится легко изъ двухъ угловъ, обозначенныхъ буквами  $\theta$  и  $\omega$ , которые теперь извѣстны. Дѣйствительно, если черезъ точку пространства провести три прямыя, соотвѣтственно параллельныя нормали  $OZ$ , нормали  $O_1N$  и проекціи  $O_1N$  на плоскость  $ZOO_1$ , то эти три прямыя образуютъ трехгранный уголъ съ прямымъ двуграннымъ угломъ, которому соотвѣтствуетъ бесконечно-малый прямоугольный сферическій треугольникъ; этотъ послѣдній можно принять за прямолинейный, и, слѣдовательно, въ немъ квадратъ гипотенузы будетъ равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ. Но гипотенуза служитъ мѣрою искомаго угла, а двѣ другія стороны представляютъ углы, обозначенные черезъ  $\theta$  и  $\omega$ ; значитъ, называя черезъ  $\psi$  уголъ между двумя нормальями, имѣемъ:

$$\psi^2 = \theta^2 + \omega^2 = \delta^2(r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha)^2 + (t - r)^2 \delta^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

т.-е.

$$\psi^2 = \delta^2(r^2 \cos^2 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha);$$

таково выраженіе для угла  $\psi$ , образуемаго двумя бесконечно-близкими нормальями, при чемъ не должно забывать, что оси  $X$ -овъ и  $Y$ -овъ касательны къ главнымъ сѣченіямъ.

§ 653. Производныя второго порядка,  $r$  и  $t$ , связаны съ главными радіусами кривизны весьма простыми соотношеніями

$$R_1 = \frac{1}{r},$$

$$R_2 = \frac{1}{t},$$

и, слѣдовательно, найденныя выраженія для угловъ  $\theta$ ,  $\omega$  и  $\psi$  можно представить подъ видомъ

$$\theta = \frac{1}{2} \delta \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin 2\alpha,$$

$$\omega = \delta \left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2} \right),$$

$$\psi^2 = \delta^2 \left( \frac{1}{R_1^2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2^2} \sin^2 \alpha \right),$$

гдѣ, припоминаемъ,  $\delta$  обозначаетъ разстояніе между двумя бесконечно-близкими точ-

камъ, а  $\alpha$ —уголъ между направлениемъ соединяющей ихъ линіи и главнымъ сѣченіемъ, соотвѣтствующимъ радіусу кривизны  $R_1$ .

§ 654. Формула

$$\psi^2 = \delta^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha}{R_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2^2} \right) \quad (1)$$

даетъ средство опредѣлять въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изящнымъ образомъ, произведение радіусовъ кривизны поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, выводимъ изъ нея слѣдующую теорему:

Если отъ точки  $O$ , взятой на поверхности, радіусы кривизны которой  $R_1$  и  $R_2$ , отложить на поверхности безконечно-малую длину  $OO_1$ , въ направленіи, образующемъ съ главнымъ сѣченіемъ, которому соотвѣтствуетъ радіусъ  $R_1$ , уголъ, имѣющій тангенсомъ  $\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ , то уголъ  $\psi$  нормали въ  $O_1$  съ нормалью въ  $O$  будетъ равенъ  $\frac{OO_1}{\sqrt{R_1 R_2}}$ .

Дѣйствительно, полагая

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

имѣемъ:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 + R_2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1 + R_2}}, \end{aligned}$$

и формула (1) даетъ:

$$\psi^2 = \delta^2 \left[ \frac{R_1}{R_1^2(R_1 + R_2)} + \frac{R_2}{R_2^2(R_1 + R_2)} \right] = \delta^2 \frac{1}{R_1 R_2}.$$

§ 655. Когда радіусы кривизны—противоположныхъ знаковъ, предыдущую теорему необходимо измѣнить: иначе, выбранное значеніе для  $\tan \alpha$  выйдетъ мнимымъ; мы должны положить

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \sqrt{\frac{-R_2}{R_1}}, \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_1 - R_2}}, \\ \sin \alpha &= \frac{\sqrt{-R_2}}{\sqrt{R_1 - R_2}}, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно,

$$\psi^2 = \delta^2 \left[ \frac{R_1}{R_1^2(R_1 - R_2)} - \frac{R_2}{R_2^2(R_1 - R_2)} \right] = -\delta^2 \frac{1}{R_1 R_2}.$$

§ 656. Направление, соответствующее углу, определенному въ двухъ предыдущихъ параграфахъ, есть діагональ прямоугольника, построеннаго на осяхъ индикатрисы, когда эта послѣдняя—эллиптическая, и направление асимптоты въ томъ случаѣ, когда, при радіусахъ кривизны съ противоположными знаками, индикатриса—гиперболическая.

Приложимъ предыдущее замѣчаніе, которымъ мы обязаны О. Бонне, къ разысканію закона, по которому измѣняется произведение главныхъ кривизнъ вдоль производящей кривой поверхности. Въ какой-нибудь точкѣ такой поверхности прямолинейная производящая направлена по асимптотѣ индикаторнаго сѣченія. Если поэтому отъ точки  $M$ , расположенной на производящей, отложить на этой прямой бесконечно-малую длину  $MM'$ , то уголъ между нормальми въ точкахъ  $M$  и  $M'$ , раздѣленный на разстояніе  $MM'$ , дастъ искомое значеніе выраженія  $\sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}}$ . Мы видѣли (§ 102), что тангенсъ угла, составляемаго касательною плоскостью къ кривой поверхности съ неподвижною плоскостью, проведенною черезъ производящую, которая содержитъ точку касанія, пропорціоналенъ разстоянію этой точки касанія до неподвижной точки производящей; обозначая этотъ уголъ черезъ  $\varphi$  и разстояніе  $OM$  точки касанія  $M$  до неподвижной точки  $O$  черезъ  $z$ , имѣемъ:

$$\operatorname{tang} \varphi = Gz,$$

при чемъ  $G$  остается постоянною на одной и той же производящей; отсюда заключаемъ:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctang} Gz, \\ d\varphi &= \frac{Gdz}{1+G^2z^2}, \end{aligned}$$

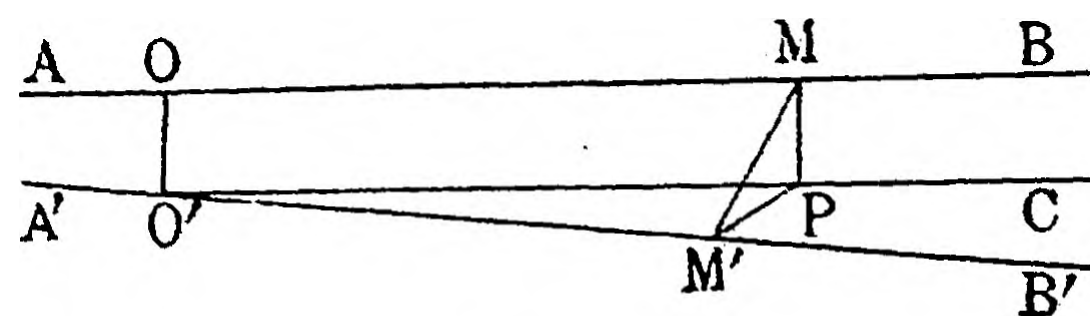
и, слѣдовательно,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}} = \frac{G}{1+G^2z^2},$$

гдѣ  $z$  обозначаетъ разстояніе разсматриваемой точки до неподвижной точки, надлежащимъ образомъ выбранной на производящей.

§ 657. Интересно остановиться на предыдущей формулѣ для геометрическаго опредѣленія положенія точки  $O$ , служащей началомъ длины  $z$ , и постоянной  $G$  для всякой производящей.

Пусть  $AB, A'B'$  (черт. 85) будутъ двѣ бесконечно-близкія производящія кривой



Черт. 85

поверхности и  $OO'$ —ихъ кратчайшее разстояніе. Черезъ точку  $O'$  ведемъ прямую  $O'C$ , параллельную  $OM$ . Пусть  $M$  будетъ какая-нибудь точка  $AB$ . Изъ этой точки  $M$  опускаемъ перпендикуляръ  $MP$  на линію  $O'C$ , который, очевидно, будетъ перпендикуляромъ

также и къ плоскости  $CO'B'$ . Изъ точки  $P$  опускаемъ перпендикуляръ  $PM'$  на  $O'B'$ ;  $MM'$  является, въ силу извѣстной теоремы, перпендикуляромъ къ  $O'B'$ . Кромѣ того, такъ какъ точки  $M$  и  $M'$  бесконечно-близки, линія  $MM'$  лежитъ въ плоскости, касательной въ  $M'$ , которая, проходя также черезъ производящую, служитъ предѣломъ плоскости  $O'M'M$ . Уголъ между этою плоскостью и неподвижною плоскостью  $B'O'C$  измѣряется, очевидно, угломъ при  $M'$  прямоугольнаго треугольника  $MPM'$ , и мы имѣемъ, обозначая черезъ  $\varphi$  дополненіе этого угла,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{M'P}{MP}.$$

Называя же черезъ  $\varepsilon$  уголъ между двумя бесконечно-близкими производящими, имѣемъ:

$$PM' = O'M' \operatorname{tang} \varepsilon;$$

отсюда, замѣняя  $\operatorname{tang} \varepsilon$  бесконечно-малою дугою  $\varepsilon$ , заключаемъ, что

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon}{MP} \cdot O'M',$$

гдѣ  $\frac{\varepsilon}{MP}$  есть отношеніе угла между двумя бесконечно-близкими производящими къ ихъ кратчайшему разстоянію; это отношеніе постоянно для одной и той же производящей и служитъ выраженіемъ количества, обозначеннаго буквою  $G$  въ предыдущемъ параграфѣ;  $O'M'$  — разстояніе, обозначенное буквою  $z$ . Мы видимъ, что неподвижная точка  $O$ , существованіе которой было доказано (§ 102), есть, на каждой производящей, точка, въ которой измѣряется ея кратчайшее разстояніе до смежной производящей. Постоянная  $G$  представляетъ отношеніе угла между обѣими производящими къ ихъ кратчайшему разстоянію. Когда  $G$ , для всѣхъ производящихъ линейчатой поверхности, бесконечно-велико, поверхность (§ 103) — развертывающаяся. Произведеніе радіусовъ кривизны тогда бесконечно-велико; слѣдовательно, одинъ изъ нихъ бесконечно-великъ и индикатриса приводится къ двумъ параллельнымъ прямымъ.

**§ 658.** Предыдущія формулы содержатъ неявно всѣ общія свойства нормалей къ поверхности въ смежности данной точки. Изъ слѣдствій, какія можно изъ нихъ вывести, мы ограничимся слѣдующею теоремою, данною Штурмомъ:

Всѣ нормали къ поверхности въ смежности точки  $O$  можно разсматривать, какъ встрѣчающія двѣ неподвижныя прямыя, взаимно-перпендикулярныя и проведенныя черезъ центры кривизны двухъ главныхъ сѣченій въ плоскостяхъ этихъ сѣченій перпендикулярно къ нормали въ точкѣ  $O$ .

Очевидно, достаточно, для доказательства этой теоремы, отыскать пересѣченіе какой-нибудь нормали съ плоскостями сѣченій и установить, что эти пересѣченія находятся на указанныхъ линіяхъ, если, понятно, пренебречь бесконечно-малыми второго порядка.

Беремъ за оси координатъ нормаль въ точкѣ  $O$  и касательныя къ главнымъ сѣченіямъ. Пусть  $x', y', z'$  будутъ координаты точки  $O'$ ;  $z'$ , какъ бесконечно-малую



второго порядка, можно считать равною нулю; если  $\xi, \eta, \zeta$ —текущія координаты нормали въ  $O'$ , то уравненія этой линіи будутъ

$$\begin{aligned}\xi - x' + (rx' + sy')\zeta &= 0, \\ \eta - y' + (sx' + ty')\zeta &= 0,\end{aligned}$$

и такъ какъ вслѣдствіе особаго выбора осей  $s = 0$ , то они приводятся къ

$$\begin{aligned}\xi - x' + rx'\zeta &= 0, \\ \eta - y' + ty'\zeta &= 0;\end{aligned}$$

чтобы имѣть пересѣченіе съ плоскостью  $ZX$ , нужно положить  $\eta = 0$ ; находимъ:

$$\zeta = \frac{1}{t};$$

значитъ, пересѣченіе находится на параллели оси  $X$ -овъ, проведенной на разстояніи  $\frac{1}{t}$  и проходящей, слѣдовательно, черезъ центръ кривизны сѣченія  $ZOX$ . Такъ же увидимъ, что плоскость  $ZOY$  пересѣкается тою же нормалью на параллели оси  $Y$ -овъ, проведенной черезъ центръ кривизны опредѣляемаго имъ главнаго сѣченія.

Штурмъ вывелъ изъ своей теоремы любопытное замѣчаніе. Если вокругъ точки поверхности начертить бесконечно-малую замкнутую кривую  $\Sigma$ , то нормали къ поверхности, исходящія изъ точекъ этой кривой, образуютъ линейчатую поверхность, производящая которой должна встрѣчать кривую  $\Sigma$  и обѣ только-что опредѣленные прямые. Если, напр., кривая  $\Sigma$  имѣетъ видъ круга, уравненіе поверхности весьма легко получить, и можно установить, что сѣченія, параллельныя плоскости круга, будутъ эллипсы, которые, для двухъ частныхъ положеній, приводятся къ направляющимъ прямымъ. Этотъ результатъ, въ связи съ теоремою, которую мы докажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ, можно сдѣлать очевиднымъ посредствомъ нижеуказаннаго остроумнаго и весьма простаго опыта.

**§ 659.** Закончимъ эту главу доказательствомъ двухъ важныхъ теоремъ, относящихся къ теоріи прямыхъ, нормальныхъ къ одной и той же поверхности.

Если свѣтовые лучи, нормальные къ одной и той же поверхности, проникаютъ изъ одной однородной среды въ другую, также однородную, преломляясь по закону Декарта, то, какова бы ни была раздѣляющая поверхность обѣихъ средъ, они будутъ и послѣ преломленія нормальны къ одной и той же поверхности.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки  $O$  поверхности, раздѣляющей двѣ среды,  $\alpha, \beta, \gamma$ —углы, образуемые падающимъ лучомъ съ осями координатъ,  $\alpha', \beta', \gamma'$ —углы, образуемые съ тѣми же осями преломленнымъ лучомъ,  $l$ —длина, отдѣляющая, на падающемъ лучѣ, точку  $x, y, z$ , гдѣ послѣдній встрѣчаетъ раздѣляющую поверхность, отъ точки  $x_1, y_1, z_1$ , гдѣ онъ пронизываетъ поверхность, къ которой, по предположенію, нормальны всѣ падающіе лучи. Пусть, наконецъ,  $l'$  будетъ длина, отложенная на преломленномъ лучѣ отъ поверхности, раздѣляющей обѣ среды; требуется доказать, что эту длину  $l'$  можно такъ опредѣлить, чтобы поверхность, описанная ею концомъ, была нормальна ко всѣмъ преломленнымъ лучамъ.

Называя через  $x_2, y_2, z_2$  координаты конца длины  $l'$ , имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x + l \cos \alpha, & y_1 &= y + l \cos \beta, & z_1 &= z + l \cos \gamma, \\ x_2 &= x + l' \cos \alpha', & y_2 &= y + l' \cos \beta', & z_2 &= z + l' \cos \gamma'; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= dx + \cos \alpha dl + l d \cos \alpha, & dy_1 &= dy + \cos \beta dl + l d \cos \beta, & dz_1 &= dz + \cos \gamma dl + l d \cos \gamma, \\ dx_2 &= dx + \cos \alpha' dl' + l' d \cos \alpha', & dy_2 &= dy + \cos \beta' dl' + l' d \cos \beta', & dz_2 &= dz + \cos \gamma' dl' + l' d \cos \gamma'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Умноживъ три первыхъ уравненія (2) соотвѣтственно на  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , складываемъ ихъ между собою; то же дѣлаемъ и съ тремя другими, умноженными соотвѣтственно на  $\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma'$ ; получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 \cos \alpha + dy_1 \cos \beta + dz_1 \cos \gamma &= dl + dx \cos \alpha + dy \cos \beta + dz \cos \gamma, \\ dx_2 \cos \alpha' + dy_2 \cos \beta' + dz_2 \cos \gamma' &= dl' + dx \cos \alpha' + dy \cos \beta' + dz \cos \gamma'; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

такъ какъ поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $x_1, y_1, z_1$ , нормальна къ прямой, образующей съ осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ , то

$$dx_1 \cos \alpha + dy_1 \cos \beta + dz_1 \cos \gamma = 0, \quad (4)$$

и, слѣдовательно, первое уравненіе приводится къ

$$0 = dl + \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz, \quad (5)$$

гдѣ  $dx, dy, dz$ —проекціи на оси координатъ произвольнаго перемѣщенія по поверхности, раздѣляющей обѣ среды. Пусть  $ds$  будетъ это перемѣщеніе и  $\lambda, \mu, \nu$ —углы, образуемые имъ съ осями; имѣемъ:

$$dx = ds \cos \lambda, \quad dy = ds \cos \mu, \quad dz = ds \cos \nu,$$

и, значитъ, уравненіе (5) принимаетъ видъ

$$0 = dl + ds(\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu), \quad (6)$$

или, если назвать черезъ  $V$  уголъ, составляемый направлениемъ падающаго луча съ направлениемъ перемѣщенія  $ds$ ,

$$0 = dl + ds \cos V. \quad (7)$$

Разсмотримъ теперь трехгранный уголъ, образуемый падающимъ лучомъ, нормалью къ раздѣляющей поверхности и перемѣщеніемъ  $ds$ ; называя черезъ  $i$  уголъ между падающимъ лучомъ и нормалью и черезъ  $\Omega$  двугранный уголъ въ разсматриваемомъ трехгранномъ углу, имѣющій ребромъ нормаль, пишемъ:

$$\cos V = \sin i \cos \Omega,$$

и, слѣдовательно, уравненіе (7) принимаетъ видъ

$$0 = dl + ds \sin i \cos \Omega. \quad (8)$$

Называя через  $i'$  уголъ, составляемый преломленнымъ лучомъ съ нормалью, и замѣчая, что по закону Декарта оба луча находятся въ одной плоскости съ этою нормалью, точно такъ же увидимъ, что второе уравненіе (3) приметъ видъ

$$\cos \alpha' dx_2 + \cos \beta' dy_2 + \cos \gamma' dz_2 = dl' + ds \sin i' \cos \varrho; \quad (9)$$

называя черезъ  $r$  показатель преломленія, имѣемъ:

$$\sin i' = r \sin i; \quad (10)$$

слѣдовательно, если принять  $l' = rl$ , то  $dl' = rdl$ , вторая часть уравненія (9) въ силу уравненія (8) обратится въ нуль, и мы получимъ:

$$0 = \cos \alpha' dx_2 + \cos \beta' dy_2 + \cos \gamma' dz_2,$$

а это и доказываетъ, что поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ, координаты которыхъ  $x_2, y_2, z_2$ , нормальна къ преломленному лучу. Чтобы получить эту поверхность, нужно, согласно уравненію  $l' = rl$ , отложить на каждомъ преломленномъ лучѣ отъ раздѣляющей поверхности длину, равную произведенію показателя преломленія на длину, которую должно отложить на соответственномъ падающемъ лучѣ для полученія точки поверхности, нормальной къ падающимъ лучамъ; ясно притомъ, что длину  $l'$  такъ же, какъ и длину  $l$ , можно увеличивать или уменьшать на постоянную величину и получать такимъ образомъ параллельныя поверхности.

**§ 660.** По предыдущей теоремѣ однородные свѣтовые лучи, исходящіе изъ одной точки и, слѣдовательно, нормальные къ концентрическимъ сферамъ, могутъ проходить различныя средины, отдѣленные одна отъ другой какими-угодно поверхностями; они будутъ всегда, послѣ cadaго преломленія, нормальны къ одной и той же поверхности. Здѣсь какъ разъ умѣстно указать на весьма простой опытъ, который можетъ, какъ мы говорили (§ 658), служить повѣркою вышедодказанной теоремы Штурма.

Достаточно пропустить въ темной комнатѣ черезъ весьма небольшое отверстіе, продѣланное въ экранѣ, пучокъ однороднаго свѣта, падающаго на сферондъ стакана или на небольшую склянку, наполненную жидкостью и представляющую неправильную кривую поверхность; заднюю сторону покрываютъ бумагою съ небольшимъ отверстіемъ произвольной формы. Лучи, выходящіе черезъ это отверстіе, вошли предварительно черезъ такое малое отверстіе въ экранѣ, что могутъ разсматриваться, какъ исходящіе изъ одной точки; принимая исходящій пучокъ на бѣлую бумагу и постепенно удаляя эту послѣднюю, мы усмотримъ виды различныхъ сѣченій и, въ особенности, замѣтимъ двѣ небольшія, болѣе или менѣе отстоящія одна отъ другой, свѣтлыя черточки, направленія которыхъ взаимно-перпендикулярны.

**§ 661.** Когда прямая пучка касательны къ одной и той же поверхности, необходимое условіе, чтобы онѣ были въ то же время нормальны къ нѣкоторой другой поверхности, принимаетъ весьма изящную форму; необходимо и достаточно, чтобы онѣ были касательны къ ряду геодезическихъ линій, нанесенныхъ на поверхности, или, что то же самое (§ 631), къ линіямъ, соприкасающаяся плоскость которыхъ нормальна въ каждой точкѣ къ поверхности, на которой онѣ расположены.

Замѣчаемъ сначала, что если прямая пучка касательны къ одной и той же поверхности и черезъ каждую точку проходятъ одна изъ нихъ, то необходимо суще-

ствуешь на поверхности рядъ кривыхъ, къ которымъ разсматриваемыя прямыя касательны. Въ самомъ дѣлѣ, каждой точкѣ поверхности соотвѣтствуетъ, по предположенію, прямая пучка, расположенная въ касательной плоскости; движеніе же точки, очевидно, является опредѣленнымъ, если она движется по поверхности, исходя изъ данной точки и направляясь постоянно, въ каждомъ изъ своихъ положеній, касательно къ соотвѣтствующей этому положенію прямой. Пройденная такимъ образомъ кривая имѣетъ касательною въ каждой точкѣ одну изъ прямыхъ пучка, и такъ какъ начальная точка произвольна, то такая кривая, какъ мы и предвидѣли, проходитъ черезъ каждую точку данной поверхности. Послѣ этого пусть

$$z = \varphi(x, y) \quad (1)$$

будетъ уравненіе этой поверхности; называемъ черезъ  $X, Y, Z$  косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями прямою пучка, касающеюся этой поверхности въ точкѣ, координаты которой  $x, y, z$ . Необходимое условіе для существованія, при соотношеніи (1), нормальной поверхности ко всѣмъ прямымъ пучка заключается (§ 648) въ томъ, чтобы сумма

$$Xdx + Ydy + Zdz \quad (2)$$

была дифференціаломъ нѣкоторой функціи отъ  $x$  и  $y$ . Но мы имѣемъ:

$$dz = pdx + qdy, \quad (3)$$

и, кромѣ того, такъ какъ направленіе, опредѣляемое косинусами  $X, Y, Z$ , лежитъ въ касательной плоскости, то

$$Z = pX + qY; \quad (4)$$

значить, выраженіе (2) принимаетъ видъ

$$(X + pZ)dx + (Y + qZ)dy. \quad (5)$$

Условіе, чтобы оно было дифференціаломъ и чтобы, слѣдовательно, существовала нормальная поверхность къ прямымъ пучка, есть

$$\frac{d(X + pZ)}{dy} = \frac{d(Y + qZ)}{dx}, \quad (6)$$

т.-е., въ силу уравненія

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dy} &= \frac{dq}{dx}, \\ \frac{dX}{dy} + p \frac{dZ}{dy} &= \frac{dY}{dx} + q \frac{dZ}{dx}, \end{aligned} \quad (7)$$

при чемъ производныя взяты, понятно, послѣ того какъ  $X, Y, Z$  выражены въ функціи только отъ переменныхъ  $x$  и  $y$ .

Имѣемъ:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1;$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx} + Z \frac{dZ}{dx} &= 0, \\ X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy} + Z \frac{dZ}{dy} &= 0, \end{aligned}$$

и уравненіе (7) принимаетъ видъ

$$Z \frac{dY}{dx} + p \left( X \frac{dX}{dy} + Y \frac{dY}{dy} \right) = Z \frac{dX}{dy} + q \left( X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dY}{dx} \right). \quad (8)$$

Заключая въ скобки частныя производныя до замѣны  $z$  его значеніемъ черезъ  $x$  и  $y$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \left( \frac{dX}{dx} \right) + \left( \frac{dX}{dz} \right) \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dX}{dy} &= \left( \frac{dX}{dy} \right) + \left( \frac{dX}{dz} \right) \frac{dz}{dy}, \\ \frac{dY}{dx} &= \left( \frac{dY}{dx} \right) + \left( \frac{dY}{dz} \right) \frac{dz}{dx}, \\ \frac{dY}{dy} &= \left( \frac{dY}{dy} \right) + \left( \frac{dY}{dz} \right) \frac{dz}{dy}. \end{aligned}$$

Замѣняя  $Z$  черезъ  $pX + qY$  и принимая во вниманіе эти уравненія, а также обозначенія  $\frac{dz}{dx} = p$ ,  $\frac{dz}{dy} = q$ , видимъ, что условіе (8) приметъ видъ

$$q \left[ X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dX}{dy} + (pX + qY) \frac{dX}{dz} \right] = p \left[ X \frac{dY}{dx} + Y \frac{dY}{dy} + (pX + qY) \frac{dY}{dz} \right]; \quad (9)$$

называя черезъ  $ds$  бесконечно-малую дугу кривой, къ которой разсматриваемая прямая касательна, имѣемъ:

$$X = \frac{dx}{ds}, \quad Y = \frac{dy}{ds}, \quad Z = \frac{dz}{ds},$$

и, значитъ,

$$X \frac{dX}{dx} + Y \frac{dX}{dy} + (pX + qY) \frac{dX}{dz} = \frac{dX}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dX}{dy} \frac{dy}{ds} + \frac{dX}{dz} \frac{dz}{ds} = \frac{dX}{ds};$$

точно такъ же

$$X \frac{dY}{dx} + Y \frac{dY}{dy} + Z \frac{dY}{dz} = \frac{dY}{ds};$$

уравненіе (9) равносильно поэтому

$$q \frac{dX}{ds} = p \frac{dY}{ds},$$

или

$$\frac{\frac{dX}{ds}}{p} = \frac{\frac{dY}{ds}}{q}; \quad (10)$$



но  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  и, слѣдовательно,

$$X \frac{dX}{ds} + Y \frac{dY}{ds} + Z \frac{dZ}{ds} = 0; \quad (11)$$

изъ уравненія (10) выводимъ:

$$\frac{X \frac{dX}{ds} + Y \frac{dY}{ds}}{pX + qY} = \frac{\frac{dX}{ds}}{p}$$

и, пользуясь уравненіемъ (11), пишемъ:

$$\frac{Z \frac{dZ}{ds}}{Z} = - \frac{\frac{dX}{ds}}{p};$$

итакъ, наконецъ,

$$\frac{\frac{dX}{ds}}{p} = \frac{\frac{dY}{ds}}{q} = - \frac{\frac{dZ}{ds}}{1},$$

а это доказываетъ, что направленіе, образующее съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $p, q, -1$ , совпадаетъ съ направленіемъ, образующимъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$ ; первое изъ этихъ направленій есть направленіе нормали къ поверхности  $S$ , а второе—направленіе главной нормали къ кривой  $\Sigma$ . Для совпаденія этихъ двухъ направленій необходимо и достаточно, чтобы соприкасающаяся плоскость кривой  $\Sigma$  была въ каждой точкѣ нормальна къ поверхности  $S$ .

**§ 662.** Ту же теорему можно доказать геометрически слѣдующимъ образомъ: чтобы прямыя пучка были нормальны къ одной и той же поверхности, необходимо и достаточно (§ 649), чтобы каждая изъ нихъ встрѣчалась съ двумя другими бесконечно-близкими прямыми, расположенными во взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ рассматриваемую прямую. Рассмотримъ, въ занимающемъ насъ случаѣ, какую-нибудь прямую  $D$ , принадлежащую пучку, и геодезическую линію  $\Sigma$ , къ которой она касательна. Одна изъ бесконечно-близкихъ прямыхъ пучка, встрѣчающая линію  $D$ , есть, очевидно, бесконечно-близкая касательная линіи  $\Sigma$ , и плоскость, въ которой обѣ онѣ лежатъ (§ 563), является соприкасающеюся плоскостью этой кривой; такъ какъ всѣ прямыя пучка касательны къ поверхности, обозначенной черезъ  $S$ , то пусть  $A$  будетъ точка касанія прямой  $D$ , и  $A'$  — точка касанія второй бесконечно-близкой прямой, которая, сооставляя часть пучка, встрѣчаетъ прямую  $D$ ; линія  $AA'$  представляетъ въ предѣлѣ касательную къ поверхности  $S$ , для которой плоскость  $DA A'$  будетъ, слѣдовательно, касательною плоскостью; одна изъ двухъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую  $D$  и черезъ бесконечно-близкую прямую пучка, есть, такимъ образомъ, соприкасающаяся геодезической линіи поверхности  $S$ , а другая касательна къ этой поверхности; отсюда слѣдуетъ (§ 631), что онѣ взаимно-перпендикулярны.

Изученіе предыдущаго доказательства можетъ подать поводъ для одного затрудненія, на которомъ необходимо остановиться. Разсужденіе, посредствомъ котораго мы доказываемъ, что плоскость, проходящая черезъ прямую  $D$  и черезъ бесконечно-близкую прямую пучка, касательна къ поверхности  $S$ , повидимому, приложимо къ обѣмъ прямымъ пучка, встрѣчающимъ  $D$ , а отсюда можно было бы заключить, что обѣ плоскости, содержащія прямыя, не только не перпендикулярны между собою, какъ мы утверждаемъ, но приводятся, напротивъ, къ одной всего плоскости. Это противорѣчіе происходитъ отъ того, что предложеніе, на которомъ основано разсужденіе, представляетъ одинъ случай исключенія, относящійся какъ разъ къ одной изъ прямыхъ, встрѣчающихъ  $D$ . Въ самомъ дѣлѣ, мы допускаемъ, что плоскость, проходящая черезъ прямую, касающуюся поверхности  $S$  въ точкѣ  $A$ , и черезъ точку  $A'$ , бесконечно-близкую къ  $A$ , есть касательная къ поверхности  $S$  вслѣдствіе того, что содержитъ двѣ касательныя прямыя къ этой поверхности: самое прямую  $D$  и линію  $AA'$ , соединяющую двѣ бесконечно-близкія точки. Но тутъ, очевидно, имѣетъ мѣсто исключеніе, когда обѣ эти прямыя совпадаютъ, т.-е. когда точка  $A'$  расположена на кривой, касательной къ прямой  $D$ ; въ такомъ случаѣ общее разсужденіе не годится, и плоскость, проходящая черезъ точку  $A'$  и черезъ прямую  $D$ , есть соприкасающаяся плоскость кривой  $AA'$ .

#### У П Р А Ж Н Е Н І Я

1. По какому бы закону ни слѣдовали одна за другою въ пространствѣ прямыя, но только такъ, чтобы изъ каждой точки пространства выходила одна изъ нихъ, при чемъ пусть  $AN$  будетъ та изъ нихъ, которая выходитъ изъ точки  $A$ , а  $AB$  и  $AC$  — двѣ бесконечно-малыя линіи, перпендикулярныя между собою и къ  $AN$ , углы, соотвѣтственно составленные прямою, исходящею изъ точки  $B$ , съ плоскостью  $NAB$ , и прямою, исходящею изъ  $C$ , съ  $NAC$ , имѣютъ постоянную разность.

2. Кратчайшее разстояніе между нормальми къ поверхности, проведенными черезъ двѣ бесконечно-близкія точки  $A$  и  $B$ , равно произведенію разстоянія  $AB$  на косинусъ угла, образуемаго имъ съ сопряженнымъ направлениемъ на поверхности.

3. Если  $AB$ ,  $AC$  — два сопряженныхъ направленія въ точкѣ  $A$  поверхности и если  $\Delta$ ,  $\Delta'$  обозначаютъ разстоянія точки  $A$  до точекъ, гдѣ проведены кратчайшія разстоянія между нормалью въ  $A$  и нормальми въ  $B$  и  $C$ , то сумма  $\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta'}$  постоянна и равна суммѣ главныхъ кривизнъ поверхности.

4. Предположимъ, что свѣтовые лучи, нормальныя вначалѣ къ поверхности  $S$ , испытываютъ рядъ преломленій. Обозначимъ черезъ  $k$  часть луча, содержащуюся въ первой срединѣ, между поверхностью  $S$  и поверхностью, отдѣляющею первую средину отъ второй, черезъ  $l'$  часть того же луча, содержащуюся во второй срединѣ, черезъ  $l''$  часть, содержащуюся въ третьей срединѣ, и т. д., наконецъ, черезъ  $k_n$  часть этого луча, содержащуюся въ послѣдней срединѣ, между послѣднею раздѣляющею поверхностью и одною изъ поверхностей, къ которымъ лучи нормальны въ послѣдней срединѣ; будемъ имѣть:

$$ak + a_1 l' + a_2 l'' + \dots + a_n k_n = \text{const.},$$

гдѣ  $a$ ,  $a_1$ , ...,  $a_n$  — постоянныя, зависящія отъ показателей преломленія различныхъ срединъ.

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### Теорія линій кривизны

---

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ЛИНІЙ КРИВИЗНЫ

**§ 663.** Линіею кривизны поверхности называется линія, расположенная на этой поверхности и касательная въ каждой изъ своихъ точекъ къ одному изъ главныхъ сѣченій. Такъ какъ въ каждой точкѣ поверхности проходитъ два главныхъ сѣченія, перпендикулярныхъ другъ къ другу, то также въ каждой точкѣ проходитъ двѣ линіи кривизны, касательныхъ къ этимъ сѣченіямъ и пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ. Линіи кривизны поверхности образуютъ, слѣдовательно, двѣ системы, каждая изъ которыхъ покрываетъ цѣликомъ поверхность, потому что черезъ каждую изъ ея точекъ проходитъ линія каждой системы. Двѣ линіи кривизны различныхъ системъ пересѣкаются перпендикулярно, и, по крайней мѣрѣ вообще, двѣ линіи одной и той же системы не пересѣкаются. Однако, существуютъ нѣкоторыя точки (§ 635), для которыхъ направленіе главныхъ сѣченій неопредѣленно и гдѣ можетъ перекрещиваться безчисленное множество линій кривизны; мы увидимъ, впрочемъ, что даже въ этихъ точкахъ округленія проходитъ иногда только одна линія кривизны.

**§ 664.** Такъ какъ линія кривизны въ каждой точкѣ касательна къ главному сѣченію поверхности, то каждую изъ точекъ такой линіи можно разсмотрѣть, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка, какъ принадлежащую главному сѣченію, соответствующему бесконечно-близкой точкѣ. Отсюда вытекаетъ (§ 636), что нормали, проведенныя къ поверхности черезъ двѣ бесконечно-близкія точки линіи кривизны, можно разсматривать, какъ встрѣчающіяся, если пренебречь бесконечно-малыми порядка выше перваго. Это свойство—характеристическое; въ самомъ дѣлѣ, оно требуетъ (§ 637), чтобы направленіе линіи, соединяющей начальныя точки двухъ бесконечно-близкихъ нормалей, совпадало съ направленіемъ главнаго сѣченія и чтобы, слѣдовательно, геометрическимъ мѣстомъ этихъ начальныхъ точекъ была линія кривизны.

Предыдущее свойство можно высказать слѣдующимъ образомъ: чтобы линія, нанесенная на поверхности, была линіею кривизны, необходимо и достаточно, чтобы

нормали, проведенныя черезъ ея различныя точки, составляли развертывающуюся поверхность.

Должно замѣтить, что плоскость и сфера—исключительныя поверхности, на которыхъ, собственно говоря, нѣтъ линій кривизны, или на которыхъ, если угодно, всякая линія есть линія кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, главныя сѣченія неопредѣленны, и произвольную линію, нанесенную на плоской или сферической поверхности, можно разсматривать, какъ касательную въ каждой точкѣ къ одному изъ нихъ. Нормали, проведенныя черезъ точки этой линіи образуютъ, къ тому же, цилиндръ или конусъ, т.-е. въ обоихъ случаяхъ развертывающуюся поверхность.

#### ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ УРАВНЕНІЕ ЛИНІЙ КРИВИЗНЫ

§ 665. Когда уравненіе поверхности дано, можно въ каждой точкѣ опредѣлить направленіе главныхъ сѣченій, а значитъ, и направленіе линій кривизны. Отсюда слѣдуетъ, что когда даны координаты точки одной изъ этихъ линій, можно вычислить ихъ дифференціалы и, слѣдовательно, составить дифференціальное уравненіе линій кривизны.

Впрочемъ, свойство, доказанное въ предыдущемъ параграфѣ, даетъ возможность составить прямо это уравненіе, не прибѣгая къ формуламъ, относящимся къ главнымъ сѣченіямъ.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки данной поверхности. Полагаемъ, какъ всегда,  $\frac{dz}{dx} = p$ ,  $\frac{dz}{dy} = q$ ,  $\frac{d^2z}{dx^2} = r$ ,  $\frac{d^2z}{dx dy} = s$ ,  $\frac{d^2z}{dy^2} = t$ ; уравненія нормали будутъ

$$\left. \begin{aligned} \xi - x + p(\zeta - z) &= 0, \\ \eta - y + q(\zeta - z) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $\xi, \eta, \zeta$  обозначаютъ текуція координаты.

Нормаль въ смежной точкѣ, координаты которой  $x + dx, y + dy, z + dz$ , имѣетъ уравненіями

$$\left. \begin{aligned} \xi - x - dx + (p + dp)(\zeta - z - dz) &= 0, \\ \eta - y - dy + (q + dq)(\zeta - z - dz) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Чтобы обѣ нормали встрѣчались, необходимо, чтобы уравненія (1) и (2) были совмѣстны; совмѣстное ихъ разсмотрѣніе, если пренебречь безконечно-малыми второго порядка, даетъ:

$$\begin{aligned} dx + pdz - dp(\zeta - z) &= 0, \\ dy + qdz - dq(\zeta - z) &= 0; \end{aligned}$$

приравнявая другъ другу значенія  $\zeta - z$ , выведенныя изъ этихъ уравненій, пишемъ:

$$\frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}.$$

Замѣняя въ этомъ уравненіи  $dz$ ,  $dp$  и  $dq$  ихъ значеніями, получимъ дифференціальное уравненіе линій кривизны. Имѣемъ:

$$dz = pdx + qdy,$$

$$dp = rdx + sdy,$$

$$dq = sdx + tdy,$$

и уравненіе принимаетъ видъ

$$\frac{dx(1+p^2) + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{dy(1+q^2) + pqdx}{sdx + tdy},$$

или, по упрощеніи,

$$dy^2[pqt - s(1+q^2)] + dxdy[(1+p^2)t - (1+q^2)r] + dx^2[(1+p^2)s - pqr] = 0. \quad (3)$$

Это уравненіе отличается отъ уравненія, опредѣляющаго (§ 633) направленіе главныхъ сѣченій, только постановкою  $dx$  и  $dy$  на мѣсто  $\cos\alpha$  и  $\cos\beta$ . Мы могли бы это предвидѣть, такъ какъ дифференціалы координатъ точекъ кривой пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ касательною съ осями.

#### § 666. Уравненія

$$\left. \begin{aligned} dx + pdz - (\zeta - z)dp &= 0, \\ dy + qdz - (\zeta - z)dq &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

разсмотрѣнныя совмѣстно съ уравненіями нормали, даютъ координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  точки пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей; изъ нихъ выводимъ:

$$\zeta - z = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}, \quad (2)$$

т.-е. по замѣнѣ  $dz$ ,  $dp$ ,  $dq$  ихъ значеніями,

$$\zeta - z = \frac{(1+p^2)pdx + pdy}{rdx + sdy} = \frac{(1+q^2)dy + pqdx}{tdy + sdx}. \quad (3)$$

Соотношеніе (3) равносильно двумъ уравненіямъ, между которыми можно исключить отношеніе  $\frac{dy}{dx}$ ; получаемъ такимъ образомъ соотношеніе

$$(\zeta - z)^2(rt - s^2) + (\zeta - z)[2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r] + 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

По этому уравненію значенія  $\zeta - z$  одинаковы со значеніями  $\frac{1}{D}$  въ уравненіи (12) § 634-го, и, слѣдовательно, значенія  $(\zeta - z)\sqrt{1+p^2+q^2}$  равны  $\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{D}$ , т.-е. радіусамъ кривизны главныхъ сѣченій. Но  $\zeta - z$  есть проекція на ось  $z$ -овъ части нормали, содержащейся между поверхностью и точкою встрѣчи съ смежною нормалію; значить, произведеніе  $(\zeta - z)\sqrt{1+p^2+q^2}$  есть сама длина этой нормали, которая



выходить равною главному радиусу кривизны. Отсюда вытекаетъ, что двѣ безконечно-близкія нормали пересѣкаются какъ разъ въ центрѣ кривизны главнаго сѣченія.

§ 667. Когда уравненіе поверхности дано подѣ видомъ

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

то иногда выгодно вводить въ дифференціальное уравненіе линій кривизны вмѣсто производныхъ отъ  $z$  по  $x$  и по  $y$  частныя производныя отъ функціи  $\varphi$ . Можно было бы легко произвести это преобразование въ полученныхъ выше формулахъ, но проще снова разсмотрѣть вопросъ при этомъ новомъ обозначеніи. Пусть, какъ всегда,  $\xi, \eta, \zeta$  обозначаютъ текущія координаты; нормаль въ точкѣ, координаты которой  $x, y, z$ , имѣетъ уравненіями

$$\frac{\xi - x}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\eta - y}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\zeta - z}{\frac{d\varphi}{dz}},$$

или

$$\left. \begin{aligned} (\xi - x) \frac{d\varphi}{dz} - (\zeta - z) \frac{d\varphi}{dx} &= 0, \\ (\eta - y) \frac{d\varphi}{dz} - (\zeta - z) \frac{d\varphi}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если желаемъ выразить, что нормаль въ точкѣ  $x, y, z$  встрѣчаетъ нормаль, соответствующую смежной точкѣ, имѣющей координатами  $x + dx, y + dy, z + dz$ , то для этого нужно написать, что уравненія (2) совмѣстны съ уравненіями, получаемыми отъ ихъ дифференцированія по  $x, y, z$ , которыя разсматриваются, какъ одновременно пзмѣняющіяся; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} (\xi - x) d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dx - (\zeta - z) d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d\varphi}{dx} dz &= 0, \\ (\eta - y) d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dz}\right) dy - (\zeta - z) d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d\varphi}{dy} dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Исключеніе  $(\xi - x), (\eta - y), (\zeta - z)$  между уравненіями (2) и (3) даетъ:

$$d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dz} dy - \frac{d\varphi}{dy} dz\right) + d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx} dz - \frac{d\varphi}{dz} dx\right) + d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)\left(\frac{d\varphi}{dy} dx - \frac{d\varphi}{dx} dy\right) = 0. \quad (4)$$

Кромѣ того, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx + \frac{d^2\varphi}{dxdy} dy + \frac{d^2\varphi}{dxdz} dz, \\ d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dxdy} dx + \frac{d^2\varphi}{dy^2} dy + \frac{d^2\varphi}{dydz} dz, \\ d\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dxdz} dx + \frac{d^2\varphi}{dydz} dy + \frac{d^2\varphi}{dz^2} dz; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

слѣдовательно, уравненіе (4) преобразовывается въ уравненіе второй степени относительно  $dx, dy, dz$ , къ которому нужно присоединить

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = 0.$$

§ 668. Разберемъ слѣдующій случай: въ то время какъ касательная плоскость въ точкѣ  $x, y, z$  параллельна плоскости  $XY$ , касательныя къ линіямъ кривизны параллельны оси  $X$ -овъ и оси  $Y$ -овъ. Тогда, въ этой точкѣ, мы имѣемъ  $dz = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dy} = 0$ , и уравненіе (4) должно удовлетворяться рѣшеніями  $dx = 0$ ,  $dy = 0$ . Но при такихъ предположеніяхъ оно пріобрѣтаетъ одинъ изъ видовъ

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} \cdot d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0, \quad (7)$$

смотря по тому, предполагаемъ ли  $dx = 0$ , или  $dy = 0$ . Кромѣ того, имѣемъ:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dx^2} dx + \frac{d^2\varphi}{dxdy} dy + \frac{d^2\varphi}{dxdz} dz, \\ d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) &= \frac{d^2\varphi}{dxdy} dx + \frac{d^2\varphi}{dy^2} dy + \frac{d^2\varphi}{dydz} dz, \end{aligned}$$

или, такъ какъ въ уравненіи (6)  $dx = 0$ ,  $dz = 0$  и въ уравненіи (7)  $dy = 0$ ,  $dz = 0$ ,

$$d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{d^2\varphi}{dxdy} dy, \quad d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d^2\varphi}{dxdy} dx.$$

Слѣдовательно, имѣя  $\frac{d\varphi}{dz}$  отличнымъ отъ нуля, заключаемъ, что уравненія (6) и (7) приводятся оба къ

$$\frac{d^2\varphi}{dxdy} = 0. \quad (8)$$

Это есть необходимое и достаточное условіе, чтобы въ точкѣ, гдѣ касательная плоскость параллельна плоскости  $XY$ , линіи кривизны были касательны къ осямъ координатъ.

§ 669. Разсмотримъ линію кривизны на какой-угодно поверхности и назовемъ черезъ  $X, Y, Z$  косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ. Такъ какъ линія кривизны касательна въ каждой точкѣ къ главному сѣченію, то имѣемъ (§ 637):

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}, \quad (1)$$

гдѣ дифференціалы относятся, понятно, къ безконечно-малому перемѣщенію по самой линіи кривизны. Кромѣ того, мы видѣли (§ 637), что общее значеніе этихъ трехъ отношеній равно кривизнѣ нормального сѣченія, касательнаго къ рассматриваемой линіи кривизны.

Эта замѣчательная теорема, отмѣченная О. Родригомъ (O. Rodrigues), равносильна дифференціальному уравненію линій кривизны, которое, къ тому же, не трудно вывести отсюда явнымъ образомъ, также какъ и уравненіе второй степени,

имѣющее корнями два главныхъ радіуса кривизны поверхности. Чтобы это показать, рассмотримъ уравненія

$$\left. \begin{aligned} dx - \rho dX &= 0, \\ dy - \rho dY &= 0, \\ dz - \rho dZ &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} dX &= \frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{dy} dy + \frac{dX}{dz} dz, \\ dY &= \frac{dY}{dx} dx + \frac{dY}{dy} dy + \frac{dY}{dz} dz, \\ dZ &= \frac{dZ}{dx} dx + \frac{dZ}{dy} dy + \frac{dZ}{dz} dz, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и уравненія (2) принимаютъ видъ

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \rho \frac{dX}{dx}\right) dx - \rho \frac{dX}{dy} dy - \rho \frac{dX}{dz} dz &= 0, \\ -\rho \frac{dX}{dx} dx + \left(1 - \rho \frac{dY}{dy}\right) dy - \rho \frac{dY}{dz} dz &= 0, \\ -\rho \frac{dZ}{dx} dx - \rho \frac{dZ}{dy} dy + \left(1 - \rho \frac{dZ}{dz}\right) dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Выражая, что эти уравненія совмѣстны, получаемъ уравненіе относительно  $\rho$ , которое, повидимому, третьей степени, но въ которомъ члены съ  $\rho^3$  исчезаютъ; такъ какъ предположено, что это уравненіе удовлетворяется, то два изъ уравненій (4) содержатъ третье и опредѣляютъ отношенія  $\frac{dz}{dx}$ ,  $\frac{dz}{dy}$ , которыя соотвѣтствуютъ перемѣщенію по линіи кривизны. Если требуется получить найденное выше (§ 665) другимъ путемъ уравненіе относительно  $\frac{dy}{dx}$ , то должно замѣнить  $dz$  его значеніемъ

$$dz = p dx + q dy.$$

Результатъ исключенія  $\rho$  между полученными такимъ образомъ уравненіями будетъ уравненіемъ второй степени относительно  $\frac{dy}{dx}$ .

Мы не станемъ развивать этихъ вычисленій, представляющихъ мало интереса, но замѣтимъ, что принципъ, на которомъ они покоятся, весьма важенъ, и мы не разъ будемъ имѣть случай прибѣгнуть къ его помощи.

**§ 670.** Выведемъ непосредственно изъ предыдущихъ разсужденій интересное слѣдствіе, относящееся къ выраженію разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками на поверхности.

Предположимъ, что положеніе точки на поверхности опредѣлено значеніями, приписанными двумъ перемѣннымъ  $\alpha$  и  $\beta$ . Постоянное значеніе, приписанное одной изъ перемѣнныхъ, опредѣляетъ кривую на поверхности, и когда  $\alpha$  и  $\beta$  даны, точка опредѣляется пересѣченіемъ двухъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ даннымъ значеніямъ. Предположимъ  $\alpha$  и  $\beta$  выбранными такъ, что кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ

значеніямъ той или другой перемѣнной, будутъ какъ разъ линіями кривизны поверхности; пусть тогда  $x, y, z$  обозначаютъ прямолинейныя координаты какой-нибудь точки этой поверхности, а  $X, Y, Z$ —косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью въ этой точкѣ съ осями координатъ. Эти величины  $x, y, z, X, Y, Z$ —опредѣленныя функціи отъ  $\alpha$  и  $\beta$ , и если назвать черезъ  $\rho_1, \rho_2$  главные радіусы кривизны, соотвѣтствующіе линіямъ, для которыхъ  $\alpha$  и  $\beta$  поочередно постоянны, то полученныя (§ 669) уравненія будутъ равносильны

$$\begin{aligned}\rho_1 \frac{dX}{d\beta} &= \frac{dx}{d\beta}, & \rho_2 \frac{dX}{d\alpha} &= \frac{dx}{d\alpha}, \\ \rho_1 \frac{dY}{d\beta} &= \frac{dy}{d\beta}, & \rho_2 \frac{dY}{d\alpha} &= \frac{dy}{d\alpha}, \\ \rho_1 \frac{dZ}{d\beta} &= \frac{dz}{d\beta}, & \rho_2 \frac{dZ}{d\alpha} &= \frac{dz}{d\alpha}.\end{aligned}$$

Если подставить на мѣсто перемѣнныхъ  $\alpha$  и  $\beta$  двѣ другія перемѣнныя  $u$  и  $v$ , представляющія отъ первыхъ извѣстныя функціи, то  $x, y, z$  явятся функціями отъ  $u$  и  $v$ , и ихъ частныя производныя будутъ даны формулами

$$\begin{aligned}\frac{dx}{du} &= \frac{dx}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \frac{dx}{d\beta} \frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{dX}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{dX}{d\beta} \frac{d\beta}{du}, \\ \frac{dy}{du} &= \frac{dy}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \frac{dy}{d\beta} \frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{dY}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{dY}{d\beta} \frac{d\beta}{du}, \\ \frac{dz}{du} &= \frac{dz}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \frac{dz}{d\beta} \frac{d\beta}{du} = \rho_2 \frac{dZ}{d\alpha} \frac{d\alpha}{du} + \rho_1 \frac{dZ}{d\beta} \frac{d\beta}{du}.\end{aligned}$$

Производныя по второй перемѣнной  $v$  выразятся точно такимъ же образомъ. Случай, гдѣ перемѣнная  $u$  совпадаетъ съ  $\alpha$ , заслуживаетъ быть отмѣченнымъ: такъ какъ  $\frac{dx}{du}$  равняется, въ такомъ случаѣ, единицѣ и производныя по  $u$  являются производными по  $\alpha$ , то

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\alpha} &= \rho_2 \frac{dX}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dX}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha}, \\ \frac{dy}{d\alpha} &= \rho_2 \frac{dY}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dY}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha}, \\ \frac{dz}{d\alpha} &= \rho_2 \frac{dZ}{d\alpha} + \rho_1 \frac{dZ}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha}.\end{aligned}$$

Въ этихъ трехъ уравненіяхъ мы приняли за независимыя перемѣнныя параметръ  $\alpha$  и какую-угодно перемѣнную  $v$ , которая остается постоянною при вычисленіи производныхъ по  $\alpha$ . Мы видимъ, что во вторыхъ частяхъ производныя  $\frac{dX}{d\alpha}, \frac{dY}{d\alpha}, \frac{dZ}{d\alpha}$  имѣютъ коэффициентомъ радіусъ кривизны  $\rho_2$ , относящійся къ линіи кривизны, перпендикулярной къ той, для точекъ которой  $\alpha$  постоянно.

**§ 671.** Когда  $x, y, z, X, Y, Z$  выражены въ функціи отъ двухъ какихъ-угодно перемѣнныхъ  $u$  и  $v$ , то между частными производными этихъ функцій существуютъ необходимыя соотношенія, съ которыми мы сейчасъ познакомимся.

Для какого-угодно перемѣщенія по поверхности имѣемъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad (1)$$

и такъ какъ  $x, y, z$ —функции отъ  $u$  и  $v$ , то, примѣняя уравненіе (1) къ двумъ перемѣщеніямъ, происходящимъ отъ бесконечно-малаго измѣненія, приписаннаго каждый разъ только одной изъ двухъ переменныхъ, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} X \frac{dx}{du} + Y \frac{dy}{du} + Z \frac{dz}{du} &= 0, \\ X \frac{dx}{dv} + Y \frac{dy}{dv} + Z \frac{dz}{dv} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кромѣ того, уравненіе

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

дастъ:

$$\left. \begin{aligned} X \frac{dX}{du} + Y \frac{dY}{du} + Z \frac{dZ}{du} &= 0, \\ X \frac{dX}{dv} + Y \frac{dY}{dv} + Z \frac{dZ}{dv} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Каждое изъ двухъ уравненій (3) должно быть слѣдствіемъ уравненій (2), потому что иначе мы имѣли бы три различныхъ уравненія между  $X, Y, Z$ , для которыхъ было бы возможно только одно рѣшеніе

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Итакъ, необходимо, чтобы уравненія (2) могли получаться отъ сложенія уравненій (3) по умноженіи этихъ послѣднихъ на подобранные надлежащимъ образомъ коэффициенты, и, слѣдовательно, обозначая черезъ  $M$  и  $N$  надлежащія функции, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= M \frac{dX}{du} + N \frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv} &= M' \frac{dX}{du} + N' \frac{dX}{dv}, \\ \frac{dy}{du} &= M \frac{dY}{du} + N \frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv} &= M' \frac{dY}{du} + N' \frac{dY}{dv}, \\ \frac{dz}{du} &= M \frac{dZ}{du} + N \frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv} &= M' \frac{dZ}{du} + N' \frac{dZ}{dv}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Доказательство этихъ уравненій не имѣетъ мѣста, когда два уравненія (3) представляютъ слѣдствіе одно другого, т.-е. когда

$$\frac{\frac{dX}{du}}{\frac{dX}{dv}} = \frac{\frac{dY}{du}}{\frac{dY}{dv}} = \frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{dZ}{dv}}. \quad (5)$$

Эти соотношенія выражаютъ, что  $Y$  и  $Z$ —функции отъ  $X$ , или, другими словами, что  $X, Y, Z$  могутъ выражаться всѣ трое въ функции отъ одной только переменной; каждому значенію этой переменной соответствуетъ нѣкоторое направленіе нормали, и такъ какъ невозможно, чтобы поверхность допускала безчисленное множество ка-



сательныхъ плоскостей, параллельныхъ между собою, то соотвѣтственная касательная плоскость опредѣленна. Такъ какъ уравненіе касательной плоскости опредѣляется здѣсь только одною переменною, то поверхность является огибающею положеній плоскости, въ уравненіе которой входитъ только одинъ параметръ, т.-е. представляетъ развертывающуюся поверхность. Итакъ, однѣ лишь развертывающіяся поверхности составляютъ исключеніе изъ только-что полученнаго результата.

§ 672. Выбравъ двѣ какія-нибудь переменныя  $u$  и  $v$  и составивъ уравненія, возможность которыхъ только-что была доказана,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= M \frac{dX}{du} + N \frac{dX}{dv}, & \frac{dx}{dv} &= M' \frac{dX}{du} + N' \frac{dX}{dv}, \\ \frac{dy}{du} &= M \frac{dY}{du} + N \frac{dY}{dv}, & \frac{dy}{dv} &= M' \frac{dY}{du} + N' \frac{dY}{dv}, \\ \frac{dz}{du} &= M \frac{dZ}{du} + N \frac{dZ}{dv}, & \frac{dz}{dv} &= M' \frac{dZ}{du} + N' \frac{dZ}{dv}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

мы можемъ вывести изъ нихъ, въ каждой точкѣ, выраженіе для обоихъ радіусовъ кривизны поверхности. Дѣйствительно, перемѣщаясь по линіи кривизны и называя черезъ  $\rho$  соотвѣтственный радіусъ, имѣемъ (§ 669):

$$dx = \rho dX, \quad dy = \rho dY, \quad dz = \rho dZ, \quad (2)$$

т.-е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{du} du + \frac{dx}{dv} dv &= \rho \left( \frac{dX}{du} du + \frac{dX}{dv} dv \right), \\ \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv &= \rho \left( \frac{dY}{du} du + \frac{dY}{dv} dv \right), \\ \frac{dz}{du} du + \frac{dz}{dv} dv &= \rho \left( \frac{dZ}{du} du + \frac{dZ}{dv} dv \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Замѣняя въ этихъ уравненіяхъ  $\frac{dx}{du}$ ,  $\frac{dx}{dv}$ , ... значеніями изъ системы (1), мы получимъ три уравненія, каждое изъ которыхъ можетъ дать значеніе одного изъ трехъ отношеній

$$\frac{\frac{dX}{du}}{\frac{dX}{dv}}, \quad \frac{\frac{dY}{du}}{\frac{dY}{dv}}, \quad \frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{dZ}{dv}}, \quad (4)$$

и эти значенія будутъ совершенно одни и тѣ же. Мы, однако же, знаемъ, что эти три дроби равны между собою только въ случаѣ развертывающейся поверхности; такимъ образомъ, при устраненіи этого случая нужно, чтобы тождественныя выраженія, получаема для этихъ отношеній изъ нашихъ уравненій, приводились къ  $\frac{0}{0}$ , а для этого должно имѣть:

$$\left. \begin{aligned} (M - \rho) du + M' dv &= 0, \\ N du + (N' - \rho) dv &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

отсюда заключаемъ, что

$$(M - \rho)(N' - \rho) - M'N = 0; \quad (6)$$

изъ этого уравненія второй степени мы и находимъ радіусы кривизны. Зная  $\rho$ , изъ уравненій (5) получаемъ значеніе отношенія  $\frac{du}{dv}$  для соотвѣтственной линіи кривизны.

Если предположить, что одна изъ линій кривизны соотвѣтствуетъ постоянному значенію  $u$ , то для этой линіи имѣемъ  $du = 0$ ; такъ какъ  $dv$  неизбѣжно въ этомъ случаѣ отлочно отъ нуля, то уравненія (5) даютъ:

$$M' = 0, \quad N' = \rho,$$

что согласуется съ результатами, полученными болѣе непосредственно (§ 670).

#### ПОВЕРХНОСТЬ, КАСАТЕЛЬНАЯ КЪ НОРМАЛЯМЪ ДАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 673. Нормали поверхности, вообще, касательны къ двумъ другимъ поверхностямъ, которыя можно опредѣлить, пользуясь предыдущими выводами. Въ самомъ дѣлѣ, рассматривая линіи кривизны одной изъ системъ, видимъ, что нормали, проведенныя къ поверхности черезъ точки каждой изъ нихъ, касательны къ одной и той же кривой, и поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ этихъ кривыхъ, очевидно, касательна ко всѣмъ нормалямъ данной поверхности. Линіи кривизны второй системы могутъ точно такъ же служить для опредѣленія второй поверхности, равнымъ образомъ касающейся всѣхъ нормалей данной.

§ 674. Никакая другая поверхность не раздѣляетъ съ только-что указанными свойства касаться всѣхъ нормалей данной поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, вообразимъ поверхность  $\Sigma$ , касающуюся въ каждой изъ своихъ точекъ одной изъ нормалей поверхности  $S$ . Мы можемъ представить, что на  $\Sigma$  нанесены кривыя, касательныя въ каждой точкѣ къ соотвѣтственной нормали поверхности  $S$ ; касательныя къ одной изъ этихъ кривыхъ образуютъ развертывающуюся поверхность, производящія которой нормальны къ  $S$  и, значитъ, пересекаютъ эту послѣднюю по линіи кривизны. Следовательно, поверхность  $\Sigma$  есть геометрическое мѣсто реберъ возврата развертывающихся поверхностей, образуемыхъ нормалями въ различныхъ точкахъ линіи кривизны поверхности  $S$ , т.-е. является одною изъ двухъ поверхностей, опредѣленныхъ въ предыдущемъ параграфѣ.

§ 675. Обѣ поверхности, къ которымъ, какъ мы только-что видѣли, касательны нормали одной и той же поверхности, имѣютъ между собою нѣкоторую зависимость. При произвольномъ ихъ выборѣ было бы невозможно, вообще, найти третью поверхность, нормали которой были бы касательны къ первымъ двумъ за-разъ.

Обѣ поверхности  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , къ которымъ касательны нормали одной и той же поверхности  $S$ , дѣйствительно, таковы, что въ нѣкоторой точкѣ пространства, куда помѣщенъ глазъ наблюдателя, ихъ видимые контуры кажутся пересекающимися подъ прямымъ угломъ.

Для доказательства этой теоремы рассмотримъ какую-нибудь точку поверхности  $S$  и двѣ линіи кривизны, перекрещивающіяся въ ней; нормали къ поверхности,

проведенныя черезъ точки каждой изъ этихъ линій кривизны, образуютъ двѣ развертывающіяся поверхности, каждая изъ которыхъ касательна къ одной изъ поверхностей  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  и имѣетъ ребро возврата, расположенное на другой. Съ перваго взгляда кажется, что такъ какъ всѣ производящія развертывающейся поверхности касательны къ поверхностямъ  $\Sigma$  и  $\Sigma'$ , то эта поверхность сама касательна за-разъ къ послѣднимъ двумъ, но это, однако, не имѣетъ мѣста, какъ было показано (§ 662), для той, которая содержитъ ребро возврата, потому что плоскость, въ которой лежатъ двѣ бесконечно-близкія касательныя нѣкоторой поверхности, перестаетъ быть касательною къ поверхности, когда линія, соединяющая точки касанія, совпадаетъ въ предѣлѣ съ каждою изъ двухъ касательныхъ.

Двѣ развертывающіяся поверхности, пересѣкающіяся по нормали въ данной точкѣ поверхности  $S$ , взаимно-перпендикулярны, подобно линіямъ кривизны, по которымъ онѣ пересѣкаютъ поверхность  $S$ . Пусть глазъ наблюдателя помѣщается въ какой-нибудь точкѣ общей производящей этихъ двухъ поверхностей: конусы, описанные около  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  изъ этой точки, какъ изъ вершины, пройдутъ оба черезъ производящую двухъ развертывающихся поверхностей, къ которымъ они будутъ касательны; слѣдовательно, они пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, что и требовалось доказать.

**§ 676.** Хотя предыдущая теорема устанавливаетъ весьма тѣсную зависимость между двумя поверхностями, къ которымъ касательны нормали данной поверхности, далеко еще до возможности, когда дана одна изъ нихъ, опредѣлить другую. Въ самомъ дѣлѣ, если дана только одна поверхность, къ которой касательны нормали нѣкоторой неизвѣстной поверхности, то эту послѣднюю можно опредѣлить безчисленнымъ множествомъ способовъ, нанося на первой какой-угодно рядъ геодезическихъ линій (§ 662), касательныя къ которымъ она будетъ пересѣкать подъ прямымъ угломъ.

Ищемъ, напр., поверхность, нормали которой касательны къ сферѣ. По только-что сказанному нужно представить на сферѣ какой-нибудь рядъ большихъ круговъ; искомая поверхность пересѣчетъ подъ прямымъ угломъ касательныя къ этимъ кругамъ и, слѣдовательно, будетъ геометрическимъ мѣстомъ ряда эвольвентъ круга.

Легко видѣть, что въ разсматриваемомъ случаѣ вторая поверхность, къ которой касательны нормали, есть конусъ съ вершиною въ центрѣ сферы. Дѣйствительно, каковы бы ни были большіе круги, нанесенные на сферѣ, ихъ плоскости, проходящія всѣ черезъ центръ, огибаютъ конусъ, вершина котораго помѣщается въ этомъ центрѣ, и всѣ ихъ касательныя, будучи расположены въ касательныхъ плоскостяхъ этого конуса, очевидно, касаются его поверхности.

Обратно, если дается сфера и какой-нибудь конусъ съ вершиною въ центрѣ этой послѣдней, плоскости, касательныя къ этому конусу, пересѣкаютъ сферу по кругамъ, касательныя къ которымъ, касающіяся за-разъ сферы и конуса, будутъ нормлями одной и той же поверхности. Эту поверхность можетъ произвести, какъ очень легко видѣть, эвольвента круга, расположенная въ одной изъ плоскостей, касательныхъ къ конусу, и движущаяся безъ измѣненія вида, въ то время какъ содержащая ее плоскость катится по конусу, касаясь его послѣдовательно по всѣмъ производящимъ.

**§ 677.** Обще можно указать вычерчиваніе поверхностей, нормали которыхъ касательны къ данной развертывающейся поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, всѣ нормали

къ неизвѣстной поверхности, точки касанія которыхъ находятся на одной и той же производящей развертывающейся поверхности, лежатъ въ одной и той же плоскости; значитъ, онѣ являются касательными къ одной и той же кривой и, слѣдовательно, пронизываютъ неизвѣстную поверхность по линіи кривизны, очевидно, плоской. Выбираемъ за эту линію произвольную кривую, расположенную въ плоскости, касательной къ развертывающейся поверхности: если затѣмъ предположить, что эта плоскость катится по поверхности, касаясь ея послѣдовательно по каждой производящей, вокругъ которой она повертывается, чтобы перейти въ бесконечно-близкое положеніе, произвольная кривая, увлекаемая, безъ измѣненія вида, движеніемъ содержащей ее плоскости, опишетъ требуемую поверхность.

Дѣйствительно, каждая изъ ея точекъ движется все время нормально къ самой плоскости кривой, и, слѣдовательно, нормалью къ описываемой поверхности будетъ сама нормаль къ описывающей ее кривой, лежащая въ плоскости этой кривой и постоянно касающаяся данной развертывающейся поверхности.

#### Линія кривизны, общая для двухъ поверхностей

**§ 678.** Когда кривая пересѣченія двухъ поверхностей служитъ для каждой изъ нихъ линіею кривизны, обѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если провести черезъ каждую точку пересѣченія нормаль къ каждой изъ разсматриваемыхъ поверхностей, то обѣ эти системы нормалей будутъ огибать двѣ кривыя, которыя являются (§ 610) двумя эволютами кривой пересѣченія. Было же доказано (§ 619), что нормали, исходящія изъ каждой точки кривой и касательныя къ двумъ различнымъ эволютамъ, образуютъ постоянный уголъ.

Обратно, если двѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ и если ихъ пересѣченіе есть линія кривизны для первой изъ нихъ, то она будетъ также линіею кривизны и для второй.

Дѣйствительно, нормали, проведенныя къ первой поверхности черезъ точки пересѣченія, огибаютъ эволюту этого послѣдняго; вращая же каждую изъ нихъ на постоянный уголъ вокругъ касательной къ кривой пересѣченія для полученія нормалей ко второй поверхности, мы опредѣлимъ (§ 619) нормали, касательныя ко второй эволютѣ кривой пересѣченія; значитъ, эта линія есть линія кривизны второй поверхности, потому что нормали, проведенныя къ этой поверхности черезъ различныя точки, касательны къ одной и той же кривой.

Когда плоскость или сфера пересѣкаетъ поверхность по линіи кривизны, эту линію всегда можно разсмотрѣть (§ 664), какъ линію кривизны одновременно и для плоскости или сферы. Значитъ, предыдущая теорема приложима, и, слѣдовательно, обѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ. Обратно, если плоскость или сфера пересѣкаетъ какую-нибудь поверхность подъ постояннымъ угломъ, пересѣченіе, будучи непремѣнно линіею кривизны для плоскости или сферы, есть также линія кривизны и для второй поверхности.

**§ 679.** Предыдущія теоремы можно легко доказать аналитически. Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= 0, \\ \psi(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$



будутъ уравненія двухъ поверхностей, пересѣкающихся по общей линіи кривизны. Назовемъ черезъ  $x, y, z$  координаты точки пересѣченія и черезъ  $dx, dy, dz$  измѣненія, относящіяся къ безконечно-малому перемѣщенію по этой линіи; обозначая углы, образуемые съ осями нормалями къ обѣимъ поверхностямъ, черезъ  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ , имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz &= 0, \\ \cos \alpha' dx + \cos \beta' dy + \cos \gamma' dz &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

кромѣ того, такъ какъ пересѣченіе есть линія кривизны каждой изъ поверхностей, то имѣемъ (§ 669):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d \cos \alpha} &= \frac{dy}{d \cos \beta} = \frac{dz}{d \cos \gamma}, \\ \frac{dx}{d \cos \alpha'} &= \frac{dy}{d \cos \beta'} = \frac{dz}{d \cos \gamma'}, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, уравненія (1) даютъ:

$$\begin{aligned} \cos \alpha d \cos \alpha' + \cos \beta d \cos \beta' + \cos \gamma d \cos \gamma' &= 0, \\ \cos \alpha' d \cos \alpha + \cos \beta' d \cos \beta + \cos \gamma' d \cos \gamma &= 0; \end{aligned}$$

складывая эти два уравненія, находимъ:

$$d(\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') = 0,$$

т.-е.

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \text{const.}$$

Это уравненіе, очевидно, выражаетъ, что обѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ.

**§ 680.** Обратнo, если двѣ поверхности пересѣкаются подъ постояннымъ угломъ и если пересѣченіе есть линія кривизны для первой изъ нихъ, то она будетъ также линіею кривизны и для второй. Дѣйствительно, удерживая обозначенія предыдущаго параграфа, имѣемъ:

$$\frac{dx}{d \cos \alpha} = \frac{dy}{d \cos \beta} = \frac{dz}{d \cos \gamma}, \quad (1)$$

гдѣ знакъ  $d$  относится попержнему къ безконечно-малому перемѣщенію по линіи пересѣченія; выражая же, что уголъ между двумя нормалями постояненъ, пишемъ:

$$d(\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma') = 0; \quad (2)$$

наконецъ, имѣемъ два уравненія

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha dx + \cos \beta dy + \cos \gamma dz &= 0, \\ \cos \alpha' dx + \cos \beta' dy + \cos \gamma' dz &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

выражающія, что кривая пересѣченія перпендикулярна къ обѣимъ нормалямъ.



Изъ уравненій (1) и (3), очевидно, выводимъ уравненіе

$$\cos\alpha'd\cos\alpha + \cos\beta'd\cos\beta + \cos\gamma'd\cos\gamma = 0, \quad (4)$$

которое, совмѣстно съ уравненіемъ (2), даетъ:

$$\cos\alpha d\cos\alpha' + \cos\beta d\cos\beta' + \cos\gamma d\cos\gamma' = 0; \quad (5)$$

имѣя при этомъ

$$\cos\alpha'd\cos\alpha' + \cos\beta'd\cos\beta' + \cos\gamma'd\cos\gamma' = 0, \quad (6)$$

изъ уравненій (5) и (6), сближая ихъ съ уравненіями (3), находимъ:

$$\frac{dx}{d\cos\alpha'} = \frac{dy}{d\cos\beta'} = \frac{dz}{d\cos\gamma'}, \quad (7)$$

а это выражаетъ (§ 669), что пересѣченіе есть линія кривизны второй поверхности.

#### ОРТОГОНАЛЬНЫЯ ПОВЕРХНОСТИ

§ 681. Мы уже рассматривали (§ 124) системы поверхностей, которыя, пересѣкаясь между собою подъ прямыми углами (ортогонально), дѣлятъ пространство на бесконечно-малые параллелепипеды. Это ученіе, обѣщающее, повидимому, стать очень важнымъ, уже дало прекрасные результаты и въ геометріи, и въ анализѣ. Однимъ изъ извѣстнѣйшихъ и важнѣйшихъ предложеній въ этой теоріи, которымъ мы обязаны Шарлю Дюпену, является слѣдующая теорема.

Когда три ряда поверхностей пересѣкаются ортогонально, пересѣченіе двухъ какихъ-нибудь изъ нихъ, принадлежащихъ различнымъ рядамъ, есть линія кривизны на каждой изъ нихъ.

Въ самомъ дѣлѣ, беремъ точку  $A$  пересѣченія трехъ поверхностей рассматриваемой системы, и пусть  $AX$ ,  $AY$ ,  $AZ$  будутъ касательныя къ тремъ линіямъ пересѣченія, а также, по нашимъ предположеніямъ, нормали къ тремъ поверхностямъ; принимаемъ эти линіи за оси координатъ и рассматриваемъ на нихъ соотвѣтственно три точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ , отстоящихъ отъ точки  $A$  на бесконечно-малыхъ и равныхъ между собою разстояніяхъ. Можно, пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, рассматривать эти точки расположенными на кривыхъ пересѣченія, къ которымъ оси касательны. Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  будутъ углы, составляемые съ осями нормальями въ  $M$  къ двумъ поверхностямъ, пересѣкающимся по  $AM$ ; такъ какъ эти двѣ нормали взаимно-перпендикулярны, то

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \quad (1)$$

Замѣчая, что  $\alpha$  и  $\alpha'$  бесконечно-мало отличаются отъ прямого угла, а  $\beta$  и  $\gamma'$  бесконечно-малы, и пренебрегая бесконечно-малыми второго порядка, переписываемъ уравненіе (1) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos\beta' + \cos\gamma = 0. \quad (2)$$

Пусть точно такъ же  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$  будутъ углы, составляемые съ осями нормалями въ  $N$  къ двумъ поверхностямъ, пересекающимся по  $AN$ , и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_2', \beta_2', \gamma_2'$  — аналогичные углы для точки  $P$ . Подобно предыдущему пишемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma_1' + \cos \alpha_1 &= 0, \\ \cos \alpha_2' + \cos \beta_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

но по доказанной теоремѣ (§ 649) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_2 &= \cos \gamma_1', \\ \cos \gamma_2 &= \cos \alpha_2', \\ \cos \alpha_1 &= \cos \beta_2'. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Замѣняя первыя части этихъ трехъ уравненій ихъ значеніями изъ уравненій (2) и (3), получаемъ:

$$\cos \beta_2' + \cos \alpha_2' = 0, \quad \cos \gamma_1' + \cos \beta_2' = 0, \quad \cos \alpha_2' + \cos \gamma_1' = 0. \quad (5)$$

Складывая по-членно два первыхъ уравненія и вычитая третье, окончательно находимъ:

$$2 \cos \beta_2' = 0; \quad (6)$$

отсюда непосредственно выводимъ:

$$\cos \gamma_1' = 0, \quad \cos \alpha_2' = 0, \quad \cos \alpha_1 = 0, \quad \cos \gamma_2 = 0, \quad \cos \beta_2 = 0. \quad (7)$$

Уравненіе (6) выражаетъ, что нормаль въ  $M$  къ одной изъ поверхностей, проходящихъ черезъ эту точку, перпендикулярна къ оси  $Y$ -овъ и, слѣдовательно, расположена въ плоскости  $ZAX$ ; значитъ, она встрѣчаетъ нормаль, проведенную въ точкѣ  $A$ , т.-е.  $AZ$ , и  $AM$  есть направленіе линіи кривизны. Точно такъ же увидимъ, что въ силу пяти уравненій (7) линіи кривизны трехъ поверхностей, пересекающихся въ  $A$ , касательны къ осямъ  $AX, AY, AZ$ . Принимая же во вниманіе, что точка  $A$  выбрана произвольно, заключаемъ, что каждая кривая пересѣченія касательна въ каждой точкѣ къ одной изъ линій кривизны поверхностей, на которыхъ она расположена, а это, очевидно, требуетъ, чтобы она сама была линіею кривизны.

**§ 682.** Такъ какъ предыдущая теорема весьма важна, то мы дадимъ второе ея доказательство.

Пусть

$$\varphi_1(x, y, z) = \rho_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = \rho_2, \quad \varphi_3(x, y, z) = \rho_3$$

будутъ уравненія трехъ системъ поверхностей, при чемъ  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  обозначаютъ произвольные параметры, значеніями которыхъ характеризуются эти поверхности. Предположимъ оси выбранными такъ, чтобы начало координатъ помѣщалось въ точкѣ скрещенія трехъ нашихъ поверхностей. Кромѣ того предположимъ, что первая поверхность касательна къ плоскости  $XZ$ , вторая — къ плоскости  $XY$  и третья — къ плоскости  $YZ$ ; поверхности, пересекаясь постоянно подъ прямымъ угломъ, даютъ тождества:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d\varphi_2}{dy} + \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d\varphi_2}{dz} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_3}{dx} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{d\varphi_3}{dy} + \frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d\varphi_3}{dz} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\varphi_3}{dy} \frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{d\varphi_3}{dz} \frac{d\varphi_1}{dz} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируемъ уравненіе (1) по  $x$ , уравненіе (2) по  $y$  и уравненіе (3) по  $z$ :

$$\frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{d^2\varphi_1}{dx dy} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d^2\varphi_2}{dx dy} + \frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d^2\varphi_1}{dx dz} + \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d^2\varphi_2}{dx dz} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d^2\varphi_3}{dx dy} + \frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d^2\varphi_2}{dx dy} + \frac{d\varphi_2}{dy} \frac{d^2\varphi_3}{dy^2} + \frac{d\varphi_3}{dy} \frac{d^2\varphi_2}{dy^2} + \frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d^2\varphi_3}{dz dy} + \frac{d\varphi_3}{dz} \frac{d^2\varphi_2}{dz dy} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d^2\varphi_1}{dx dz} + \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d^2\varphi_3}{dx dz} + \frac{d\varphi_3}{dy} \frac{d^2\varphi_1}{dy dz} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d^2\varphi_3}{dy dz} + \frac{d\varphi_3}{dz} \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + \frac{d\varphi_1}{dz} \frac{d^2\varphi_3}{dz^2} = 0. \quad (6)$$

Полагая въ этихъ тождественныхъ уравненіяхъ  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , будемъ имѣть, согласно предположеніямъ относительно плоскостей, касательныхъ въ началѣ координатъ,

$$\frac{d\varphi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_1}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dz} = 0, \quad \frac{d\varphi_3}{dy} = 0,$$

и уравненія примутъ видъ

$$\frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d^2\varphi_2}{dx dy} + \frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d^2\varphi_1}{dx dz} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d^2\varphi_2}{dx dy} + \frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d^2\varphi_3}{dz dy} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d^2\varphi_1}{dx dz} + \frac{d\varphi_1}{dy} \frac{d^2\varphi_3}{dy dz} = 0. \quad (9)$$

Изъ уравненій (7) и (9) выводимъ:

$$\frac{d^2\varphi_2}{dx dy} \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{d^2\varphi_3}{dy dz} \frac{d\varphi_2}{dz} = 0,$$

что совмѣстно съ (8) даетъ:

$$\frac{d\varphi_3}{dx} \frac{d^2\varphi_2}{dx dy} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} \frac{d^2\varphi_3}{dy dz} = 0;$$

замѣчая же, что  $\frac{d\varphi_3}{dx}$ ,  $\frac{d\varphi_2}{dz}$  не нули, имѣемъ отсюда:

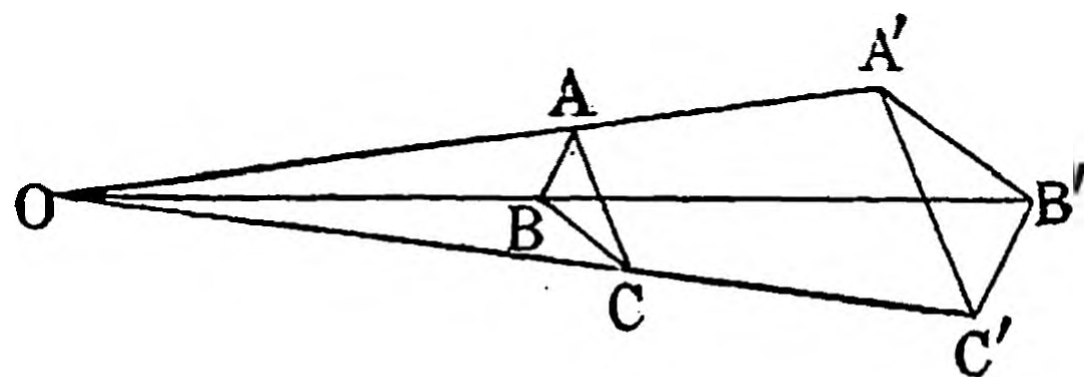
$$\frac{d^2\varphi_2}{dx dy} = 0, \quad \frac{d^2\varphi_3}{dy dz} = 0;$$

точно такъ же нашли бы:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx dz} = 0.$$

Это доказывает (§ 668), что линіи кривизны, въ началѣ координатъ, касательны къ осямъ координатъ, и такъ какъ начало является произвольною точкою пространства, то линіи кривизны въ каждой точкѣ касательны къ пересѣченіямъ поверхностей попарно и, слѣдовательно, представляютъ не что иное, какъ эти самыя пересѣченія.

§ 683. Геометры получили, посредствомъ методовъ, на которыхъ мы впоследствии остановимся и которые не могутъ быть изложены въ настоящій моментъ, большое число системъ ортогональныхъ поверхностей и этимъ дали возможность, въ силу предыдущей теоремы, находить линіи кривизны. Покажемъ здѣсь только, какимъ образомъ можно, зная одну такую систему, вывести изъ нея безчисленное множество другихъ. Для этого достаточно поверхности, составляющія данную систему, подвергнуть преобразованію посредствомъ *взаимныхъ радіусовъ-векторовъ*, состоящему, какъ извѣстно, въ томъ, чтобы каждую точку  $M$  системы соединить съ неподвижною точкою  $O$  и продолжить  $OM$  до такой точки  $M'$ , чтобы произведение  $OM \cdot OM'$  равнялось данному квадрату. Опреѣленная такимъ образомъ точка  $M'$  называется соотвѣтственною точки  $M$ . Такъ какъ каждая точка первообразной фигуры имѣетъ себѣ соотвѣтственную, то каждая линія и каждая поверхность имѣетъ, очевидно, соотвѣтственную линію или поверхность. Какой-угодно безконечно-малый треугольникъ  $ABC$  (черт. 86) преобразовывается по этому способу въ подобный треуголь-



Черт. 86

никъ  $A'B'C'$ . Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ  $K$  данную линію, имѣемъ, по предположенію,  $OA \cdot OA' = K^2$ ,  $OB \cdot OB' = K^2$ ,  $OC \cdot OC' = K^2$ . Отсюда вытекаетъ, что треугольники  $OAB$ ,  $OA'B'$  подобны и что

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OA'},$$

а такъ какъ  $OB$  безконечно-мало отличается отъ  $OA$ , то

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}.$$

Точно такъ же найдемъ, пренебрегая безконечно-малою частью отношенія,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OA}{OA'}, \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{OA}{OA'}.$$

Итакъ, стороны треугольниковъ  $ABC$ ,  $A'B'C'$  пропорціональны, и треугольники, слѣдовательно, подобны. Отсюда заключаемъ, что уголъ между какими-угодно двумя кривыми тотъ же, что и уголъ между соотвѣтственными кривыми. Дѣйствительно, этотъ уголъ можно всегда разсмотрѣть, какъ принадлежащій безконечно-малому тре-

угольнику, третья сторона котораго подобрана надлежащимъ образомъ и который, по предыдущему замѣчанію, преобразуется въ подобный треугольникъ.

Ясно также, что двѣ поверхности, пересѣкающіяся въ нѣкоторой точкѣ, преобразуются въ двѣ поверхности, которыя въ соотвѣтственной точкѣ составятъ такой же двугранный уголъ. Въ самомъ дѣлѣ, при разсмотрѣніи бесконечно-малаго тетраэдра грани тетраэдра, получаемаго послѣ преобразованія, которыя вслѣдствіе ихъ малости можно принимать за плоскія, будутъ подобны гранямъ первообразнаго тетраэдра, и, слѣдовательно, двугранные углы обѣихъ фигуръ будутъ равны. Всякій же двугранный уголъ, очевидно, можетъ принадлежать бесконечно-малому тетраэдру, подобранному надлежащимъ образомъ.

Такъ какъ углы при преобразованіи остаются безъ измѣненія, то система ортогональныхъ поверхностей перейдетъ въ новую систему, поверхности которой будутъ также ортогональны. Пересѣченіе двухъ поверхностей первой системы, очевидно, соотвѣтствуетъ пересѣченію двухъ поверхностей системы, получаемой послѣ преобразованія; значитъ, линіи кривизны какой-угодно изъ поверхностей, получаемыхъ послѣ преобразованія, являются линіями, соотвѣтствующими линіямъ кривизны первообразной поверхности.

Эта теорема прилагается, какъ легко видѣть, къ преобразованію, посредствомъ взаимныхъ радіусовъ-векторовъ, какой-угодно поверхности, будетъ ли послѣдняя составлять, или нѣтъ часть системы ортогональныхъ поверхностей. Ограниченіе, дѣйствительно, излишне, потому что выражаемое имъ условіе выполняется какою-угодно поверхностью, безъ всякаго исключенія. Въ самомъ дѣлѣ, если нанести на какой-нибудь поверхности линіи кривизны двоякаго рода и въ точкахъ каждой изъ нихъ возставить нормали, то образуется два ряда развертывающихся поверхностей, ортогонально пересѣкающихся и составляющихъ, вмѣстѣ съ поверхностями, параллельными данной, очевидно, тройную ортогональную систему, частью которой и является эта послѣдняя. Слѣдовательно, предыдущая теорема къ ней приложима, и при ея преобразованіи посредствомъ взаимныхъ радіусовъ-векторовъ всѣ ея линіи кривизны перейдутъ въ линіи кривизны полученной поверхности.

#### ОПРЕДѢЛЕНІЕ ЛИНІЙ КРИВИЗНЫ ВЪ НѢКОТОРЫХЪ ПРОСТЫХЪ СЛУЧАЯХЪ

**§ 684.** Определеніе линій кривизны нѣкоторой поверхности сводится къ нахожденію кривой по данному направленію ея касательной въ каждой точкѣ. Эта задача приводитъ къ дифференціальному уравненію, выведенному въ § 665-мъ. Разыскать уравненіе въ конечномъ видѣ, исходя изъ этого дифференціальнаго уравненія, составляетъ задачу интегральнаго исчисленія, которой мы не станемъ касаться въ этой главѣ и которая притомъ далека отъ рѣшенія въ общемъ видѣ.

Мы ограничимся нѣсколькими простыми случаями, въ которыхъ геометрическія соображенія позволяютъ опредѣлить линіи кривизны. Не трудно затѣмъ удостовѣриться, что ихъ уравненіе удовлетворяетъ извѣстному дифференціальному уравненію.

**§ 685. Поверхности вращенія.**— Линіи кривизны поверхности вращенія, очевидно, меридіаны и параллели поверхности. Дѣйствительно, нормали въ различныхъ точкахъ меридіана расположены въ плоскости этого меридіана и, слѣдовательно, встрѣчаются



попарно. Нормали въ различныхъ точкахъ одной и той же параллели образуютъ конусъ, въ вершинѣ котораго каждая изъ нихъ встрѣчается съ бесконечно-близкою нормалью. Эти линіи кривизны пересѣкаются, какъ и должно, подъ прямымъ угломъ.

Ясно, что двумя главными радіусами кривизны будутъ, въ каждой точкѣ, радіусъ кривизны меридіональной линіи и часть нормали между поверхностью и осью.

Когда поверхность вращенія сферическая, всѣ нормали проходятъ черезъ центръ, и всякая линія на поверхности можетъ быть принята за линію кривизны.

**§ 686.** Предыдущіе результаты легко можно вывести изъ формулъ, данныхъ выше. Пусть

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \quad (1)$$

будетъ уравненіе поверхности вращенія вокругъ оси  $z$ -овъ. Выводимъ изъ него:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \\ \frac{dz}{dy} &= q = 2y\varphi'(x^2 + y^2), \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= r = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2\varphi''(x^2 + y^2), \\ \frac{d^2z}{dy^2} &= t = 2\varphi'(x^2 + y^2) + 4y^2\varphi''(x^2 + y^2), \\ \frac{d^2z}{dxdy} &= s = 4xy\varphi''(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Дифференціальное уравненіе линій кривизны (§ 665) послѣ подстановки этихъ значеній приметъ видъ

$$[8\varphi'^3(x^2 + y^2) - 4\varphi''(x^2 + y^2)] \left[ xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} - xy \right] = 0. \quad (2)$$

Приравнивая второй множитель нулю, находимъ для  $\frac{dy}{dx}$  два значенія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Первое изъ этихъ уравненій равносильно

$$ydy + xdx = 0,$$

откуда

$$y^2 + x^2 = c. \quad (4)$$

Второе можно написать въ видѣ

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда

$$\lg y - \lg x = c; \quad (5)$$

слѣдовательно, оно выражаетъ, что отношеніе  $\frac{y}{x}$  равно нѣкоторой постоянной. Первое изъ этихъ уравненій представляетъ, очевидно, проекцію параллелей на плоскость  $XU$ , а второе—проекцію меридіановъ.

Если функція  $\varphi$  такова, что

$$2\varphi'^3(x^2 + y^2) - \varphi''(x^2 + y^2) = 0, \quad (6)$$

то уравненіе (2) удовлетворяется тождественно, и линіи кривизны будутъ неопредѣленными. Этотъ случай есть случай сферической поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, полагая  $x^2 + y^2 = u$ , переписываемъ уравненіе (6) въ видѣ

$$\frac{\varphi''(u)}{\varphi'^3(u)} = 2,$$

откуда

$$-\frac{1}{\varphi'^2(u)} = 4u + c,$$

и, значитъ,

$$\varphi'(u) = \sqrt{\frac{1}{-c - 4u}}.$$

Вторая часть есть производная отъ  $-\frac{1}{2}\sqrt{-c - 4u}$ , и мы имѣемъ:

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2}\sqrt{-c - 4u} + c,$$

при чемъ  $c$  и  $c'$  обозначаютъ двѣ постоянныя. Слѣдовательно, уравненіе поверхности вращенія, линіи кривизны которой неопредѣленны, есть

$$z = -\frac{1}{2}\sqrt{-c - 4(x^2 + y^2)} + c',$$

или

$$(2z - 2c')^2 + 4(x^2 + y^2) = -c,$$

уравненіе сферы, центръ которой находится на оси  $z$ -овъ.

**§ 687.** Предыдущій анализъ показываетъ, что между поверхностями вращенія сфера является единственною, линіи кривизны которой неопредѣленны. Можно легко доказать, что никакая другая поверхность не раздѣляетъ съ нею этого свойства.

Чтобы линіи кривизны поверхности были неопредѣленны, нужно, очевидно, чтобы каждая точка была точкою округленія и чтобы направленіе главныхъ сѣченій было произвольнымъ. Ясно, что сфера и плоскость выполняютъ это условіе; покажемъ, что онѣ единственныя. Дѣйствительно, рассмотримъ поверхность, каждая точка которой есть точка округленія; такъ какъ оба радіуса кривизны равны въ каждой точкѣ, то двѣ полы поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны, сливаются въ одну. Какая-нибудь линія на этой поверхности будетъ геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны, относящихся къ точкамъ нѣкоторой линіи, нанесенной на данной поверхности. Значитъ, нормали, проведенныя черезъ точки этой послѣдней

линіи, касательны къ первой; отсюда заключаемъ, что если  $M$  есть точка поверхности, служащей геометрическимъ мѣстомъ центровъ кривизны, и  $A$ —соотвѣтственная точка данной поверхности, то прямая  $AM$  касательна ко всякой кривой, проведенной черезъ точку  $M$  по первой поверхности; такимъ образомъ, геометрическое мѣсто точекъ  $M$  имѣетъ въ каждой точкѣ касательную прямую, а не касательную плоскость. Слѣдовательно, это геометрическое мѣсто есть кривая, а не поверхность; но тогда выходитъ, что всѣ нормали къ данной поверхности касательны къ одной и той же кривой и образуютъ только одну развертывающуюся поверхность. Это, очевидно, невозможно; отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто точекъ  $M$  должно приводиться къ точкѣ и что поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ точекъ  $A$ , представляетъ сферу.

§ 688. Анализъ легко приводитъ къ тому же слѣдствію. Если всѣ точки поверхности—точки округленія, то, для всѣхъ значеній  $x$  и  $y$ , имѣемъ (§ 635):

$$\frac{t}{1+q^2} = \frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq},$$

откуда, замѣчая, что

$$\begin{aligned} r &= \frac{dp}{dx}, \\ t &= \frac{dq}{dy}, \\ s &= \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \end{aligned}$$

выводимъ:

$$\begin{aligned} \frac{p \cdot \frac{dp}{dx}}{1+p^2} &= \frac{1}{q} \frac{dq}{dx}, \\ \frac{q \cdot \frac{dq}{dy}}{1+q^2} &= \frac{1}{p} \frac{dp}{dy}, \end{aligned}$$

или, что одно и то же,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln \sqrt{1+p^2} - \ln q) &= 0, \\ \frac{d}{dy}(\ln \sqrt{1+q^2} - \ln p) &= 0; \end{aligned}$$

значитъ,  $\frac{\sqrt{1+p^2}}{q}$  не зависитъ отъ  $x$ , а  $\frac{\sqrt{1+q^2}}{p}$  не зависитъ отъ  $y$ , и мы, такимъ образомъ, имѣемъ:

$$\begin{aligned} 1+p^2 &= Yq^2, \\ 1+q^2 &= Xp^2, \end{aligned}$$

гдѣ  $Y$ —функция отъ  $y$ , а  $X$ —функция отъ  $x$ . Изъ этихъ двухъ уравненій находимъ:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{1+Y}{XY-1}}, \\ q &= \sqrt{\frac{1+X}{XY-1}}, \end{aligned}$$

и, слѣдовательно, уравненіе  $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$  даетъ:

$$\frac{1}{(1+X)^{3/2}} \frac{dX}{dx} = \frac{1}{(1+Y)^{3/2}} \frac{dY}{dy}.$$

Такъ какъ первая часть этого уравненія зависитъ только отъ  $x$ , а вторая только отъ  $y$ , то обѣ онѣ должны быть постоянными; поэтому полагаемъ

$$\frac{\frac{dX}{dx}}{(1+X)^{3/2}} = c,$$

т.-е.

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+X}} = c,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1+X}} = cx + c',$$

гдѣ  $c$  и  $c'$  — постоянныя.

Точно такъ же будемъ имѣть:

$$\frac{1}{\sqrt{1+Y}} = cy + c''.$$

Получая изъ этихъ уравненій  $X$  и  $Y$  и подставляя ихъ въ значенія  $p$  и  $q$ , а эти послѣднія въ уравненіе

$$dz = p dx + q dy,$$

находимъ:

$$dz = \frac{\left(\frac{c'}{c} - x\right) dx + \left(\frac{c''}{c} - y\right) dy}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 - \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2}} = d \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 - \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2},$$

и, слѣдовательно,

$$z - c''' = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 - \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2},$$

или

$$(z - c''')^2 + \left(\frac{c'}{c} - x\right)^2 + \left(\frac{c''}{c} - y\right)^2 = \frac{1}{c^2},$$

уравненіе сферы.

**§ 689. Эллипсоидъ.** — Пусть

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

будетъ уравненіе эллипсоида. Эта поверхность составляетъ часть (§ 128) тройной системы ортогональныхъ поверхностей, образуемой всѣми поверхностями второй сте-

пени, главные сѣченія которыхъ описаны изъ однихъ и тѣхъ же фокусовъ. Слѣдовательно, по теоремѣ Дюпена находимъ линіи кривизны, какъ результатъ пересѣченія эллипсоида поверхностями двухъ другихъ системъ, т.-е. однополыми и двуполыми гиперболами, уравненія которыхъ

$$\frac{x^2}{v^2} + \frac{y^2}{v^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - v^2} = 1, \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} = 1, \quad (3)$$

гдѣ  $v^2$  и  $\rho^2$  обозначаютъ два произвольныхъ параметра, изъ которыхъ первый содержится между  $b^2$  и  $c^2$ , а второй меньше  $b^2$ .

Чтобы получить проекціи линій кривизны на плоскость  $XZ$ , т.-е. на ту изъ главныхъ плоскостей поверхности, которая содержитъ наибольшую и наименьшую оси, нужно исключить  $y$  между уравненіями (1) и (2); такимъ образомъ находимъ:

$$\frac{b^2 x^2}{\mu^2 v^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\mu^2 - c^2)(c^2 - v^2)} = 1. \quad (4)$$

Чтобы получить линіи кривизны второй системы, достаточно измѣнить  $v$  на  $\rho$ ; слѣдовательно, ихъ уравненіе есть

$$\frac{b^2 x^2}{\mu^2 \rho^2} + \frac{(c^2 - b^2) z^2}{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \rho^2)} = 1. \quad (5)$$

Уравненія (4) и (5) представляютъ эллипсы. Они различаются между собою только взаимною перемѣною произвольныхъ параметровъ  $v$  и  $\rho$ . Но не должно забывать, что  $v^2$  содержится между  $b^2$  и  $c^2$ , тогда какъ  $\rho^2$  меньше  $b^2$ . Если этимъ параметрамъ приписать ихъ предѣльное значеніе  $b^2$ , то уравненія (4) и (5) примутъ видъ

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1 \quad (6)$$

и представлять собою оба главный эллипсы.

Можно легко удостовѣриться, что эллипсы, опредѣляемые уравненіями (4) и (5), касательны къ четыремъ прямымъ, уравненіе которыхъ есть

$$\pm \frac{bx}{\mu c} \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c \sqrt{\mu^2 - c^2}} z = 1. \quad (7)$$

Это общее условіе для обѣихъ системъ опредѣляетъ ихъ вполне. Уравненіе (6) представляетъ предѣльную кривую, отдѣляющую проекціи линій первой системы отъ проекцій второй.

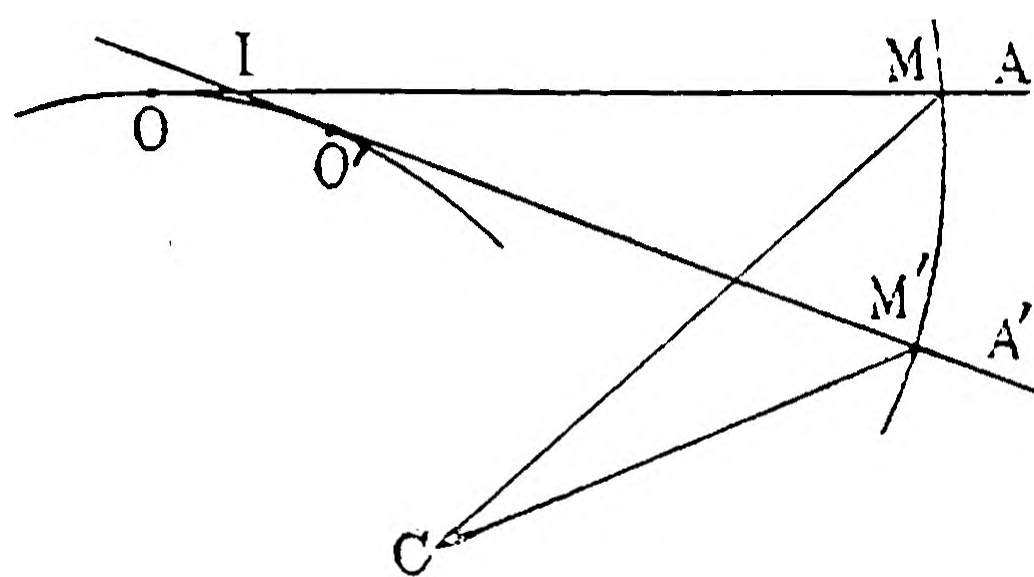
**§ 690. Развертывающіяся поверхности.** — Прямолинейныя производящія развертывающейся поверхности представляютъ линіи кривизны одной изъ системъ; въ самомъ дѣлѣ, нормали, проведенныя черезъ точки одной и той же производящей, образуютъ плоскость, простѣйшую изъ развертывающихся поверхностей. Линіи кривизны другой



системы пересѣкаютъ производящія подѣ прямымъ угломъ и этимъ опредѣляются; если развернуть поверхность, то эти линіи явятся эвольвентами линіи, въ которую перейдетъ ребро возврата. Въ каждой точкѣ развертывающейся поверхности одинъ изъ радіусовъ кривизны бесконечно-великъ. Дѣйствительно, нормали къ поверхности, проведенныя черезъ двѣ бесконечно-близкія точки производящей, параллельны, и, слѣдовательно, центръ кривизны, который онѣ должны опредѣлять своимъ пересѣченіемъ, находится на бесконечности. Притомъ видно, что нормальное сѣченіе, касательное къ линіи кривизны, есть въ этомъ случаѣ сама производящая и что, значитъ, его радіусъ кривизны бесконечно-великъ.

Второй радіусъ кривизны измѣняется отъ одной производящей къ другой вмѣстѣ съ видомъ поверхности; онъ измѣняется также отъ одной точки къ другой одной и той же производящей. Мы сейчасъ составимъ для него общее выраженіе.

Пусть  $OA$ ,  $O'A'$  (черт. 87) будутъ двѣ смежныя производящія развертывающейся



Черт. 87

поверхности, ребро возврата которой есть  $OO'$ ; пусть  $MM'$  будетъ бесконечно-малая дуга линіи кривизны, перпендикулярной къ  $OA$  и  $O'A'$ : нормали къ поверхности въ точкахъ  $M$  и  $M'$  встрѣчаются въ центрѣ кривизны  $C$ , и  $MC$  есть искомый радіусъ кривизны.

Называя черезъ  $\varepsilon$  уголъ между двумя нормальми, имѣемъ:

$$MC = \frac{MM'}{\varepsilon}.$$

Называя же черезъ  $\varepsilon'$  уголъ между двумя производящими  $OA$ ,  $O'A'$  и зная, что ихъ можно разсматривать, какъ встрѣчающіяся въ точкѣ  $I$ , расположенной на ребрѣ возврата, имѣемъ:

$$MI = \frac{MM'}{\varepsilon'};$$

слѣдовательно,

$$MC = MI \cdot \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}.$$

Для всѣхъ точекъ одной и той же производящей отношеніе  $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$  остается постояннымъ; значитъ,  $MC$  пропорціоналенъ  $MI$ , т.-е.  $MO$ , не отличающемуся отъ него въ предѣлѣ.

Такимъ образомъ, радіусъ кривизны въ различныхъ точкахъ одной и той же производящей пропорціоналенъ разстоянію этой точки до ребра возврата. Отношеніе  $\frac{\epsilon'}{\epsilon}$  имѣетъ, притомъ, замѣчательное значеніе. Дѣйствительно,  $\epsilon'$  есть бесконечно-малый уголъ между двумя касательными къ ребру возврата, а  $\epsilon$ , уголъ между двумя нормальми къ поверхности, равенъ углу между касательными плоскостями, т.-е. (§ 571) углу между двумя бесконечно-близкими соприкасающимися плоскостями ребра возврата; слѣдовательно,  $\frac{\epsilon'}{\epsilon}$  есть отношеніе двухъ кривизнъ ребра возврата, и, обозначая кривизны черезъ  $\frac{1}{\rho}$  и  $\frac{1}{\rho'}$ , имѣемъ окончательно для выраженія радіуса кривизны развертывающейся поверхности въ точкѣ  $M$ :

$$MC = \frac{r}{\rho} (MO).$$

§ 691. Когда рассматриваемая развертывающаяся поверхность—цилиндрическая, линіи кривизны будутъ прямыя сѣченія цилиндра, и тотъ изъ двухъ радіусовъ, который не бесконечно-великъ, остается постояннымъ на одной и той же производящей.

Линіи кривизны конической поверхности будутъ пересѣченія конуса сферами, центръ которыхъ помѣщается въ вершинѣ.

§ 692. Свойство имѣть въ каждой точкѣ бесконечно-большой радіусъ кривизны характеристично для развертывающихся поверхностей. Въ самомъ дѣлѣ, если радіусъ, относящійся къ линіямъ одной изъ системъ, бесконечно-великъ, нормали, проведенныя къ поверхности черезъ точки такой линіи, параллельны; значитъ, соотвѣтственные касательныя плоскости также параллельны и приводятся, слѣдовательно, къ одной, потому что поверхность не можетъ, очевидно, касаться непрерывнаго ряда параллельныхъ между собою плоскостей. Поверхность, касающаяся одной и той же плоскости вдоль всей линіи кривизны, есть огибающая положеній плоскости, въ уравненіе которой входитъ только одинъ переменный параметръ, и, слѣдовательно, представляетъ развертывающуюся поверхность.

§ 693. Ту же теорему весьма просто можно доказать аналитически. Чтобы одинъ изъ радіусовъ кривизны поверхности былъ бесконечно-великъ, нужно, чтобы найденное выше (§ 634) уравненіе второй степени имѣло бесконечно-большой корень, а для этого необходимымъ и достаточнымъ условіемъ служить равенство

$$rt - s^2 = 0; \quad (1)$$

полагая

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

имѣемъ, какъ извѣстно,

$$r = \frac{dp}{dx}, \quad t = \frac{dq}{dy}, \quad s = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}.$$

Такимъ образомъ уравненіе (1) равносильно

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}} \quad (2)$$

и выражаетъ (§ 74), что между функціями  $p$  и  $q$  существуетъ соотношеніе

$$p = \varphi(q).$$

Искомая поверхность представляетъ огибающую положеній касательной плоскости, общее уравненіе которой есть

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y),$$

т.-е.

$$\zeta = p\xi + q\eta + z - px - qy. \quad (3)$$

Но можно доказать, что уравненіе (3) содержитъ только одинъ переменный параметръ  $q$ . Дѣйствительно, по только-что доказанному

$$p = \varphi(q).$$

Значитъ, если  $q$  постоянно, то и  $p$  постоянно; а разъ  $p$  и  $q$  постоянны, выраженіе

$$z - px - qy$$

также постоянно: въ самомъ дѣлѣ, его дифференціалъ равенъ

$$dz - pdx - qdy - xdp - ydq,$$

но такъ какъ  $p$  и  $q$  постоянны, то

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

и, кромѣ того,

$$dz = pdx + qdy.$$

Итакъ, коэффициенты уравненія (3) постоянны для каждого даннаго значенія  $q$ , и искомая поверхность есть, такимъ образомъ, огибающая плоскости, уравненіе которой содержитъ только одинъ переменный параметръ; слѣдовательно, это поверхность развертывающаяся.

**§ 694. Поверхность, огибающая сферу.**—Когда уравненіе подвижной сферы содержитъ только одинъ переменный параметръ, центръ этой сферы пробѣгаетъ определенную кривую, и каждому изъ его положеній соответствуетъ определенное значеніе радіуса; огибающая поверхность есть геометрическое мѣсто пересѣченій каждой сферы съ бесконечно-близкою сферою; это пересѣченіе есть кругъ, по которому огибаемая сфера касается поверхности и который, очевидно, есть линія кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, нормали къ поверхности, проведенныя черезъ точки этого круга, являются нормальми къ одной и той же сферѣ, въ центрѣ которой онѣ встрѣчаются; соотвѣт-

ственный радиус кривизны есть какъ разъ радиусъ сферы, въ центрѣ которой будутъ сходиться двѣ бесконечно-близкія нормали. Такимъ образомъ, поверхность, огибающая сферу, имѣетъ линіями кривизны одной изъ системъ круги, и радиусъ кривизны, соотвѣтствующій одному изъ этихъ круговъ, равенъ радиусу вписанной сферы, для которой разсматриваемый кругъ служитъ линіею соприкосновенія.

**§ 695.** Теорема, обратная предыдущей, также вѣрна: поверхность, допускающая систему круговыхъ линій кривизны, есть огибающая подвижной сферы, центръ которой пробѣгаетъ данную линію.

Дѣйствительно, круговая линія кривизны непременно плоская, и ея плоскость пересѣкаетъ (§ 678) поверхность подъ постояннымъ угломъ. Поэтому, нормали, проведенныя къ поверхности черезъ различныя точки этой линіи, образуютъ конусъ вращенія, и сфера, описанная изъ вершины этого конуса, какъ центра, радиусомъ, равнымъ разстоянію до круга, очевидно, коснется поверхности въ каждой точкѣ круга, который является для нихъ общимъ. Каждой линіи кривизны соотвѣтствуетъ, такимъ образомъ, вписанная сфера, для которой эта линія служитъ кругомъ соприкосновенія, и поверхность есть огибающая этихъ сферъ.

**§ 696. Каналообразныя поверхности.**—Когда радиусъ огибаемой сферы постояненъ, огибающая поверхность называется каналообразною. По предыдущему, одинъ изъ радиусовъ кривизны каналообразной поверхности постояненъ.

Обратно, всякая поверхность, одинъ изъ радиусовъ кривизны которой постояненъ, есть огибающая положеній подвижной сферы постоянного радиуса.

Въ самомъ дѣлѣ, если одинъ изъ радиусовъ кривизны постояненъ, то, чтобы получить линію, огибаемую нормальми, проведенными въ различныхъ точкахъ линіи кривизны, которой соотвѣтствуетъ этотъ радиусъ, нужно, на каждой нормали, отложить постоянную длину; полученная такимъ образомъ кривая принадлежитъ (§ 101) поверхности, параллельной данной поверхности, и, слѣдовательно, пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ нормали этой послѣдней; но, съ другой стороны, она должна быть огибающею этихъ нормалей и, значитъ, быть къ нимъ касательною. Получаются два несовмѣстныхъ условія, кривая существовать не можетъ и должна приводиться къ точкѣ; итакъ, нормали въ различныхъ точкахъ одной и той же линіи кривизны сойдутся въ одной точкѣ, разстояніе которой до поверхности равно постоянному радиусу кривизны; сфера, описанная изъ этой точки, какъ центра, будетъ, слѣдовательно, содержать линію кривизны и коснется поверхности во всѣхъ точкахъ этой линіи. Такая сфера существуетъ для каждой линіи кривизны, всѣ онѣ имѣютъ своимъ радиусомъ постоянный радиусъ кривизны поверхности, которая является, такимъ образомъ, огибающею сферы постоянного радиуса.

**§ 697.** Можно найти аналитически поверхности, радиусъ кривизны которыхъ постояненъ.

Пусть  $X, Y, Z$  будутъ косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью къ поверхности съ осями координатъ. Называя черезъ  $R$  постоянный радиусъ кривизны поверхности, имѣемъ:

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dY}{dy} = \frac{1}{R}, \quad \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{R}, \quad (1)$$

гдѣ знакъ дифференцірованія относится, какъ извѣстно (§ 637), къ бесконечно-малому перемѣщенію по линіи кривизны.

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\left. \begin{aligned} x - RX &= \alpha, \\ y - RY &= \beta, \\ z - RZ &= \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ  $\alpha, \beta, \gamma$  остаются всѣ трое постоянными на одной и той же линіи кривизны и, слѣдовательно, всѣ трое могутъ быть выражены въ функціи отъ одного и того же параметра. Отсюда заключаемъ, что существуютъ два уравненія между этими тремя количествами, и если положить

$$\alpha = \varphi(\gamma), \quad \beta = \psi(\gamma),$$

то будемъ имѣть:

$$x - RX = \varphi(z - RZ), \quad y - RY = \psi(z - RZ).$$

Уравненіе

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

вмѣстѣ съ уравненіями (2) даетъ:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2, \quad (3)$$

и, для каждаго значенія  $\gamma$ , это уравненіе представляетъ сферу радіуса  $R$ , на которой находится соотвѣтственная линія кривизны; кромѣ того, уравненія (2) можно написать въ видѣ

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x - \alpha}{R}, \\ Y &= \frac{y - \beta}{R}, \\ Z &= \frac{z - \gamma}{R}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и тогда они доказываютъ, что нормаль къ поверхности въ каждой точкѣ этой линіи кривизны совпадаетъ съ радіусомъ сферы, образующимъ, очевидно, съ осями углы, косинусы которыхъ выражены вторыми частями уравненій (4). Слѣдовательно, сфера (3) касается, вдоль всей линіи кривизны, искомой поверхности, которая, такимъ образомъ, является огибающею положеній сферы постояннаго радіуса, при чемъ центръ этой послѣдней пробѣгаетъ произвольную кривую.

**§ 698. Поверхность, всѣ линіи кривизны которой круговыя.**—Чтобы линіи кривизны одной изъ системъ были круги, нужно (§ 695), чтобы поверхность была огибающею подвижной сферы, уравненіе которой содержитъ только одинъ произвольный параметръ. Отсюда, очевидно, вытекаетъ, что поверхность, *всѣ* линіи кривизны которой круги, можно разсматривать, какъ огибающую положеній подвижной сферы, двумя различными способами: когда сферы первой системы касаются поверхности по ряду



круговъ и когда сферы второй системы касаются по другимъ кругамъ, перпендикулярнымъ къ первымъ. Ясно же, что каждая сфера, принадлежащая одному изъ способовъ образованія, касательна ко всѣмъ сферамъ другой системы; въ самомъ дѣлѣ, рассмотримъ двѣ какія-нибудь сферы, соотвѣтствующія кругамъ различныхъ системъ, пересѣкающимся подъ прямымъ угломъ; обѣ сферы проходятъ черезъ общую точку обоихъ круговъ и имѣютъ въ этой точкѣ одну и ту же касательную плоскость, потому что обѣ онѣ касаются одной и той же поверхности. Слѣдовательно, рассматривая три сферы первой системы, видимъ, что всѣ сферы второй системы касаются всѣхъ этихъ трехъ, и такъ какъ условіе быть касательною къ тремъ неподвижнымъ сферамъ опредѣляетъ вполне послѣдовательныя положенія подвижной сферы, то если существуетъ поверхность, всѣ линіи кривизны которой круговыя, она представляетъ собою огибающую положеній сферы, касательной къ тремъ другимъ.

Обратно: всѣ линіи кривизны поверхности, огибающей сферы, касательныя къ тремъ даннымъ сферамъ, круговыя. Такъ какъ опредѣленная такимъ образомъ поверхность есть огибающая сферы, уравненіе которой содержитъ, очевидно, только одинъ параметръ, то линіи кривизны одной изъ системъ круги (§ 694); для доказательства, что линіи кривизны второй системы равнымъ образомъ круговыя, Дюпенъ показалъ, что поверхность можно, по другому способу, рассматривать, какъ огибающую подвижной сферы. Мы не станемъ приводить здѣсь это изящное доказательство, а покажемъ только, согласно Маннгейму (Mannheim), что изслѣдуемую поверхность, названную циклическою, можно всегда рассмотреть какъ такую, въ которую переходитъ кольцевая (le tore) при своемъ преобразованіи посредствомъ взаимныхъ радіусовъ-векторовъ. Такъ какъ линіи кривизны кольцевой поверхности круговыя, а линіи кривизны поверхности, получаемой послѣ преобразованія, можно вывести при помощи преобразованія (§ 683), при которомъ круги всегда переходятъ въ другіе круги, то эти вторыя будутъ также круговыми.

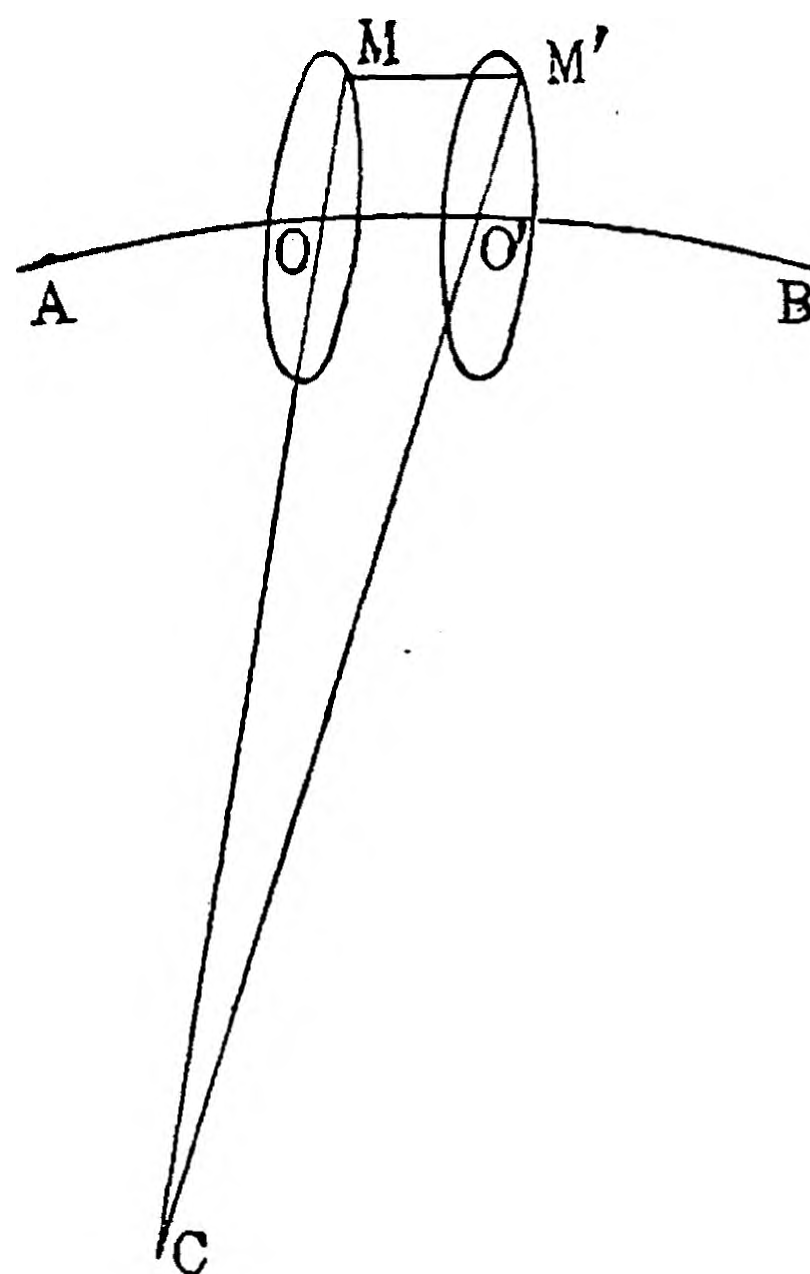
Каковъ бы ни былъ полюсъ преобразованія, поверхность, въ которую переходитъ при этомъ сфера, есть также сфера. Поэтому, рассматривая три неподвижныя сферы и рядъ другихъ сферъ, касающихся всѣхъ этихъ трехъ, заключаемъ, что фигура, въ которую преобразуется данная, составитъ изъ трехъ сферъ, въ которыя перейдутъ три неподвижныя сферы, и ряда сферъ, касающихся всѣхъ трехъ первыхъ. Полюсъ же преобразованія можно всегда такъ выбрать, что центры сферъ, въ которыя переходятъ три неподвижныя сферы, будутъ лежать на одной прямой; для этого достаточно взять за полюсъ точку, расположенную въ плоскости, заключающей въ себѣ центры трехъ сферъ, и на окружности круга, который, въ этой плоскости, пересѣкаетъ ортогонально три большихъ круга. Эта окружность, проходящая черезъ полюсъ, преобразуется въ прямую линію, и такъ какъ преобразование не измѣняетъ угловъ, то три сферы, получаемыя послѣ преобразованія, будутъ пересѣкаться ортогонально одною и тою же прямою, вслѣдствіе чего эта послѣдняя должна проходить черезъ три ихъ центра.

Къ тому же очевидно, что когда даны три круга на плоскости, существуетъ всегда четвертый, пересѣкающій всѣ эти три подъ прямыми углами, при чемъ изъ его центра можно провести къ нимъ три равныя касательныя. Изучаемая нами цикли-

ческая поверхность можетъ, по предыдущему, перейти послѣ преобразованія въ поверхность, огибающую сферы, касательныя къ тремъ неподвижнымъ сферамъ, центры которыхъ лежатъ на одной прямой. Пересѣкая же три неподвижныя сферы плоскостью, проходящею черезъ ихъ линію центровъ, получимъ три круга; какой-нибудь изъ круговъ, касающихся всѣхъ этихъ трехъ, есть большой кругъ сферы, касательной къ тремъ даннымъ сферамъ. Получивъ эту послѣднюю, можно, очевидно, заставить ее вращаться вокругъ линіи центровъ трехъ неподвижныхъ сферъ, которыхъ она постоянно будетъ касаться во всѣхъ своихъ положеніяхъ. Поверхность, огибающая эту подвижную сферу, есть, очевидно, кольцевая, и, слѣдовательно, всякая поверхность съ круговыми линіями кривизны есть поверхность, въ которую переходитъ кольцевая при преобразованіи посредствомъ взаимныхъ радіусовъ-векторовъ.

**§ 699.** Поверхность, оба радіуса кривизны которой постоянны. — Когда одинъ изъ радіусовъ кривизны постояненъ, поверхность каналобразна (§ 696) и представляетъ огибающую сферы радіуса, равнаго этому постоянному радіусу; слѣдовательно, поверхности, у которыхъ оба радіуса кривизны постоянны, будутъ такими каналобразными поверхностями, у которыхъ второй радіусъ кривизны постояненъ.

Пусть  $AOO'B$  (черт. 88) будетъ кривая, служащая геометрическимъ мѣстомъ



Черт. 88

центровъ сферъ, вписанныхъ въ каналобразную поверхность, и  $OM$ ,  $O'M'$ —два бесконечно-близкихъ круга, представляющихъ линіи кривизны первой системы. Пусть  $MM'$  будетъ дуга линіи кривизны второй системы; нормальми въ  $M$  и  $M'$  къ поверхности, очевидно, являются  $MO$ ,  $M'O'$ , точка встрѣчи которыхъ  $C$  находится на прямой пересѣченія плоскостей обоихъ круговъ; значитъ, при движеніи точки  $M$  по кругу, на которомъ она расположена, точка  $C$  описываетъ прямую, а въ такомъ случаѣ невозможно, чтобы  $OC$  и, слѣдовательно,  $MC$  оставалось постояннымъ. Итакъ, радіусъ кривизны второй системы измѣняется послѣдовательно отъ одной точки къ другой; исключеніе возможно только тогда, когда кривая  $AOO'B$  приводится къ точкѣ и каналобразная поверхность обращается въ сферу.

**§ 700.** Поверхности, линіи кривизны которыхъ совпадаютъ съ главными нормальными сѣченіями.—Когда линія кривизны плоская, ея плоскость пересѣкаетъ (§ 678) поверхность подѣ постояннымъ угломъ. Разберемъ здѣсь особенно тотъ случай, когда всѣ линіи кривизны одной изъ системъ плоскія и ихъ плоскости пересѣкаютъ поверхность подѣ прямымъ угломъ. Въ этомъ случаѣ линіи кривизны второй системы, очевидно, нормальны къ плоскостямъ, содержащимъ линіи кривизны первой системы, и, слѣдовательно, поверхность можетъ быть образована слѣдующимъ образомъ: задаемъ развертывающуюся поверхность, огибаемую плоскостями линій кривизны первой системы, и въ одной изъ этихъ плоскостей выбираемъ произвольно лежащую въ ней линію кривизны. Поверхность будетъ вполне опредѣлена, такъ какъ каждая изъ линій кривизны второй системы, пересѣкающихъ подѣ прямыми углами непрерывный рядъ плоскостей, касательныхъ къ развертывающейся поверхности, опредѣляется одною изъ своихъ точекъ; съ другой же стороны, отъ каждой точки выбранной линіи кривизны первой системы будетъ отправляться какая-нибудь одна изъ нихъ, и ихъ совокупность образуетъ поверхность.

Развертывающаяся поверхность, огибаемая плоскостями линій кривизны, и видъ такой линіи въ одной изъ плоскостей вполне, при этомъ, произвольны. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что поверхность, образуемая рядомъ линій, нормальныхъ къ заданнымъ плоскостямъ, сама пересѣкается нормально всѣми этими плоскостями, которыя, слѣдовательно (§ 678), своимъ пересѣченіемъ съ поверхностью опредѣляютъ линіи кривизны.

Чтобы осуществить образованіе поверхности, очевидно, достаточно, чтобы касательная плоскость, содержащая выбранную линію кривизны, катилась по данной развертывающейся поверхности, непрерывно вращаясь вокругъ производящей прикосновенія. Движеніе каждой изъ ея точекъ будетъ тогда направлено въ каждый моментъ по нормали къ подвижной плоскости, и различныя точки выбранной линіи кривизны первой системы произведутъ линіи второй системы, совокупность которыхъ образуетъ искомую поверхность. Мы видимъ, что линіи кривизны первой системы представляютъ послѣдовательныя положенія одной и той же единственной линіи, движущейся вмѣстѣ съ плоскостью, въ которой она расположена, и, слѣдовательно, эти линіи наложимы одна на другую.

**§ 701.** Всѣ нормали только-что опредѣленной нами поверхности, очевидно, касательны къ развертывающейся поверхности, огибающей плоскости линій кривизны. Обратно, всякая поверхность, нормали которой касательны къ развертывающейся поверхности, допускаетъ систему плоскихъ линій кривизны, плоскости которыхъ пересѣкаютъ ее нормально и касательны къ развертывающейся поверхности. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что всѣ нормали нѣкоторой поверхности касательны къ одной и той же развертывающейся поверхности; всѣ тѣ изъ нихъ, точки прикосновенія которыхъ принадлежатъ одной и той же производящей развертывающейся поверхности, очевидно, расположены въ плоскости, касательной вдоль этой производящей; значитъ, онѣ попарно встрѣчаются и, слѣдовательно, соответствуютъ линіи кривизны, очевидно, расположенной въ этой плоскости, которая пересѣкаетъ поверхность нормально, потому что содержитъ нормаль въ каждой точкѣ кривой пересѣченія.

**§ 702.** Въ частности, остановимся на поверхностяхъ, нормали которыхъ касательны къ цилиндру. Такая поверхность производится, по предыдущему, плоскою кривою

неизмѣннаго вида, плоскость которой катится безъ скользянія по поверхности цилиндра, оставаясь, слѣдовательно, параллельною направленію его производящихъ. Послѣдовательныя положенія этой плоской кривой представляютъ линіи кривизны первой системы; что касается до линій кривизны второй системы, то онѣ пересѣкаютъ нормально касательныя плоскости цилиндра; значитъ, ихъ касательная остается параллельною плоскости прямого сѣченія цилиндра, откуда заключаемъ, что эти линіи — плоскія и расположены въ параллельныхъ плоскостяхъ.

**§ 703.** Теорема, обратная предыдущей, также справедлива: когда линіи кривизны одной изъ системъ плоскія и расположены въ параллельныхъ плоскостяхъ, нормали къ поверхности касательны къ одному и тому же цилиндру, и линіи кривизны второй системы расположены въ плоскостяхъ, касательныхъ къ этому цилиндру.

Дѣйствительно, пусть  $A, A', A''$  будутъ линіи кривизны нѣкоторой поверхности, по предположенію, плоскія и расположенныя въ параллельныхъ плоскостяхъ. Пусть  $B$  будетъ линія кривизны второй системы, встрѣчающая первыя въ  $a, a', a'', \dots$ ; касательныя плоскости, проведенныя къ поверхности черезъ различныя точки линіи кривизны, огибаютъ развѣтывающуюся поверхность, производящія которой, являясь пересѣченіями двухъ смежныхъ плоскостей, будутъ касательными, сопряженными (§ 644) съ касательными линіи кривизны, къ которымъ онѣ, слѣдовательно, перпендикулярны; такимъ образомъ, касательныя къ линіямъ  $A, A', A''$ , проведенныя въ точкахъ  $a, a', a''$ , образуютъ развѣтывающуюся поверхность, производящія которой расположены въ плоскостяхъ этихъ линій, по предположенію, параллельныхъ между собою, и такъ какъ двѣ послѣдовательныя производящія должны находиться въ одной плоскости, то онѣ необходимо параллельны, и образуемая ими развѣтывающаяся поверхность есть цилиндръ. Кривая  $B$ , по которой этотъ цилиндръ касается данной поверхности, будучи линіею кривизны поверхности, есть также линія кривизны цилиндра и, слѣдовательно, является однимъ изъ его прямыхъ сѣченій, плоскость котораго, очевидно, нормальна въ каждой точкѣ къ искомой поверхности, около которой цилиндръ описанъ. Итакъ, линіи кривизны  $B$  — плоскія, и ихъ плоскости пересѣкаютъ поверхность подъ прямымъ угломъ.

**§ 704.** Эту же теорему можно легко доказать аналитически. Беремъ за ось  $Z$ -овъ параллель плоскостямъ линій кривизны первой системы; называя черезъ  $x, y, z$  координаты точки одной изъ этихъ линій и черезъ  $X, Y, Z$  косинусы угловъ, образуемыхъ нормалью съ тремя осями, имѣемъ (§ 637):

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ} = R, \quad (1)$$

гдѣ  $R$  есть радіусъ кривизны, соотвѣтствующій разсматриваемой линіи, а дифференціалы относятся къ перемѣщенію по этой линіи. Такъ какъ плоскость линіи кривизны параллельна оси  $Z$ -овъ, то между  $x$  и  $y$  имѣемъ соотношеніе вида

$$y = \alpha x + \beta, \quad (2)$$

гдѣ  $\alpha$  и  $\beta$  двѣ постоянныя.

Изъ (2) выводимъ:

$$dy = \alpha dx,$$

и, слѣдовательно,

$$dY = \alpha dX;$$

отсюда заключаемъ, что для всѣхъ точекъ одной и той же линіи кривизны разность  $Y - \alpha X$  постоянна; но эта постоянная можетъ измѣняться отъ одной линіи кривизны къ другой, обозначаемъ ее черезъ  $\varphi(\beta)$ ; будемъ имѣть:

$$Y - \alpha X = \varphi(\beta); \quad (3)$$

обозначая черезъ  $\delta$  измѣненія, соотвѣтствующія линіямъ кривизны второй системы, имѣемъ (§ 636):

$$dy\delta q + dx\delta p = 0, \quad (4)$$

и, значитъ, вслѣдствіе равенства

$$\frac{dy}{dx} = \alpha,$$

находимъ:

$$\frac{\delta p}{\delta q} = -\alpha,$$

откуда

$$p + \alpha q = \gamma, \quad (5)$$

гдѣ  $\gamma$  остается постояннымъ для одной и той же линіи кривизны второй системы; но мы имѣемъ:

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad (6)$$

и уравненіе (5) можно написать въ видѣ

$$X + \alpha Y + \gamma Z = 0; \quad (7)$$

отсюда выводимъ:

$$\delta X + \alpha \delta Y + \gamma \delta Z = 0, \quad (8)$$

и такъ какъ  $\delta x, \delta y, \delta z$  пропорціональны  $\delta X, \delta Y, \delta Z$ , то

$$\delta x + \alpha \delta y + \gamma \delta z = 0, \quad (9)$$

и, слѣдовательно,

$$x + \alpha y + \gamma z = h; \quad (10)$$

$h$  такъ же, какъ  $\alpha$  и  $\gamma$ , остается постояннымъ для всѣхъ точекъ одной и той же линіи кривизны второй системы, и уравненіе (10) представляетъ плоскость. Каковы бы ни были значенія  $\gamma$  и  $h$ , эта плоскость перпендикулярна къ плоскостямъ линій кривизны первой системы, уравненіе которыхъ есть

$$y = \alpha x + \beta.$$



§ 705. Поверхности, всѣ линіи кривизны которыхъ плоскія. — Многіе геометры изучали поверхности, линіи кривизны которыхъ плоскія; мы ограничимся здѣсь выводомъ простѣйшихъ результатовъ, къ которымъ они пришли.

Когда линія кривизны плоская (§ 678), нормали къ поверхности, проведенныя черезъ различныя точки, составляютъ съ ея плоскостью постоянный уголъ. Если, поэтому, черезъ центръ сферы провести параллели этимъ нормалямъ, то онѣ образуютъ конусъ вращенія и пересѣкутъ сферу по кругу, плоскость котораго параллельна плоскости линіи кривизны.

Если всѣ линіи кривизны поверхности плоскія, соотвѣтствующія имъ линіи на сферѣ, о которыхъ мы говорили, образуютъ два ряда круговъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $M$  будетъ точка поверхности, въ которой перекрещиваются двѣ линіи кривизны  $MA$  и  $MB$ ; рассмотримъ нормаль  $MN$  въ  $M$  и бесконечно-близкія нормали  $AO$  и  $BO'$ , проведенныя черезъ точки  $A$  и  $B$ , отстоящія отъ  $M$ , по двумъ линіямъ кривизны, на бесконечно-маломъ разстояніи; двѣ плоскости  $OAM$ ,  $O'BM$  взаимно-перпендикулярны. Ведя же черезъ центръ сферы три радіуса  $CM_1$ ,  $CA_1$ ,  $CB_1$ , параллельные  $OM$ ,  $OA$ ,  $O'B$ , видимъ, что плоскости  $CM_1A_1$ ,  $CM_1B_1$  параллельны  $OAM$ ,  $O'BM$  и, слѣдовательно, взаимно перпендикулярны, такъ что линіи  $M_1A_1$ ,  $M_1B_1$ , соотвѣтствующія на сферѣ двумъ линіямъ кривизны поверхности, взаимно-перпендикулярны.

Чтобы знать, какъ располагаются въ пространствѣ плоскости линій кривизны искомой поверхности, достаточно изслѣдовать, какъ могутъ располагаться на сферѣ два ряда такихъ круговъ, каждый изъ которыхъ пересѣкаетъ подъ прямымъ угломъ всѣ круги, принадлежащіе другому ряду. Мы сейчасъ покажемъ, что въ такомъ случаѣ плоскости всѣхъ круговъ одной и той же системы должны имѣть общую прямую.

Въ самомъ дѣлѣ, мы знаемъ, что когда кругъ нанесенъ на сферѣ, всякая касательная къ сферѣ, проведенная черезъ одну изъ его точекъ и пересѣкающая кругъ подъ прямымъ угломъ, есть производящая конуса, описаннаго около сферы касательно по данному кругу. Поэтому, если кругъ  $C$  пересѣкаетъ подъ прямыми углами два различныхъ круга  $C_1$  и  $C_1'$ , двѣ касательныя этого круга  $C$  являются производящими конусовъ, описанныхъ около сферы по  $C_1$  и  $C_1'$ . Плоскость круга  $C$  проходитъ, такимъ образомъ, черезъ прямую, соединяющую вершины конусовъ, описанныхъ около сферы по двумъ какимъ-угодно кругамъ другой системы. Слѣдовательно, эти круги представляютъ круги прикосновенія описанныхъ конусовъ, вершины которыхъ лежатъ на одной прямой; ихъ плоскости, какъ извѣстно, проходятъ черезъ общую прямую, перпендикулярную къ первой прямой.

Когда всѣ линіи кривизны поверхности плоскія, ихъ плоскости параллельны плоскостямъ двухъ системъ круговъ, пересѣкающихся перпендикулярно на сферѣ, и, значитъ, соотвѣтственно параллельны двумъ взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ линіямъ.

§ 706. Можно легко получить дифференціальное уравненіе поверхностей, всѣ линіи кривизны которыхъ плоскія.

Пусть  $AA'$  (черт. 89) будетъ прямая, которой параллельны плоскости линій кривизны одной изъ системъ и черезъ которую проходятъ всѣ плоскости круговъ, соотвѣтствующихъ имъ на сферѣ, описанной изъ центра  $O$ ; выбираемъ три коорди-



Касательная линіи кривизны параллельна, въ каждой точкѣ, касательной круга, представляющаго эту линію кривизны на сферѣ; значитъ, мы можемъ внести это значеніе  $\frac{dy}{dx}$  въ дифференціальное уравненіе линій кривизны

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [(1+q^2)s - pqt] + \frac{dy}{dx} [(1+q^2)r - (1+p^2)t] - [(1+p^2)s - pqr] = 0,$$

и тогда находимъ дифференціальное уравненіе

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

гдѣ для сокращенія положено

$$R = pq \left[ m(1+q^2) + \sqrt{1+p^2+q^2} \right],$$

$$S = m^2(1+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2} + 2m(1+p^2)(1+q^2) + (1+p^2)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$T = pqm \left[ 1+p^2 + m\sqrt{1+p^2+q^2} \right].$$


---

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### Ученіе о линіяхъ, нанесенныхъ на поверхности

#### Геодезическія линіи

§ 707. Кратчайшая линія, какую только можно провести между двумя точками поверхности, называется *геодезическою линіею*; эти линіи играютъ ту же роль въ ученіи о кривыхъ, нанесенныхъ на поверхности, какую играетъ прямая линія въ ученіи о плоскихъ кривыхъ или большой кругъ въ ученіи о сферическихъ кривыхъ.

Мы видѣли (§ 631), что соприкасающаяся плоскость геодезической линіи нормальна, въ каждой точкѣ, къ поверхности, на которой послѣдняя нанесена. Обратно, если соприкасающаяся плоскость кривой, нанесенной на поверхности, нормальна, въ каждой точкѣ, къ поверхности, бесконечно-малая дуга этой кривой является, какъ мы видѣли (§ 631), кратчайшею, какую только можно провести на поверхности между двумя ея концами. Линія получаетъ тогда въ широкомъ смыслѣ названіе *геодезической линіи*, хотя она можетъ не быть кратчайшею между двумя достаточно удаленными точками. Такъ, напр., дуга большого круга, на сферѣ, большая полуокружности, называется *геодезическою линіею*, хотя она не является кратчайшимъ разстояніемъ между двумя своими концами.

Черезъ двѣ данныя точки на поверхности можно всегда провести, по крайней мѣрѣ, одну геодезическую линію, но по только-что сказанному ихъ можетъ существовать нѣсколько; такъ, напр., двѣ точки поверхности цилиндра можно соединить безчисленнымъ множествомъ винтовыхъ линій съ какимъ-угодно числомъ оборотовъ.

§ 708. Характеристическое свойство геодезическихъ линій можно высказать подъ видомъ, который будетъ намъ очень полезенъ: проекція геодезической линіи на плоскость, касательную къ поверхности въ одной изъ точекъ этой линіи, имѣетъ въ этой точкѣ бесконечно-большой радіусъ кривизны.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $MM'$  будетъ бесконечно-малая дуга геодезической линіи, нанесенной на поверхности  $S$ , и  $MM''$  — проекція этой дуги на плоскость, касающуюся поверхности въ  $M$ ; эта касательная плоскость перпендикулярна къ соприкасающейся плоскости дуги  $MM'$  и пересѣкается ею по общей касательной дугъ  $MM'$ ,  $MM''$ ; отсюда вытекаетъ, что разстояніе точки  $M''$  до касательной въ  $M$  дуги  $MM''$  строго

равно перпендикуляру, опущенному изъ точки  $M'$  дуги  $MM'$  на соприкасающуюся плоскость этой дуги въ  $M$ ; значитъ, оно третьяго порядка, и, слѣдовательно, радіусъ кривизны дуги  $MM''$  бесконечно-великъ.

§ 709. Когда двѣ геодезическія линіи пересѣкаются подъ бесконечно-малымъ угломъ  $d\omega$ , законъ ихъ расхожденія, на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки пересѣченія, тотъ же, что для двухъ прямыхъ линій на плоскости; другими словами, если отложить на каждой изъ нихъ, отъ точки ихъ пересѣченія  $O$ , равныя бесконечно-малыя длины,  $OP$  и  $OQ$ , которыя мы обозначимъ черезъ  $dl$ , то, пренебрегая бесконечно-малыми третьяго порядка, будемъ имѣть:

$$PQ = dl \cdot d\omega.$$

Дѣйствительно, проектируемъ бесконечно-малый треугольникъ  $OPQ$  (черт. 90) на



Черт. 90

плоскость, касающуюся поверхности въ  $O$ . Проекціи линій  $OP$  и  $OQ$  имѣютъ бесконечно-большіе радіусы кривизны; поэтому мы ихъ можемъ, пренебрегая бесконечно-малыми третьяго порядка, замѣнить касательными; замѣчая, что всѣ линіи чертежа образуютъ притомъ бесконечно-малые углы съ плоскостью, на которую онѣ проектированы, мы можемъ каждую изъ нихъ разсматривать, какъ равную ея проекціи; такимъ образомъ, можно разсмотрѣть разстояніе  $PQ$ , пренебрегая лишь бесконечно-малою частью ея собственнаго значенія, какъ разстояніе между двумя точками, расположенными каждая на разстояніи  $dl$  отъ вершины, на сторонахъ прямолинейнаго угла  $d\omega$ ; это разстояніе, очевидно, есть  $dl \cdot d\omega$ .

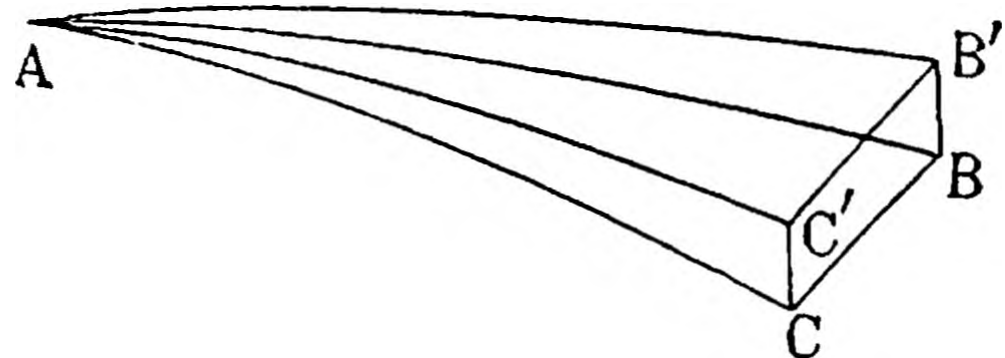
Слѣдуетъ особенно замѣтить, что этотъ результатъ пересталъ бы быть точнымъ, если бы геодезическія линіи, образующія стороны угла, были бы замѣнены двумя какими-нибудь кривыми; легко видѣть, что даже на плоскости теорема, приложенная къ двумъ кривымъ, пересѣкающимся подъ бесконечно-малымъ угломъ, была бы неточна; въ самомъ дѣлѣ, найденное выраженіе мы получили бы, замѣняя каждую кривую ея касательною, но такая подстановка внесла бы ошибку второго порядка, сравнимую, слѣдовательно, съ искомымъ разстояніемъ.

§ 710. Когда три геодезическія линіи поверхности образуютъ бесконечно-малый треугольникъ, избытокъ суммы угловъ этого треугольника надъ двумя прямыми углами есть бесконечно-малая того же порядка, что и площадь треугольника, т.-е. второго, если стороны принять за бесконечно-малыя перваго порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $ABC$  (черт. 91) будетъ бесконечно-малый треугольникъ, составленный тремя геодезическими линіями поверхности; проектируемъ чертежъ на касательную плоскость въ  $A$ ; три линіи  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  будутъ представлены въ проекціи тремя плоскими линіями  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $B'C'$ ; кривыя, исходящія изъ точки  $A$ , касательны къ ихъ проекціямъ и, слѣдовательно, углы при  $A$  въ обоихъ треугольникахъ строго равны; разность между однимъ изъ двухъ другихъ угловъ  $B$  и  $C$  и



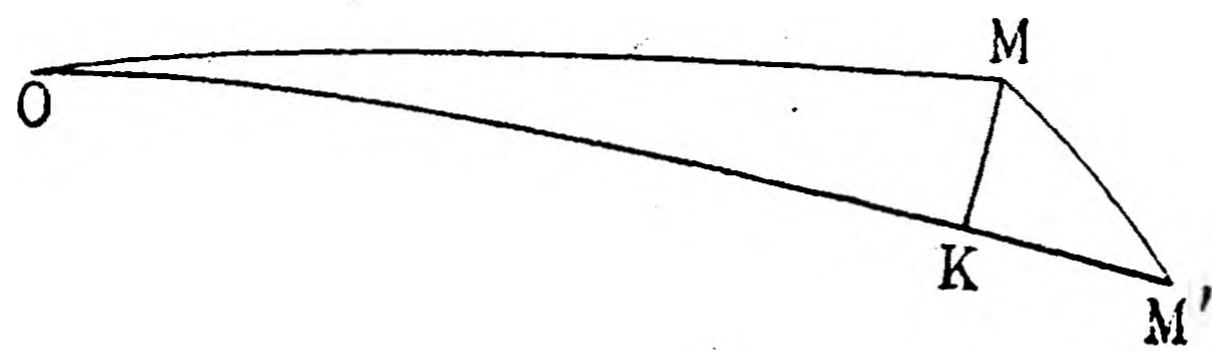
проекціею есть бесконечно-малая второго порядка; дѣйствительно, легко видѣть, что уголъ, расположенный на плоскости, отличается на бесконечно-малую второго порядка отъ своей проекціи на плоскость, образующую съ первою бесконечно-малый уголъ



Черт. 91

перваго порядка. Такимъ образомъ, сумма угловъ треугольника  $ABC$  отличается лишь на бесконечно-малую второго порядка отъ суммы угловъ треугольника  $AB'C'$ ; три же стороны этого послѣдняго треугольника имѣютъ бесконечно-большіе радіусы кривизны. Въ самомъ дѣлѣ, доказательство было дано (§ 708) для  $AB'$ ,  $AC'$ ; что касается дуги  $B'C'$ , проекція  $BC$ , то мы уже знаемъ (§ 708), что проекція  $BC$  на касательную плоскость въ  $B$  имѣетъ бесконечно-большой радіусъ кривизны, а такъ какъ касательныя плоскости въ точкахъ  $A$  и  $B$  отличаются бесконечно-мало одна отъ другой, то, очевидно, то же имѣетъ мѣсто и для проекціи на касательную плоскость въ  $A$ . Три стороны треугольника  $AB'C'$  имѣютъ бесконечно-большіе радіусы кривизны; значитъ, углы, образуемые прямолинейными хордами этихъ дугъ съ касательными въ ихъ концахъ, являются бесконечно-малыми второго порядка, и сумма угловъ этого треугольника отличается только на бесконечно-малую второго порядка отъ суммы угловъ прямолинейнаго треугольника съ тѣми же вершинами, т.-е. отъ двухъ прямыхъ угловъ. Разность же между этою суммою и суммою угловъ  $ABC$  представляетъ, какъ мы видѣли, бесконечно-малую второго порядка; такимъ образомъ доказано, что сумма угловъ даннаго треугольника  $ABC$  равна двумъ прямымъ угламъ, если пренебречь бесконечно-малыми второго порядка.

§ 711. Если черезъ точку, взятую на поверхности, провести геодезическія линіи во всѣхъ направленіяхъ и на каждой изъ нихъ отложить отъ этой точки какую-нибудь постоянную длину, то геометрическое мѣсто концовъ опредѣленныхъ такимъ образомъ дугъ пересѣчетъ перпендикулярно всѣ разсматриваемыя геодезическія линіи. Въ самомъ дѣлѣ, пусть  $OM$ ,  $OM'$  (черт. 92) будутъ двѣ смежныя геодезическія линіи



Черт. 92

одинаковой длины; нужно доказать, что уголъ  $OMM'$  — прямой. Дѣйствительно, предположимъ, что это не такъ; одинъ изъ угловъ  $OMM'$ ,  $OM'M$  будетъ тогда острымъ, а другой тупымъ. Допустимъ, что уголъ при  $M$  — тупой; ведемъ черезъ точку  $M$  по поверхности такую бесконечно-малую линію  $MK$ , чтобы уголъ  $KMM'$  былъ бы больше  $KMM$ . Такъ какъ треугольникъ  $KMM'$  бесконечно-малъ, то его

можно принять за прямолинейный, а въ такомъ случаѣ, вслѣдствіе предположеннаго неравенства угловъ,

$$KM < KM'.$$

Отсюда заключаемъ, что

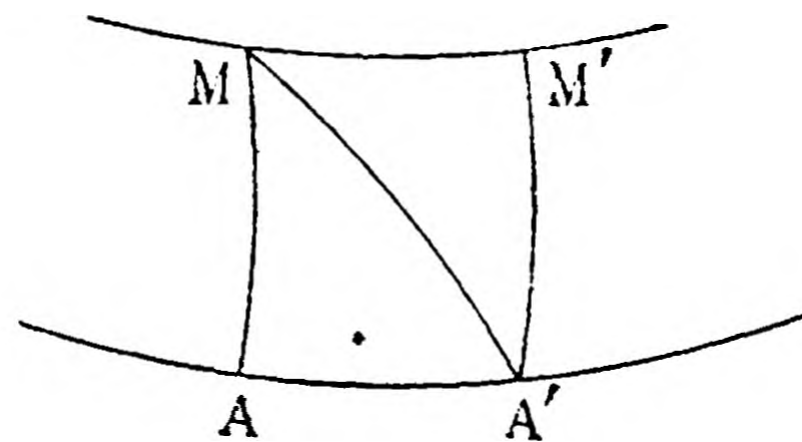
$$OK + KM < OK + KM',$$

но сумма  $OK + KM'$  есть разстояніе  $OM'$ , равное по заданному  $OM$ , и, слѣдовательно, изъ сдѣланныхъ предположеній вытекало бы, что

$$OK + KM < OM,$$

а это противорѣчило бы допущенію, что  $OM$  есть кратчайшая линія, какую только можно провести на поверхности между точками  $O$  и  $M$ .

§ 712. Предыдущее доказательство предполагаетъ, что разсматриваемыя геодезическія линіи—кратчайшія, какія только можно провести между ихъ крайними точками; оно, слѣдовательно, не распространяется на всѣ линіи, соприкасающаяся плоскость которыхъ въ каждой точкѣ нормальна къ поверхности. Теорема, однако, справедлива и для такихъ линій. Мы ее докажемъ, строя сначала болѣе общую теорему: если черезъ точки какой-нибудь кривой, нанесенной на поверхности, провести геодезическія линіи, перпендикулярныя къ этой кривой, и на каждой изъ нихъ отложить какую-нибудь постоянную длину, то геометрическое мѣсто концовъ этихъ длинъ пересѣчетъ перпендикулярно всѣ геодезическія линіи. Пусть  $AM$ ,  $A'M'$  (черт. 93) бу-



Черт. 93

дутъ двѣ равныя геодезическія линіи, обѣ кратчайшія, какія только можно провести между ихъ концами. Предположимъ, что углы при  $A$  и  $A'$ —прямые; нужно доказать, что углы при  $M$  и  $M'$  также прямые. Соединяемъ точку  $M$  съ точкою  $A'$  геодезическою линіею. Такъ какъ уголъ  $MAA'$ —прямой, то линія  $AA'$  касательна къ кривой, служащей геометрическимъ мѣстомъ концовъ равныхъ  $MA$  длинъ, отложенныхъ на геодезическихъ линіяхъ, исходящихъ изъ точки  $M$ ; если, поэтому,  $AA'$  бесконечно-малая первого порядка, то разность  $MA' - MA$  бесконечно-малая второго порядка, и, значитъ, вслѣдствіе предположеннаго равенства между  $AM$  и  $A'M'$  разность между  $A'M$  и  $A'M'$ —та же бесконечно-малая второго порядка; такимъ образомъ, если отложить на геодезическихъ линіяхъ, исходящихъ изъ  $A'$ , длины, равныя  $A'M'$ , то геометрическое мѣсто ихъ концовъ, нормальное, по предыдущей теоремѣ, къ  $A'M'$ , будетъ касательно къ линіи  $MM'$ , которая, слѣдовательно, пересѣкаетъ  $A'M'$  подъ прямымъ угломъ.

Это доказательство предполагаетъ, подобно предыдущему, что разсматриваемыя геодезическія линіи—кратчайшія между двумя ихъ концами; но, соединяя обѣ теоремы, мы легко докажемъ, что это условіе можно опустить. Въ самомъ дѣлѣ, если отложить нор-

мально къ кривой постоянную длину на геодезическихъ линіяхъ, исходящихъ изъ разныхъ ея точекъ, теорема къ нимъ будетъ приложима, лишь бы только ихъ длина была достаточно мала, и мы получимъ новую кривую, пересѣкаемую ортогонально геодезическими линіями, нормальными къ первой; отъ точекъ этой новой кривой можно на продолженіяхъ тѣхъ же геодезическихъ линій снова отложить постоянную длину достаточно малую, чтобы геометрическое мѣсто концовъ образовало третью кривую, пересѣкающую тѣ же линіи подъ прямымъ угломъ; продолжая такимъ образомъ, мы закончимъ отложеніе на каждой линіи сколь-угодно большою длиною, доказывая этимъ, что геометрическое мѣсто концовъ пересѣкаетъ всегда подъ прямымъ угломъ геодезическія линіи, на которыхъ отлагаемая отъ начала длина можетъ расти безпредѣльно.

Геодезическія линіи, нормальныя къ одной и той же кривой, можно, очевидно, замѣнить линіями, исходящими изъ одной точки, и доказательство останется совершенно такое же.

Разсматривая на поверхности рядъ геодезическихъ линій и рядъ кривыхъ, пересѣкающихъ первыя подъ прямымъ угломъ, видимъ, что отрѣзки двухъ какихъ-угодно геодезическихъ линій, заключенные между двумя ортогональными траекторіями, равны между собою. Эта теорема есть очевидное слѣдствіе изъ предыдущей, относительно которой ее можно разсматривать, какъ обратную.

**§ 713.** Изъ предыдущей теоремы можно вывести важное слѣдствіе, относящееся къ виду выраженія квадрата разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками. Если точки поверхности опредѣлены двумя координатами  $u$  и  $v$  такими, что соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $v$  кривыя являются геодезическими линіями, а кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $u$ , пересѣкаютъ первыя подъ прямымъ угломъ, то выраженіе для квадрата разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками будетъ (§ 124) вида

$$ds^2 = Adu^2 + Bdv^2. \quad (1)$$

Но по предыдущей теоремѣ двѣ траекторіи геодезическихъ линій выдѣляютъ на этихъ послѣднихъ дуги одинаковой длины; поэтому, если  $dv = 0$ , т.-е. если дуга  $ds$  принадлежитъ одной изъ геодезическихъ линій, то значеніе  $ds^2$  будетъ зависѣть только отъ  $u$  и  $du$ , и, слѣдовательно,  $A$  есть функція только отъ одной переменнѣйшей  $u$ . Пусть  $u'$  будетъ такая функція отъ  $u$ , что

$$du' = du \sqrt{A}; \quad (2)$$

если подставить переменную  $u'$  на мѣсто переменнѣйшей  $u$ , что, очевидно, не измѣнитъ обѣихъ системъ линій, соотвѣтствующихъ постояннымъ значеніямъ координатъ, то выраженіе (1) приметъ видъ

$$ds^2 = du'^2 + Gdv^2, \quad (3)$$

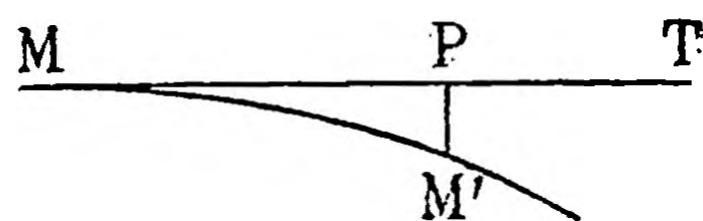
гдѣ  $G$  обозначаетъ  $B$ , выраженное въ функціи отъ  $u'$  и  $v$ . При  $dv = 0$  имѣемъ:

$$ds = du'$$

и заключаемъ отсюда, что  $u'$  есть длина, отложенная на геодезической линіи отъ опредѣленной ортогональной траекторіи; она остается произвольною по уравненію (2), по которому можно прибавить къ этой координатѣ нѣкоторую постоянную.

#### ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА

§ 714. По кривизнѣ плоской линіи мы судимъ о большей или меньшей быстротѣ удаленія этой кривой отъ ея касательной. Если въ точкѣ  $M$  (черт. 94) касательная



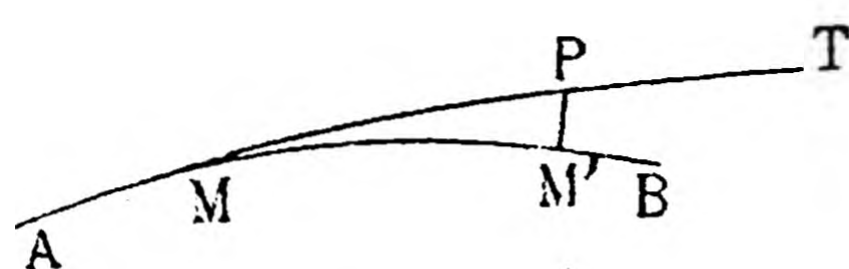
Черт. 94

есть  $MT$ , и если  $M'$  — бесконечно-близкая къ  $M$  точка на рассматриваемой кривой и  $M'P$  — разстояніе этой точки  $M'$  до касательной, то кривизна  $\frac{1}{\rho}$  опредѣлится изъ формулы

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2M'P}{MM'^2},$$

такъ что для одной и той же бесконечно-малой длины  $MM'$  кривизна пропорціональна разстоянію  $M'P$  кривой до касательной. Эйлеръ рассмотрѣлъ кривизну линіи, нанесенной на сферѣ, и мы показали (§ 550), что она пропорціональна разстоянію кривой до касающейся ея дуги большого круга. Точно такъ же для кривой, нанесенной на какой-угодно поверхности, можно рассмотреть аналогичный элементъ, которому Лиувилль далъ весьма выразительное названіе геодезической кривизны.

Пусть  $AMB$  (черт. 95) будетъ кривая, нанесенная на данной поверхности,



Черт. 95

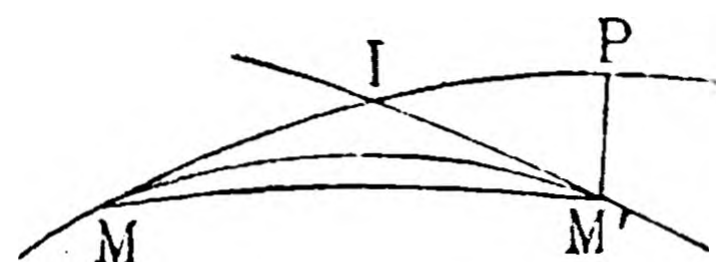
$MT$  — геодезическая линія, касающаяся ея въ точкѣ  $M$ ,  $M'$  — бесконечно-близкая къ  $M$  точка на линіи  $AM$  и  $M'P$  — разстояніе этой точки до  $MT$ ; отношеніе

$$\frac{2M'P}{MM'^2}$$

есть, по опредѣленію, геодезическая кривизна кривой  $AMB$  въ точкѣ  $M$ . Аналогія съ кривизною плоской линіи очевидна и достаточно оправдываетъ сходство названій. Притомъ мы увидимъ, что аналогія распространяется гораздо далѣе и что можно слѣдовать ей въ изученіи всѣхъ вопросовъ, относящихся къ кривымъ, нанесеннымъ на поверхностяхъ.

§ 715. Геодезическую кривизну можно представить нѣсколькими выраженіями, съ которыми полезно познакомиться и каждое изъ которыхъ можетъ быть взято за опредѣленіе. Геодезическая кривизна бесконечно-малой дуги равна углу между двумя геодезическими линіями, касательными къ этой дугѣ въ ея концахъ, раздѣленному на длину дуги.

Пусть  $MM'$  (черт. 96) будетъ рассматриваемая дуга;  $MI$ ,  $M'I$  — геодезическія



Черт. 96

линіи, касательныя къ ней въ ея концахъ;  $MM'$  — соединяющая точку  $M$  съ точкою  $M'$  геодезическая линія, которую можно назвать *геодезическою хордою*. Эта хорда отличается отъ дуги  $MM'$  только на бесконечно-малую третьяго порядка; дѣйствительно, онѣ имѣютъ общую прямолинейную хорду, разность которой съ каждою изъ обѣихъ дугъ есть (§ 19) бесконечно-малая третьяго порядка. Поэтому можно одну изъ этихъ дугъ подставлять на мѣсто другой, не измѣняя предѣла отношенія, въ которое онѣ входятъ; съ другой стороны, такъ какъ треугольникъ  $IMI'$  составленъ тремя геодезическими линіями, то сумма его угловъ равна двумъ прямымъ угламъ (§ 710), и внѣшній уголъ  $I$  можно рассмотреть, какъ равный суммѣ угловъ при  $M$  и при  $M'$ ; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{I}{MM'} = \frac{M}{MM'} + \frac{M'}{MM'}; \quad (1)$$

но, принимая во вниманіе, что геодезическія линіи  $MP$ ,  $MM'$  пересѣкаются подъ бесконечно-малымъ угломъ  $M$ , имѣемъ (§ 709):

$$M'P = M \cdot MM',$$

и, слѣдовательно,

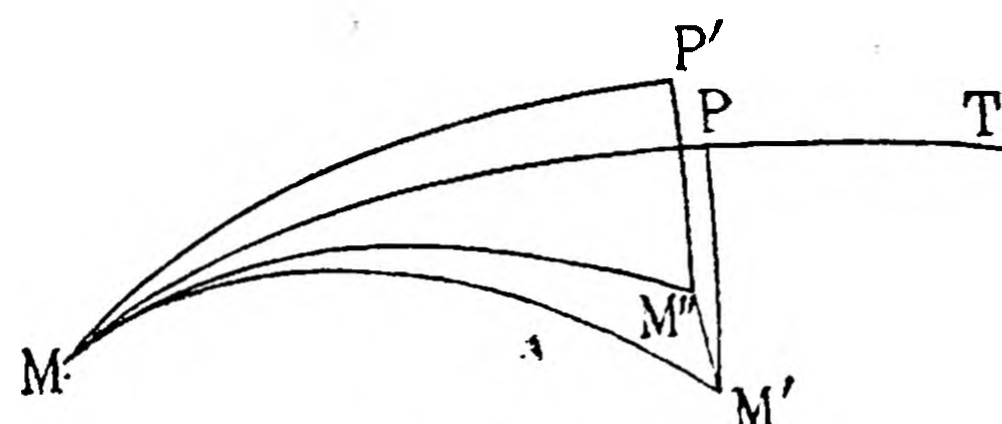
$$\frac{M}{MM'} = \frac{M'P}{MM'^2}.$$

По опредѣленію,  $\frac{M'P}{MM'^2}$  есть половина геодезической кривизны въ  $M$ ; точно такъ же увидимъ, что  $\frac{M}{MM'}$  есть половина геодезической кривизны въ  $M'$ , которая, очевидно, бесконечно-мало отличается отъ первой, и уравненіе (1) показываетъ, слѣдовательно, что  $\frac{I}{MM'}$  представляетъ, какъ мы и предсказывали, геодезическую кривизну.

§ 716. Геодезическая кривизна кривой въ точкѣ равна кривизнѣ проекціи кривой на плоскость, касательную къ поверхности въ рассматриваемой точкѣ. Рассматриваемъ бесконечно-малую дугу  $MM'$  (черт. 97), нанесенную на данной поверхности, и геодезическую линію  $MT$ , касающуюся ея въ точкѣ  $M$ ; пусть  $M'P$  будетъ раз-



стояніе точки  $M'$  до линіи  $MT$ . Проектируемъ треугольникъ  $MM'R$  на плоскость, касательную къ поверхности въ точкѣ  $M$ ; проекціи дугъ  $MM'$  и  $MP$  — двѣ взаимно



Черт. 97

касательныя кривыя; проекцію линіи  $MP$ , имѣющую (§ 708) бесконечно-большой радіусъ кривизны, можно разсматривать, какъ прямую линію. Пусть  $MM''P'$  будетъ проекція треугольника  $MM'R$ ; такъ какъ стороны угла  $MPM'$  образуютъ бесконечно-малые углы съ плоскостью, на которую мы ихъ проектируемъ, то этотъ уголъ бесконечно-мало отличается отъ своей проекціи; значитъ, уголъ  $MP'M''$  можно считать прямымъ, и, слѣдовательно, кривизна линіи  $MM''$  равна

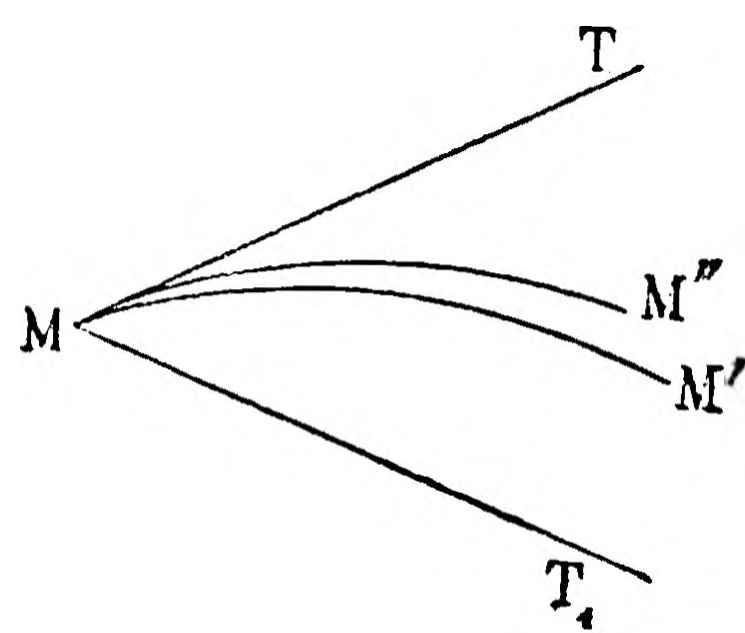
$$\frac{2M'P'}{MM''^2}. \quad (1)$$

Но линіи  $M'R$ ,  $MM'$ , бесконечно-мало наклоненныя къ касательной плоскости въ  $M$ , можно считать равными ихъ проекціямъ на эту плоскость; такимъ образомъ, выраженіе (1), представляющее кривизну плоской линіи  $MM''$ , равно

$$\frac{2M'P}{MM'^2},$$

т.-е. (§ 714) геодезической кривизнѣ линіи  $MM'$ .

§ 717. Пусть  $\frac{1}{\rho}$  будетъ абсолютная кривизна линіи  $MM'$  (черт. 98), разсмо-



Черт. 98

трѣнной какъ кривая, заданная въ пространствѣ, и притомъ независимо отъ содержащей ее поверхности; называемъ черезъ  $\theta$  уголъ, образуемый соприкасающеюся плоскостью этой линіи съ плоскостью, касательною къ поверхности въ точкѣ  $M$ ; выраженіе для геодезической кривизны есть

$$\frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если  $\varepsilon$  обозначаетъ уголъ смежности, образуемый касательными въ точкахъ  $M$  и  $M'$ , то кривизна  $\frac{1}{\rho}$  равна  $\frac{\varepsilon}{MM'}$ ; проектируя  $MM'$  на касательную плоскость въ  $M$ , получаемъ дугу  $MM''$ , которую можно считать равною  $MM'$ , и если  $\varepsilon'$  обозначаетъ уголъ смежности дуги  $MM''$ , то кривизна послѣдней, равная (§ 716) геодезической кривизнѣ дуги  $MM'$ , измѣрится выраженіемъ  $\frac{\varepsilon'}{MM''}$ , или, что то же самое, выраженіемъ  $\frac{\varepsilon'}{MM'}$ . Такимъ образомъ, отношеніе кривизны  $\frac{1}{\rho}$  къ геодезической кривизнѣ дуги  $MM'$  выразится черезъ  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ ; чтобы его вычислить, ведемъ черезъ точку  $M$  линію  $MT_1$ , параллельную касательной въ  $M'$ : она составитъ съ касательною  $MT$  уголъ смежности  $\varepsilon$ ; плоскость  $T_1MT$  является (§ 563) соприкасающеюся плоскостью для  $MM'$  и образуетъ уголъ  $\theta$  съ касательною плоскостью въ  $M$ , которую она пересѣкаетъ по  $MT$ ;  $\varepsilon'$ , очевидно, проекція угла  $\varepsilon$  на касательную плоскость, и оба эти угла принадлежатъ трегранному углу съ прямымъ двуграннымъ угломъ, въ которомъ  $\varepsilon$  лежитъ противъ прямого угла; значитъ, имѣемъ:

$$\frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon'} = \frac{1}{\cos \theta},$$

и такъ какъ  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  безконечно-малы, то

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Выше отмѣчено, что отношеніе  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$  есть отношеніе кривизны  $\frac{1}{\rho}$  къ геодезической кривизнѣ, которая, слѣдовательно, равна, какъ мы и предсказывали,  $\frac{\cos \theta}{\rho}$ .

Не бесполезно замѣтить, что одна и та же кривая, расположенная на безчисленномъ множествѣ различныхъ поверхностей, для которыхъ она служитъ общимъ пересѣченіемъ, имѣетъ на каждой изъ нихъ особую геодезическую кривизну, которая можетъ измѣняться отъ нуля до абсолютной кривизны  $\frac{1}{\rho}$ , являющейся ея максимальнымъ значеніемъ. Этого предѣла она достигаетъ въ томъ случаѣ, когда соприкасающаяся плоскость кривой касательна къ поверхности, на которой она разсматривается нанесенною.

**§ 718.** Геодезическую кривизну можно еще разсматривать съ другой точки зрѣнія, по примѣру нѣмецкихъ геометровъ, назвавшихъ ее *кривизною развертыванія*.

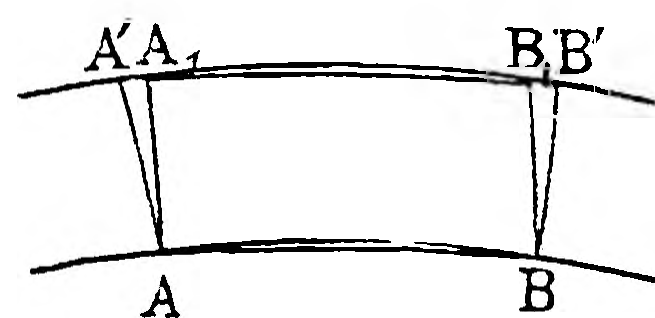
Замѣтимъ сначала, что геодезическая кривизна линіи, нанесенной на развертывающейся поверхности, равна кривизнѣ плоской линіи, въ которую она переходитъ при развертываніи поверхности на плоскость. Въ самомъ дѣлѣ, развертываніе поверхности, не измѣняя длинъ нанесенныхъ на ней линій, преобразовываетъ геодезическія линіи такой поверхности въ прямыя линіи, и геодезическая линія, касательная въ нѣкоторой точкѣ къ разсматриваемой кривой, при развертываніи переходитъ въ прямую, касательную въ соотвѣтственной точкѣ къ кривой, въ которую переходитъ

данная кривая; поэтому расхождение между кривою и касающеюся ей геодезическою линіею будетъ то же, что между кривою, въ которую переходитъ данная, и ея касательною, а отсюда заключаемъ (§ 714) о равенствѣ обѣихъ сравниваемыхъ кривизнъ.

Послѣ этого описываемъ около поверхности, на которой нанесена данная линія, развертывающуюся поверхность, касающуюся первой по этой линіи и представляющую, очевидно, огибающую касательныхъ плоскостей, проведенныхъ въ различныхъ ея точкахъ; геодезическая кривизна линіи будетъ одна и та же, станемъ ли мы разсматривать ее, какъ нанесенную на данной поверхности, или какъ нанесенную на развертывающейся поверхности, потому что при общей для обѣихъ поверхностей касательной плоскости кривизна, выраженіе которой было найдено въ предыдущемъ параграфѣ, имѣетъ одно и то же значеніе въ обоихъ случаяхъ. Если, поэтому, развертывающуюся поверхность развернуть на плоскости, то разсматриваемая линія перейдетъ въ плоскую, кривизна которой будетъ точно равна геодезической кривизнѣ, вслѣдствіе чего послѣдняя и названа кривизною развертыванія.

§ 719. Разсмотрѣніе геодезической кривизны полезно при изученіи линій, нанесенныхъ на поверхности; продолженіе этой главы обнаружитъ всю ея важность. Докажемъ непосредственно теорему, которую нужно считать основною въ этой теоріи и которая дополняетъ уже полученное (§ 712) предложеніе.

Когда разсматривается на поверхности рядъ линій, слѣдующихъ одна за другою по какому-нибудь непрерывному закону, то разность двухъ бесконечно-малыхъ дугъ  $AB$ ,  $A'B'$  (черт. 99), заключенныхъ между двумя ортогональными траекторіями этихъ



Черт. 99

кривыхъ, пропорціональна геодезической кривизнѣ  $AB$ , и мы имѣемъ, принимая  $AB$  и  $AA'$  за бесконечно-малыя перваго порядка и отбрасывая бесконечно-малыя третьяго порядка,

$$A'B' - AB = AB \cdot \frac{AA'}{\rho},$$

гдѣ  $\frac{1}{\rho}$  — геодезическая кривизна, считаемая положительною, когда геодезическая дуга, касающаяся  $AB$  въ  $A$ , расположена со стороны  $A'B'$ .

Въ самомъ дѣлѣ, соединяемъ двѣ точки  $A$  и  $B$  геодезическою линіею, которую можно назвать хордою дуги  $AB$ , и черезъ оба конца ведемъ нормально къ этой хордѣ бесконечно-малыя перпендикуляры  $AA_1$ ,  $BB_1$ ; по сказанному въ § 712-мъ разность  $A_1B_1 - AB$ , въ случаѣ, когда  $AB$  имѣетъ конечную длину, есть бесконечно-малая второго порядка и содержитъ множителемъ квадратъ  $AA_1$ ; эта разность должна обращаться въ нуль вмѣстѣ съ  $AB$ . Если, поэтому, представить ее черезъ  $G \cdot \overline{AA_1}^2$ , то  $G$  есть бесконечно-малая одновременно съ  $AB$ , и разность между хордою  $A_1B_1$  и хор-

дою  $AB$ —третьяго порядка, разности между каждою изъ этихъ хордъ и стягиваемою ею дугою, притомъ, также третьяго порядка; значить, можно считать, пренебрегая лишь безконечно-малыми третьяго порядка,  $A_1B_1$  равною  $AB$  и разность  $A'B' - AB$ , которую мы хотимъ вычислить, равною суммѣ  $A_1A' + B_1B'$ ; по § 709-му же имѣемъ:

$$\begin{aligned} A_1A' &= AA' \cdot (A'AA_1), \\ B_1B' &= BB_1 \cdot (B'BB_1); \end{aligned}$$

$AA'$  и  $BB_1$  можно считать равными; углы  $A'AA_1$ ,  $B'BB_1$  равны угламъ, составляемымъ хордою  $AB$  съ касательными въ обоихъ концахъ дуги, и ихъ сумма есть (§ 715) уголъ смежности дуги  $AB$ , который мы обозначимъ черезъ  $\varepsilon$ ; итакъ, имѣемъ:

$$A_1A' + B_1B' = \varepsilon \cdot AA'$$

и, называя черезъ  $\frac{1}{\rho}$  геодезическую кривизну  $\frac{\varepsilon}{AB}$ , окончательно выводимъ:

$$A'B' - AB = A_1A' + B_1B' = AA' \cdot \frac{AB}{\rho},$$

какъ и было предсказано.

#### Полная кривизна части поверхности

§ 720. Идея кривизны, приложенная къ поверхностямъ, крайне сложна; дѣйствительно, можно представить въ каждой точкѣ безчисленное множество кривыхъ, нанесенныхъ на поверхности, и кривизна каждой изъ нихъ есть одинъ изъ элементовъ, входящихъ въ неопредѣленную идею, выражаемую словомъ *кривизна*, приложеннымъ къ поверхности. Гауссъ первый опредѣлилъ ее съ точностью; знаменитый геометръ сравниваетъ для этого точки изучаемой имъ поверхности съ точками сферы радіуса, равнаго по длинѣ единицѣ, и считаетъ на обѣихъ поверхностяхъ соотвѣстственными тѣ изъ нихъ, для которыхъ нормали параллельны; по этому опредѣленію какой-нибудь части данной поверхности будетъ соотвѣтствовать часть сферической поверхности, площадь которой есть *полная кривизна* разсматриваемой части.

Средняя кривизна части поверхности есть отношеніе полной кривизны къ площади разсматриваемой части.

Кривизна поверхности въ точкѣ есть средняя кривизна безконечно-малой части этой поверхности, содержащей въ себѣ разсматриваемую точку.

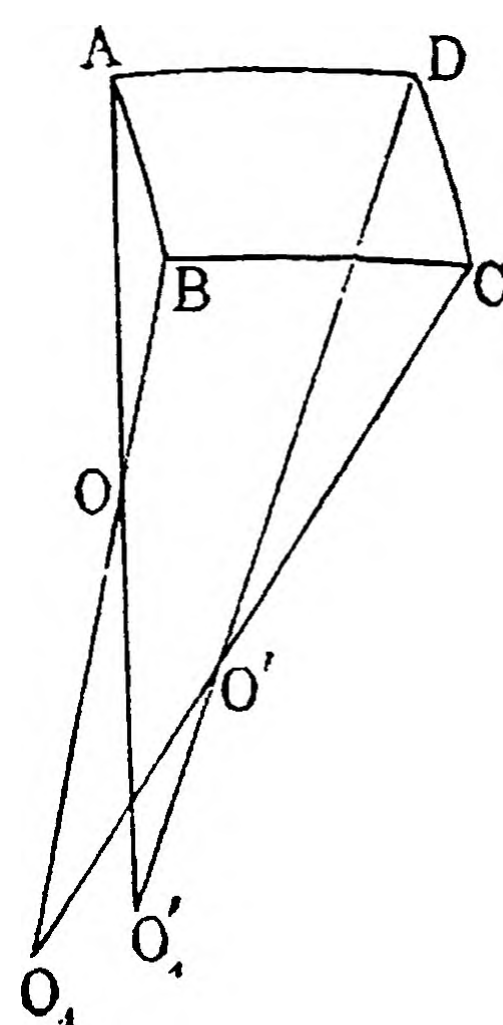
§ 721. Отмѣтимъ, прежде чѣмъ идти далѣе, полную аналогію предыдущихъ опредѣленій съ опредѣленіями, относящимися къ плоскимъ кривымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, кривизна дуги плоской кривой есть уголъ между крайними касательными, или, что то же самое, уголъ между нормальми въ ея концахъ, т.-е. дуга круга радіуса, равнаго единицѣ, содержащаяся между двумя радіусами, параллельными этимъ нормальмъ; средняя кривизна есть отношеніе этой дуги круга къ дугѣ разсматриваемой кривой, и кривизна въ точкѣ есть средняя кривизна безконечно-малой дуги, содержащей эту точку; аналогія очевидна и настаивать на ней нѣтъ никакой надобности.

## МѢРА КРИВИЗНЫ

§ 722. Кривизна поверхности въ точкѣ равна обратной величинѣ произведенія главныхъ радіусовъ кривизны.

Для вычисленія кривизны поверхности въ точкѣ нужно, по опредѣленію, найти полную кривизну бесконечно-малой поверхности, содержащей эту точку: выбираемъ бесконечно-малый прямоугольникъ, образуемый четырьмя линіями кривизны; пусть  $d\alpha$ ,  $d\beta$  будутъ стороны этого прямоугольника и  $R_1$ ,  $R_2$ —соотвѣтственные радіусы кривизны; нормали, проведенныя черезъ точки контура  $ABCD$  (черт. 100) образуютъ четыре элемента развертывающейся поверхности, которые можно разсматривать, какъ четыре плоскихъ площадки, пересѣкающихся попарно подъ прямымъ угломъ. Параллели этимъ нормалямъ, проведенныя черезъ центръ сферы радіуса, равнаго единицѣ, составятъ четырехгранный уголъ съ прямыми двугранными углами и опредѣлятъ на сферѣ прямоугольникъ, площадь котораго, по опредѣленію, есть полная кривизна  $ABCD$ ;



Черт. 100

стороны этого прямоугольника, равные угламъ, подъ которыми они видны изъ центра сферы, измѣряются величинами  $\frac{d\alpha}{R_1}$ ,  $\frac{d\beta}{R_2}$ , гдѣ  $R_1$  и  $R_2$ —два радіуса кривизны; такимъ образомъ, площадь прямоугольника равна  $\frac{d\alpha d\beta}{R_1 R_2}$ , и отношеніе этой площади къ площади  $ABCD$ , равной  $d\alpha d\beta$ , есть, какъ мы и предвидѣли,  $\frac{1}{R_1 R_2}$ .

Если бы разсматриваемый на поверхности элементъ имѣлъ другую форму, результатъ былъ бы, очевидно, тотъ же самый. Дѣйствительно, какой бы ни былъ формы бесконечно-малый элементъ, его можно разбить линіями кривизны на прямоугольники, еще болѣе его самого бесконечно-малые. Такъ какъ средняя кривизна каждаго прямоугольника есть, въ предѣлѣ, величина, обратная произведенію радіусовъ кривизны, то то же самое будетъ относительно средней кривизны и ихъ совокупности.

§ 723. Такъ какъ одинъ изъ радіусовъ кривизны развертывающейся поверхности бесконечно-великъ, то ея кривизна въ каждой точкѣ равна нулю. Впрочемъ, это вытекаетъ непосредственно изъ опредѣленія. Въ самомъ дѣлѣ, нормали, проведен-



ныя черезъ различныя точки производящей, параллельны между собою; слѣдовательно, точки сферы, соотвѣтствующія всѣмъ точкамъ развѣтывающейся поверхности, образуютъ кривую линію, каждая точка которой соотвѣтствуетъ цѣлой производящей, и часть сферы, соотвѣтствующая закрытому контуру, большому или малому, имѣетъ всегда нулевую площадь.

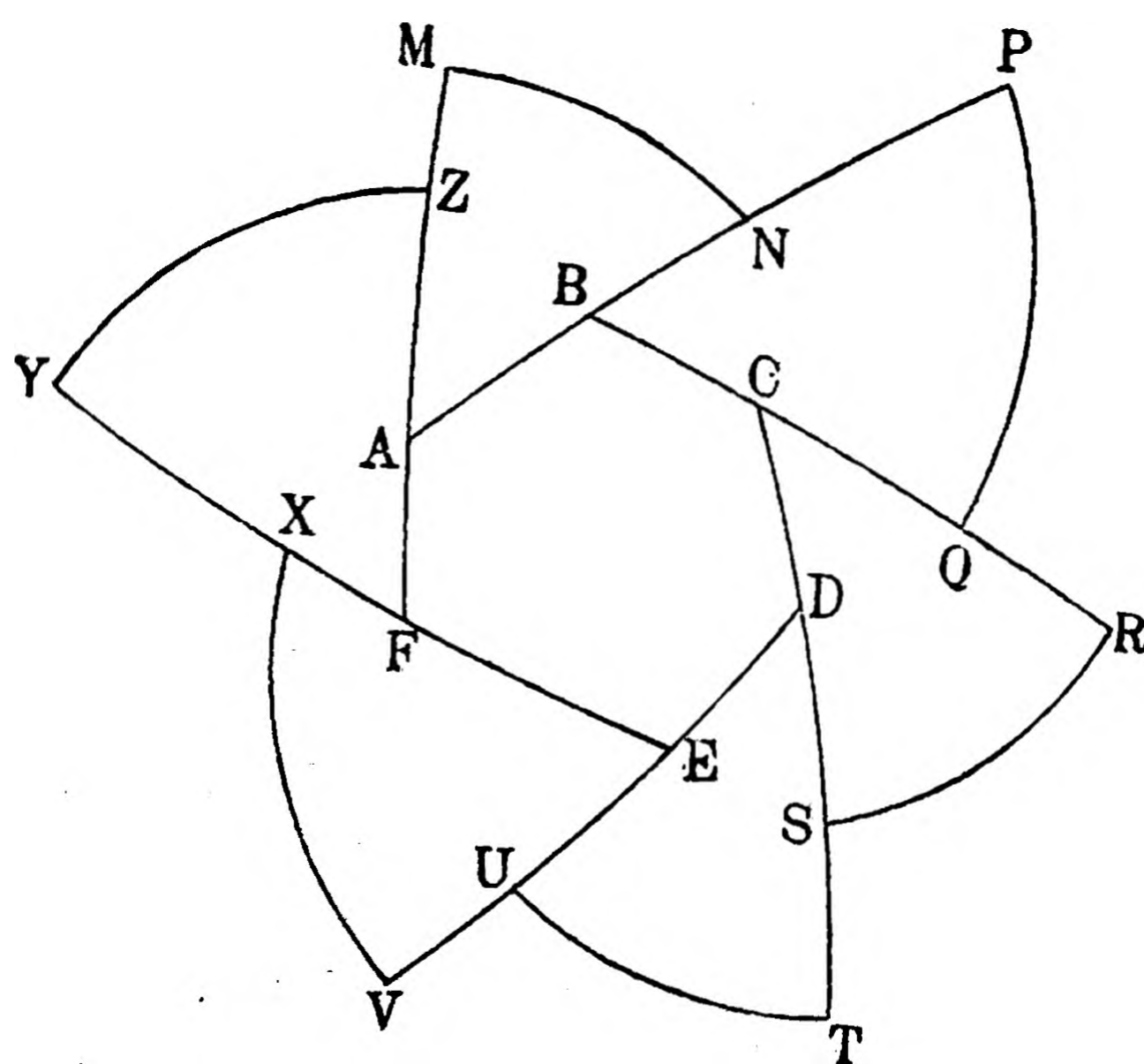
### ТЕОРІЯ РАЗВЕРТЫВАНІЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 724. Гауссъ доказалъ касательно полной кривизны нѣсколько теоремъ, которыя должно отнести къ самымъ изящнымъ и самымъ замѣчательнымъ въ Геометріи. Не обращаясь къ методамъ, употребленнымъ знаменитымъ авторомъ, мы дадимъ геометрическое доказательство наиболѣе важныхъ изъ его результатовъ.

Установимъ сначала лемму, данную О. Бонне, на которой основаны эти доказательства.

Если начертить на сферѣ какой-нибудь замкнутый контуръ, черезъ каждую изъ его точекъ провести касательную къ нему дугу большого круга и на каждой изъ этихъ дугъ отложить, въ одномъ и томъ же направленіи, длину квадранта, то геометрическое мѣсто полученныхъ такимъ образомъ точекъ раздѣлитъ сферу на двѣ равновеликихъ части.

Для доказательства рассмотрим сперва многоугольникъ  $ABCDEF$  (черт. 101), со-

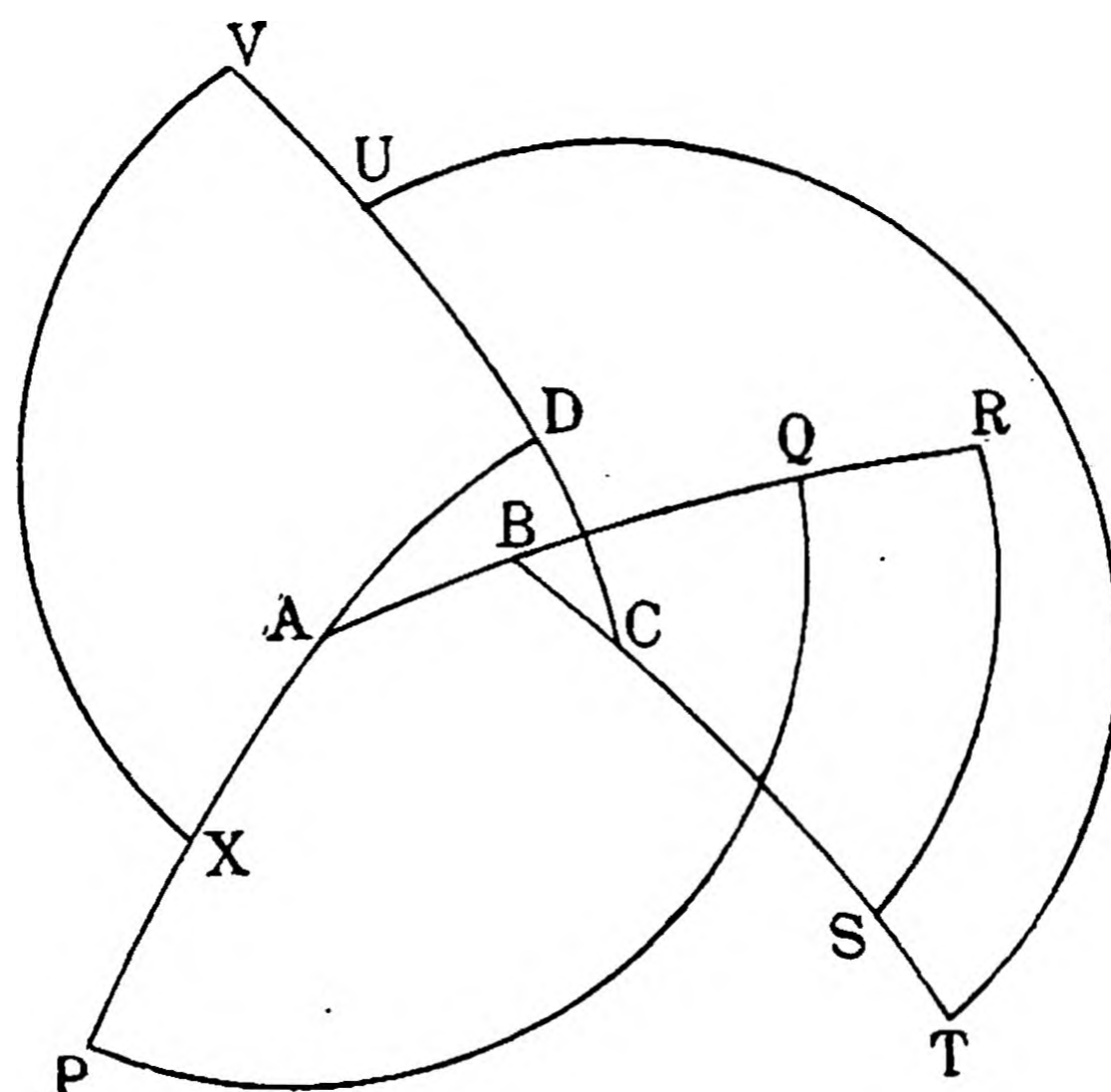


Черт. 101

ставленный дугами большихъ круговъ. Продолжаемъ его стороны, всегда въ одномъ и томъ же направленіи, и изъ каждой вершины, какъ полюса, сферическимъ радіусомъ, равнымъ квадранту, описываемъ дугу круга. Такимъ образомъ составляемъ равнобедренные сферическіе треугольники, каждый изъ которыхъ измѣряется соотвѣтственнымъ внѣшнимъ угломъ многоугольника. Отсюда элементарная геометрія даетъ возможность заключить непосредственно, что эти треугольники, сложенные съ площадью многоугольника, даютъ сумму, измѣряющуюся четырьмя прямыми углами и равную,

слѣдовательно, половинѣ сѣеры, такъ что непрерывная линія  $PQRSTUVWXYZMNP$  дѣлитъ сѣеру на двѣ равновеликія части.

Если многоугольникъ имѣетъ входящіе углы, то для точности теоремы нужно вычесть треугольники, соотвѣтствующіе этимъ угламъ; тѣмъ не менѣе построение даетъ непрерывную черту, дѣлящую сѣеру на двѣ равновеликія части. Такъ напр., если многоугольникъ есть  $ABCD$  (черт. 102) и изъ вершинъ его  $A, B, C, D$ , какъ



Черт. 102

полюсовъ, описаны дуги большихъ круговъ  $PQ, RS, TU, VX$ , то непрерывная линія  $PQRSTUVWXYZ$  раздѣлитъ сѣеру на двѣ равновеликія части.

Увеличивая безпредѣльно число сторонъ многоугольника, мы его замѣнимъ какою-угодно замкнутою кривою и получимъ искомую теорему.

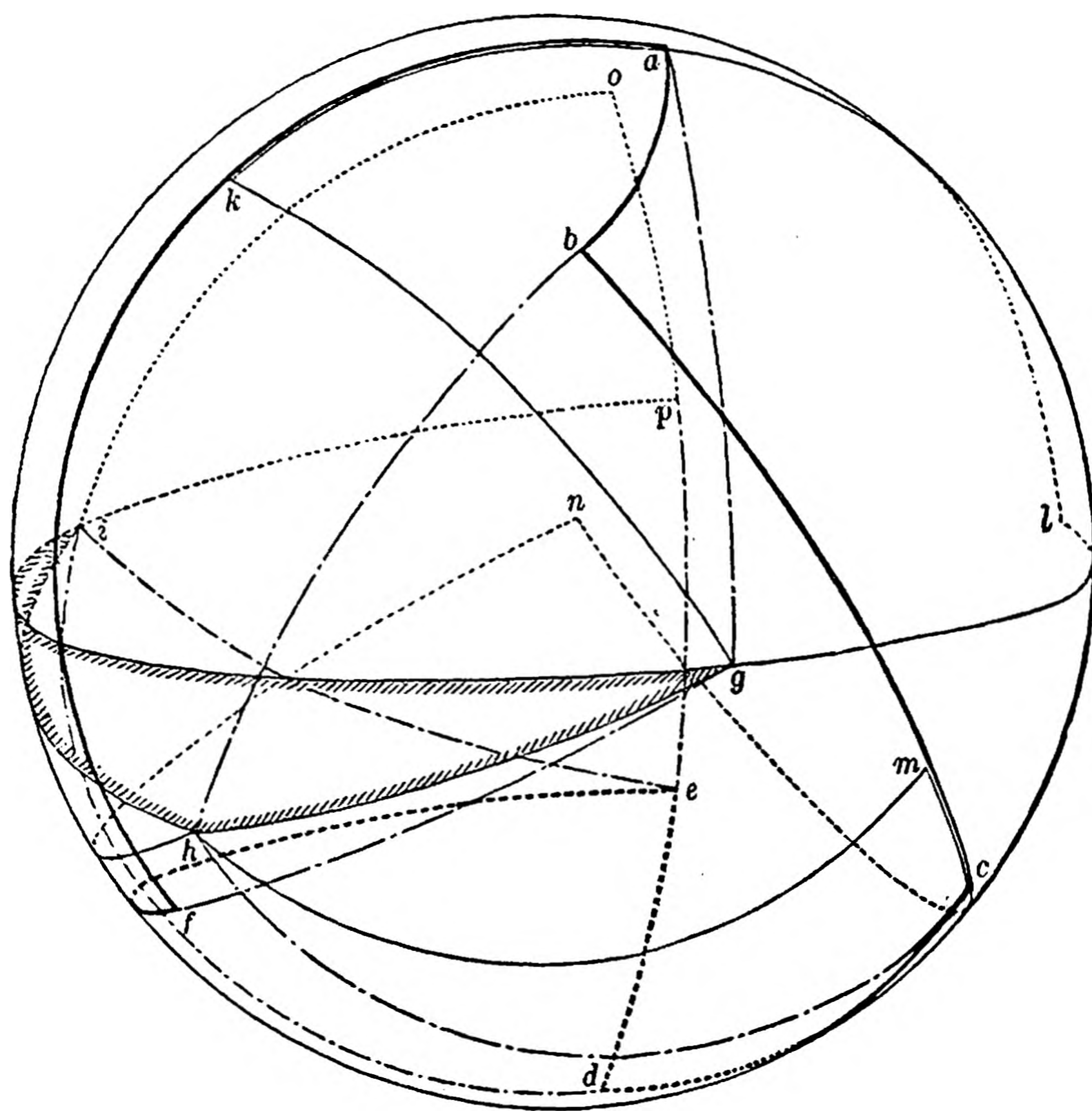
**§ 725.** Эта замѣчательная теорема не отличается, въ сущности, отъ другого предложенія, высказаннаго Якоби (Jacobi).

Если черезъ центръ сѣеры провести параллели главнымъ нормалямъ какой-нибудь замкнутой кривой  $S$ , то геометрическое мѣсто ихъ концовъ раздѣлитъ сѣеру на двѣ равновеликія части.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая сферическую индикатрису, служащую геометрическимъ мѣстомъ концовъ радіусовъ, параллельныхъ касательнымъ кривой  $S$ , видимъ, что плоскости дугъ большихъ круговъ, касательныхъ къ этой индикатрисѣ, параллельны (§ 566) соприкасающимся плоскостямъ кривой  $S$ , и точка, расположенная на одной изъ этихъ дугъ, на разстояніи квадранта отъ индикатрисы, есть коонецъ радіуса, проведеннаго въ соприкасающейся плоскости перпендикулярно къ радіусу, соотвѣтствующему точкѣ индикатрисы, т.-е. перпендикулярно къ касательной кривой  $S$ ; этотъ радіусъ, очевидно, параллеленъ главной нормали кривой  $S$ , и теорема Бонне входитъ, слѣдовательно, въ теорему Якоби.

**§ 726.** Разсмотримъ на какой-нибудь поверхности треугольникъ, составленный тремя геодезическими линіями, и на сферѣ радіуса, равнаго единицѣ, три дуги, служащія сферическими индикатрисами сторонъ треугольника. Пусть (черт. 103)  $ab, cd, ef$  будутъ эти три дуги; соединяемъ дугами большихъ круговъ концы, соотвѣтствующіе

щие одной и той же вершинѣ первообразнаго треугольника; образуется шестиугольникъ  $abcdef$ , три стороны котораго—дуги большихъ круговъ, природа же трехъ остальныхъ зависитъ отъ вида рассматриваемыхъ геодезическихъ линій. Шестъ угловъ



Черт. 103

этого шестиугольника—прямые; дѣйствительно, каждый изъ нихъ составленъ сферическою индикатрисою одной изъ сторонъ даннаго геодезическаго треугольника и дугою большого круга, соединяющею конецъ этой индикатрисы съ концомъ индикатрисы слѣдующей стороны; но плоскость дуги большого круга, касательной къ сферической индикатрисѣ кривой, параллельна (§ 566) соприкасающейся плоскости этой послѣдней, а точки обѣихъ индикатрисъ, соотвѣтствующія одной изъ вершинъ треугольника на данной поверхности, представляютъ концы двухъ радіусовъ, параллельныхъ касательнымъ сторонамъ, пересѣкающихся въ этой вершинѣ; плоскость дуги большого круга, соединяющей ихъ, очевидно, параллельна плоскости, касательной къ поверхности, такъ что обѣ линіи, о которыхъ идетъ рѣчь, взаимно-перпендикулярны.

Прилагаемъ къ линіи  $abcdef$  теорему Бонне. У насъ получится непрерывная линія, изображенная на чертежѣ и составленная изъ двѣнадцати отдѣльныхъ линій, между которыми девять дугъ большихъ круговъ, образующихъ три сферическихъ треугольника, и три кривыхъ переменнѣй природы, измѣняющейся вмѣстѣ съ природою геодезическихъ линій, для которыхъ ведется это доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, ясно, что когда теорема Бонне прилагается къ какому-нибудь многоугольнику, то каждой изъ сторонъ многоугольника будетъ соотвѣтствовать одна изъ сторонъ фигуры, дѣлящей сферу на двѣ равновеликихъ части, а каждой вершинѣ будетъ соотвѣтствовать также сторона той же фигуры, представляющая непремѣнно дугу боль-

шого круга; дѣйствительно, каждую вершину можно разсмотрѣть, какъ безконечно-малую дугу, сближающую двѣ стороны, которыя въ ней соединяются между собою, и такъ какъ дуги большихъ круговъ, проведенныя касательно къ этой безконечно-малой сторонѣ и равныя по длинѣ квадранту, всѣ исходятъ изъ одной точки, то ихъ концы образуютъ дугу большого круга, имѣющую эту точку полюсомъ. Итакъ, производная отъ шестиугольника фигура имѣетъ двѣнадцать сторонъ, между которыми, вообще, шесть дугъ большихъ круговъ. Въ настоящемъ случаѣ она имѣетъ девять дугъ большихъ круговъ, потому что три изъ нихъ—производныя отъ сторонъ  $bc$ ,  $de$ ,  $fa$  шестиугольника, которыя сами представляютъ дуги большихъ круговъ; въ самомъ дѣлѣ, касательныя къ нимъ дуги большихъ круговъ будутъ сами эти стороны, на которыхъ отъ каждой ихъ точки нужно отложить по дугѣ квадранта; такимъ образомъ, отъ каждой такой стороны производимъ дугу той же длины, расположенную на томъ же большомъ кругѣ. Наконецъ, производная фигура будетъ имѣть три криволинейныхъ стороны,  $gh$ ,  $hi$ ,  $ig$ , перемѣннаго вида, произведенныя отъ трехъ сторонъ  $ab$ ,  $cd$ ,  $ef$  шестиугольника. Эти три линіи образуютъ треугольникъ, какъ показано на чертежѣ; чтобы это доказать, достаточно показать, что дуга большого круга,  $bh$ , проведенная касательно къ  $ab$  и равная квадранту, имѣетъ конецъ, общій съ дугою большого круга  $ch$ , проведенною черезъ точку  $c$  касательно къ  $cd$  и равною также квадранту. Дѣйствительно, концы этихъ дугъ расположены на радіусахъ, параллельныхъ главнымъ нормалямъ геодезическихъ линій, для которыхъ  $ab$  и  $cd$  служатъ сферическими индикатрисами; но въ вершинѣ треугольника, соотвѣтствующей точкамъ  $b$  и  $c$ , эти нормали сливаются въ одну, такъ какъ обѣ совпадаютъ съ нормалью къ поверхности, на которой данъ геодезическій треугольникъ.

Итакъ, доказано, что непрерывная линія, дѣлящая сферу на двѣ равновеликихъ части, составляется изъ двѣнадцати отдѣльныхъ линій, образующихъ три сферическихъ треугольника и треугольникъ  $ghi$ ; сумма этихъ четырехъ треугольниковъ равновелика половинѣ сферы; я утверждаю, что треугольникъ  $ghi$  есть какъ разъ искомая полная кривизна, для которой эта теорема дастъ такимъ образомъ мѣру. Въ самомъ дѣлѣ, точки контура этого треугольника представляютъ концы радіусовъ, параллельныхъ главнымъ нормалямъ трехъ сторонъ разсматриваемаго геодезическаго треугольника и, слѣдовательно, параллельныхъ нормалямъ къ поверхности, на которой нанесенъ этотъ треугольникъ; значитъ, треугольникъ  $ghi$  представляетъ искомую полную кривизну. Каждый изъ трехъ сферическихъ треугольниковъ, составляющихъ вмѣстѣ съ  $ghi$  сумму, равную половинѣ сферы, равнобедренный и имѣетъ два прямыхъ угла; такіе треугольники измѣряются своимъ основаніемъ; основанія же ихъ равны сторонамъ  $bc$ ,  $de$ ,  $fa$ , т.-е. дополненіямъ угловъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  геодезическаго треугольника до двухъ прямыхъ; такимъ образомъ, сумма

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C + ghi$$

равна полусферѣ, выражающейся, какъ извѣстно, черезъ  $2\pi$ , и мы имѣемъ:

$$\pi - A + \pi - B + \pi - C + ghi = 2\pi,$$

откуда

$$ghi = A + B + C - \pi.$$



Въ этомъ и заключается теорема Гаусса: полная кривизна геодезическаго треугольника  $ABC$  измѣряется избыткомъ суммы угловъ этого треугольника надъ двумя прямыми углами.

§ 727. Предыдущая теорема, замѣчательная по своему выдающемуся изяществу и общности, отличается отъ прочихъ общихъ свойствъ поверхностей тѣмъ, что прилагается къ конечной части любой поверхности. Теоремы Эйлера и Монжа, столь же общія, какъ и теорема Гаусса, относятся къ бесконечно-малымъ частямъ поверхности; понятно à priori, что свойства, при изученіи которыхъ можно отбрасывать бесконечно-малыя нѣкотораго порядка, можно изучать за-разъ для всѣхъ непрерывныхъ поверхностей; напр., въ ученіи о касательныхъ можно пренебречь бесконечно-малыми второго порядка: значитъ, всякую поверхность можно, въ смежности съ точкою, считать плоскою; вотъ почему и касательныя ко всѣмъ кривымъ, проходящимъ черезъ эту точку, лежатъ въ одной плоскости. Въ ученіи о радіусахъ кривизны можно пренебречь бесконечно-малыми третьаго порядка, и, слѣдовательно, всякую поверхность можно, съ этой точки зрѣнія, привести къ поверхности второго порядка; значитъ, вполне естественно, чтобы законы распредѣленія кривизнъ вокругъ точки были общими для всѣхъ поверхностей. Теорема Гаусса отлична отъ всѣхъ прочихъ: такъ какъ она относится къ конечной части поверхности, то точки, расположенныя на конечномъ разстояніи, являются такимъ образомъ взаимно связанными, хотя законъ непрерывности съ перваго взгляда какъ будто не налагаетъ на нихъ никакого условія.

Если, однако, всмотрѣться ближе, то это обстоятельство, хотя и весьма замѣчательное, можно объяснить à priori. Дѣйствительно, можно видѣть, что если теорема Гаусса справедлива для бесконечно-малаго треугольника, то она тѣмъ самымъ справедлива для какого-угодно конечнаго треугольника. Въ самомъ дѣлѣ, если какой-нибудь треугольникъ разбить на меньшіе треугольники, сторонами которыхъ были бы геодезическія линіи, то полная кривизна большого треугольника будетъ равна суммѣ кривизнъ составляющихъ его треугольниковъ, т.-е., при допущеніи, что теорема доказана для этихъ послѣднихъ, избытку суммы всѣхъ ихъ угловъ надъ двумя прямыми, повторенными столько разъ, сколько треугольниковъ.

Но ясно, что сумма угловъ фигуры, вершины которыхъ помѣщаются въ вершинахъ  $A, B, C$  даннаго треугольника, равна суммѣ  $A + B + C$  этихъ трехъ угловъ; что же касается прочихъ угловъ, то сумма каждой группы изъ нихъ съ общемою вершиною равна четыремъ или двумъ прямымъ, смотря по тому, находится ли эта вершина внутри, или на контурѣ  $ABC$ ; значитъ, избытокъ суммы всѣхъ угловъ надъ двумя прямыми, повторенными столько разъ, сколько треугольниковъ, равенъ  $A + B + C$  плюсъ или минусъ кратное двухъ прямыхъ угловъ; но если бы фигура была плоскою и геодезическія линіи прямыми, то сумма кривизнъ была бы нулемъ и обратилась бы въ  $A + B + C - \pi$ , а такъ какъ число треугольниковъ и число вершинъ каждаго рода остаются одни и тѣ же во всѣхъ случаяхъ, то это выраженіе

$$A + B + C - \pi$$

является общимъ. Теорема Гаусса, относящаяся къ какому-угодно треугольнику, есть, такимъ образомъ, необходимое слѣдствіе изъ теоремы, относящейся къ бесконечно-малому треугольнику; но здѣсь необходимо отмѣтить одно обстоятельство: если бы



для доказательства теоремы, относящейся ко всякому треугольнику, нужно было бы установить ее сначала для бесконечно-малого треугольника, доказывая, что в этом случае она строго точна, то таким путем мы не получили бы никакой выгоды, или, говоря точнее, изложение нисколько не изменилось бы. В самом деле, когда говорят, что бесконечно-малый треугольник обладает некоторым свойством, то это значит, что оно прилагается к малому треугольнику с некоторою ошибкою, которая уменьшается вместе с его размерами и которой в предельном можно пренебречь. Напр., когда говорят, что полная кривизна бесконечно-малого треугольника равна избытку суммы его углов над двумя прямыми, то этим хотят сказать, что разность между полною кривизною, являющеюся второго порядка, и избытком суммы углов над двумя прямыми, есть бесконечно-малая третьего порядка. Если бы потребовалось сказать, что разность строго равна нулю, то бесконечно-малые размеры треугольника перестали бы играть всякую роль и было бы бесполезно о них вспоминать.

Ясно, впрочем, что при таком понимании теоремы можно далее заключить, что равенство строго для какого-нибудь треугольника и, следовательно, для бесконечно-малого треугольника. Действительно, когда конечный треугольник разбивают на бесконечно-малые треугольники, то так как сумма кривизн этих треугольников конечна, то сумма бесконечно-малых третьего порядка, отбрасываемых при вычислении каждой из кривизн, в предельном равна нулю и никоим образом не может повлиять на результат.

**§ 728.** Зная выражение полной кривизны треугольника, образуемого тремя геодезическими линиями, выводим выражение кривизны для какого-нибудь многоугольника, образуемого такими же линиями: она равна избытку суммы углов над двумя прямыми, повторенными столько раз, сколько сторон без двух.

**§ 729.** Когда две поверхности накладываются одна на другую, их кривизна одна и та же в соответственных точках. Другими словами, когда некоторая поверхность деформируется (видоизменяется) без изменения длины нанесенных на ней линий, произведение радиусов кривизны в каждой точке остается прежним.

В самом деле, рассмотрим бесконечно-малый треугольник  $ABC$ , составленный тремя геодезическими линиями; если  $R$  и  $R'$  — два радиуса кривизны поверхности, то полная кривизна треугольника  $ABC$  равна (§ 722)  $\frac{ABC}{RR'}$ ; она также равна (§ 726)  $A + B + C - \pi$ , где  $A$ ,  $B$  и  $C$  обозначают три его угла; таким образом имеем:

$$\frac{ABC}{RR'} = A + B + C - \pi. \quad (1)$$

Если поверхность деформируется без изменения длины нанесенных на ней линий, то треугольник  $ABC$  будет попрежнему составлен, после деформации, тремя геодезическими линиями на новой поверхности; углы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , так же как и площадь  $ABC$ , не изменятся, и, следовательно, уравнение (1) должно прилагаться к новой системе, а это требует, чтобы произведение  $RR'$  не изменялось по значению.

Это важное предложение можно доказать без связи с предыдущим.

Предположим, что нить бесконечно-малой длины  $\sigma$  укреплена одним из своих концов в рассматриваемой точке  $M$  и вращается, оставаясь натянутою на поверх-

ности: другой конецъ этой нити опишетъ кривую, длина которой не будетъ измѣняться, когда приступимъ къ деформированію поверхности, и которую, кромѣ того, можно разсмотрѣть, какъ описанную на новой поверхности точно такъ же, какъ она была описана на первообразной поверхности, и при помощи нити такой же длины. Сейчасъ мы вычислимъ полный периметръ этой кривой и увидимъ, что онъ можетъ оставаться постояннымъ только въ томъ случаѣ, если произведеніе  $RR'$  радіусовъ кривизны тоже постоянно.

Пусть  $x, y, z$  будутъ координаты точки  $M$ ; полагаемъ, какъ обычно,

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy, \quad (2)$$

откуда

$$d^2 z = p d^2 x + q d^2 y + r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2. \quad (3)$$

Называемъ черезъ  $s$  дугу геодезической линіи, проходящей въ точку  $(x, y, z)$ ; извѣстно, что главная нормаль этой линіи совпадаетъ съ нормалью къ поверхности: отсюда, принимая  $s$  за независимую переменную, заключаемъ:

$$d^2 x + p d^2 z = 0, \quad d^2 y + q d^2 z = 0. \quad (4)$$

Дѣйствительно, направленіе нормали къ поверхности образуетъ съ осями углы, косинусы которыхъ пропорціональны  $p, q$  и  $-1$ , а направленіе главной нормали къ кривой образуетъ углы, косинусы которыхъ пропорціональны (§ 587)  $\frac{d^2 x}{ds^2}, \frac{d^2 y}{ds^2}, \frac{d^2 z}{ds^2}$ ; уравненія (4) выражаютъ, что оба направленія совпадаютъ.

Дифференцируя уравненія (4), имѣемъ:

$$\begin{aligned} d^2 x + p d^3 z + (r dx + s dy) d^2 z &= 0, \\ d^2 y + q d^3 z + (s dx + t dy) d^2 z &= 0. \end{aligned}$$

Кромѣ того, называя черезъ  $\xi, \eta, \zeta$  координаты конца дуги  $\sigma$ , отложенной на этой линіи отъ точки  $(x, y, z)$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{dx}{ds} \sigma + \frac{d^2 x}{ds^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3 x}{ds^3} \frac{\sigma^3}{6} + \dots, \\ \eta &= y + \frac{dy}{ds} \sigma + \frac{d^2 y}{ds^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3 y}{ds^3} \frac{\sigma^3}{6} + \dots, \\ \zeta &= z + \frac{dz}{ds} \sigma + \frac{d^2 z}{ds^2} \frac{\sigma^2}{2} + \frac{d^3 z}{ds^3} \frac{\sigma^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Предположимъ теперь, что точка  $(x, y, z)$  есть точка, обозначенная выше черезъ  $M$ ; принимаемъ эту точку за начало координатъ, направивъ ось  $z$ -овъ по нормали къ поверхности; будемъ имѣть:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0.$$

Кромѣ того, можно осью  $X$ -овъ распорядиться такъ, чтобы  $s = 0$ . Изъ этихъ предположеній и изъ написанныхъ выше уравненій слѣдуютъ:

$$\begin{aligned} dz &= 0, \quad d^2 z = r dx^2 + t dy^2, \quad d^2 x = 0, \quad d^2 y = 0, \\ d^3 x + r^2 dx^3 + r t dx dy^2 &= 0, \quad d^3 y + r t dx^2 dy + t^2 dy^3 = 0. \end{aligned}$$

Называемъ черезъ  $\alpha$  уголъ, образуемый съ осью  $X$ -овъ касательною къ дугѣ  $\sigma$ , проведенной черезъ начало, такъ что

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha;$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{ds^2} &= r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha, \\ \frac{d^3x}{ds^3} &= -r^2 \cos^3 \alpha - r t \cos \alpha \sin^2 \alpha, \\ \frac{d^3y}{ds^3} &= -r t \cos^2 \alpha \sin \alpha - t^2 \sin^3 \alpha, \end{aligned}$$

и, значить,

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma \cos \alpha - \frac{\sigma^3}{6} (r^2 \cos^3 \alpha + r t \cos \alpha \sin^2 \alpha), \\ \eta &= \sigma \sin \alpha - \frac{\sigma^3}{6} (r t \cos^2 \alpha \sin \alpha + t^2 \sin^3 \alpha), \\ \zeta &= \frac{\sigma^2}{2} (r \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Придавая  $\alpha$  всѣ значенія отъ 0 до  $2\pi$ , будемъ получать послѣдовательно, по этимъ формуламъ, всѣ точки опредѣленной выше замкнутой кривой. Обозначая теперь чертой  $\lambda$  дугу этой кривой, являющуюся функцией отъ  $\alpha$ , будемъ имѣть:

$$d\lambda = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}.$$

или же, принимая во вниманіе предыдущія значенія  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и замѣчая, что только  $\alpha$  — переменная,

$$d\lambda = d\alpha \sqrt{\sigma^2 - \frac{rt\sigma^4}{3}} = d\alpha \left( \sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \dots \right),$$

откуда

$$\lambda = \alpha \left( \sigma - \frac{rt\sigma^3}{6} + \dots \right) + \text{const.},$$

и если предположить, что дуга начинается въ точкѣ, для которой  $\alpha$  равно нулю, и оканчивается въ точкѣ, гдѣ  $\alpha$  равно  $2\pi$ , то наконецъ, для полной длины  $l$  кривой будемъ имѣть:

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi rt\sigma^3}{3},$$

или же, называя черезъ  $R$ ,  $R'$  оба радіуса кривизны,

$$l = 2\pi\sigma - \frac{\pi\sigma^3}{RR'}.$$

Такъ какъ это значеніе  $l$  не должно измѣняться, когда деформируемъ поверхность, то, очевидно, не должно измѣняться и произведеніе  $RR'$ .

Условіе, чтобы двѣ поверхности были наворачываемы (applicables) одна на другую

§ 730. Теоремы Гаусса недостаточно для рѣшенія вопроса, возможно или нѣтъ двѣ данныя поверхности навернуть одну на другую. Въ самомъ дѣлѣ, можно, каковы бы ни были двѣ поверхности, установить между ихъ точками такой законъ соотвѣтствія, по которому кривизны будутъ одинаковы въ соотвѣтственныхъ точкахъ; для этого достаточно принять за *соотвѣтственныя линіи* тѣ, которыя соотвѣтствуютъ на обѣихъ поверхностяхъ одному и тому же значенію произведенія главныхъ радіусовъ, и затѣмъ установить между точками этихъ двухъ линій такой произвольный законъ соотвѣтствія, чтобы каждая точка одной имѣла себѣ соотвѣтственную на другой. Кривизна будетъ одна и та же въ опредѣленныхъ такимъ образомъ соотвѣтственныхъ точкахъ, но обѣ поверхности не будутъ отъ этого наворачываемы одна на другую; дѣйствительно, Гауссъ намъ показалъ, что если одна поверхность наворачивается на другую, то кривизна одинакова въ соотвѣтственныхъ точкахъ; но обратное предложеніе не было доказано и оно не точно.

Было предложено нѣсколько методовъ для сужденія о томъ, будутъ ли двѣ поверхности наворачиваемы одна на другую, или нѣтъ. Методъ, который мы сейчасъ изложимъ, принадлежитъ О. Бонне.

Пусть  $u$  и  $v$  будутъ двѣ переменныя, въ функціи отъ которыхъ выражены точки первой поверхности, опредѣляющія точки второй поверхности, а  $u'$  и  $v'$  переменныя, опредѣляющія точки второй поверхности. Предположимъ, что выраженія разстояній между двумя бесконечно-близкими точками на той и на другой поверхности будутъ

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2, \\ ds'^2 &= A'du'^2 + 2B'du'dv' + C'dv'^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Постараемся, если возможно, установить между  $u, v, u', v'$  два такихъ соотношеній, чтобы изъ нихъ вытекало тождественно:

$$ds^2 = ds'^2.$$

Если выразить для каждой поверхности кривизну  $\frac{1}{RR'}$  въ функціи отъ переменныхъ, служащихъ для опредѣленія ея различныхъ точекъ, то, называя черезъ  $k$  и  $k'$  выраженія этихъ кривизнъ въ функціи отъ  $u$  и  $v$  для первой поверхности, отъ  $u'$  и  $v'$  для второй, мы должны, по теоремѣ Гаусса, имѣть для соотвѣтственныхъ точекъ соотношение:

$$k = k'. \quad (2)$$

Чтобы получить второе уравненіе, предположимъ, что на обѣихъ поверхностяхъ нанесены кривыя, служація геометрическими мѣстами точекъ, для которыхъ произведеніе  $RR'$  постоянно. Кривыя, соотвѣтствующія одному и тому же значенію этого произведенія на обѣихъ поверхностяхъ, содержатъ гомологичныя точки. Пусть  $A$  бу-

детъ точка одной изъ нихъ и  $A'$  — соотвѣтственная точка другой; очевидно нужно, чтобы при проведеніи на каждой поверхности равныхъ бесконечно-малыхъ линій, перпендикулярныхъ къ обѣимъ кривымъ, одной въ  $A$ , другой въ  $A'$ , ихъ концы  $M$ ,  $M'$  были соотвѣтственны и чтобы, слѣдовательно, кривизны обѣихъ поверхностей въ этихъ точкахъ были одинаковы.

Чтобы выразить это условіе уравненіемъ, назовемъ черезъ  $u$ ,  $v$  координаты точки  $A$ , черезъ  $u'$ ,  $v'$  координаты точки  $A'$ , черезъ  $u + du$ ,  $v + dv$ ,  $u' + du'$ ,  $v' + dv'$  координаты бесконечно-близкихъ точекъ, о которыхъ мы говорили; такъ какъ длины  $AM$ ,  $A'M'$  равны, то

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = A'du'^2 + 2B'du'dv' + C'dv'^2 \quad (3)$$

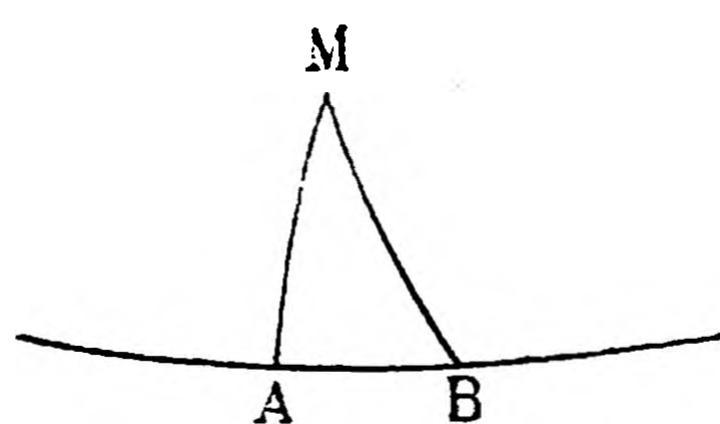
Кромѣ того, чтобы точка  $M$  соотвѣтствовала  $M'$ , координаты этихъ двухъ точекъ должны удовлетворять равенству  $k = k'$ ; слѣдовательно,

$$\frac{dk}{du} du + \frac{dk}{dv} dv = \frac{dk'}{du'} du' + \frac{dk'}{dv'} dv'.$$

Наконецъ, такъ какъ длина  $AM$  перпендикулярна къ линіи, уравненіе которой

$$k = \text{const.},$$

то если взять на этой линіи отъ точки  $A$  (черт. 104) бесконечно-малую длину  $AB$ ,



Черт. 104

изъ прямоугольника  $MAB$  будемъ имѣть:

$$\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AB}^2. \quad (4)$$

Координаты точки  $A$  названы черезъ  $u$  и  $v$ , координаты точки  $M$  — черезъ  $u + du$ ,  $v + dv$ . Пусть  $u + \delta u$ ,  $v + \delta v$  будутъ координаты точки  $B$ ; выражая при помощи уравненія (1) три члена уравненія (4), преобразовываемъ это послѣднее въ

$$A(du - \delta u)^2 + 2B(du - \delta u)(dv - \delta v) + C(dv - \delta v)^2 = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 + \\ + A\delta u^2 + 2B\delta u\delta v + C\delta v^2,$$

т.-е. въ

$$Adu\delta u + B(du\delta v + dv\delta u) + Cdv\delta v = 0. \quad (5)$$

Притомъ, такъ какъ измѣненіе  $k$  при переходѣ изъ точки  $A$  въ точку  $B$  равно нулю, то

$$\frac{dk}{du} \delta u + \frac{dk}{dv} \delta v = 0, \quad (6)$$



а исключение  $\delta u$  и  $\delta v$  изъ уравненій (5) и (6) даетъ:

$$\left(A \frac{dk}{dv} - B \frac{dk}{du}\right) du + \left(B \frac{dk}{dv} - C \frac{dk}{du}\right) dv = 0. \quad (7)$$

Полагаемъ

$$\frac{dk}{du} du + \frac{dk}{dv} dv = dk.$$

Возвышаемъ это уравненіе въ квадратъ и складываемъ почленно съ первымъ изъ уравненій (1), умноженнымъ предварительно на  $\lambda$ ; получаемъ:

$$\left(\frac{dk}{du} du + \frac{dk}{dv} dv\right)^2 + \lambda(A du^2 + 2B du dv + C dv^2) = dk^2 + \lambda ds^2. \quad (8)$$

Опредѣляемъ произвольное  $\lambda$  изъ условія, что первая часть есть квадратъ биннома вида  $P du + Q dv$ ; не трудно видѣть, что для этого нужно взять

$$\lambda = \frac{A \left(\frac{dk}{dv}\right)^2 - 2B \frac{dk}{du} \frac{dk}{dv} + C \left(\frac{dk}{du}\right)^2}{B^2 - AC}.$$

Тогда уравненіе (8) приметъ видъ

$$\frac{\left[\left(A \frac{dk}{dv} - B \frac{dk}{du}\right) du + \left(B \frac{dk}{dv} - C \frac{dk}{du}\right) dv\right]^2}{B^2 - AC} = dk^2 + \lambda ds^2, \quad (9)$$

и слѣдовательно, въ силу уравненія (7),

$$dk^2 + \lambda ds^2 = 0,$$

т.-е.

$$\frac{dk}{ds} = \sqrt{-\lambda} = \sqrt{\frac{A \left(\frac{dk}{dv}\right)^2 - 2B \frac{dk}{du} \frac{dk}{dv} + C \left(\frac{dk}{du}\right)^2}{AC - B^2}}. \quad (10)$$

Совершенно подобное же вычисленіе, относящееся къ другой поверхности, даетъ:

$$\frac{dk'}{ds'} = \sqrt{\frac{A' \left(\frac{dk'}{dv'}\right)^2 - 2B' \frac{dk'}{du'} \frac{dk'}{dv'} + C' \left(\frac{dk'}{du'}\right)^2}{A'C' - B'^2}}. \quad (11)$$

Какъ сказано,  $\frac{dk}{ds}$  и  $\frac{dk'}{ds'}$  должны быть равны; приравнивая поэтому вторыя части равенствъ (10) и (11) другъ другу, образуемъ уравненіе, которое вмѣстѣ съ уравненіемъ (2) дастъ возможность опредѣлить  $u'$  и  $v'$  въ функціи отъ  $u$  и  $v$ .

**§ 731.** Предыдущее вычисленіе можетъ быть выполнено для какихъ-угодно двухъ поверхностей, но изъ него не вытекаетъ, чтобы онѣ могли наворачиваться одна на другую; дѣйствительно, найденныя между  $u$  и  $v$ ,  $u'$  и  $v'$  уравненія устанавливаютъ между точками обѣихъ поверхностей такой законъ соответствія, по которому взаимно соответствуютъ линіи, опредѣляемыя однимъ и тѣмъ же значеніемъ произведенія  $KK'$ ,

и соответственными точками на этих линиях являются тѣ, для которыхъ разстояніе до смежной линіи одно и то же; но чтобы обѣ поверхности были наворачиваемы одна на другую, очевидно, нужно еще, чтобы соответственныя дуги двухъ линій были равны между собою. Можно было бы выразить это условіе, приравнивая другъ другу дифференціалы обѣихъ дугъ, но мы ограничимся сдѣланнымъ замѣчаніемъ, что необходимо, по крайней мѣрѣ, новое уравненіе; можно было бы въ каждомъ случаѣ всегда провѣрить, дѣлаютъ ли найденныя между  $u, v, u', v'$  соотношенія соответственныя дуги равными, давая тождественно:

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = A'du'^2 + 2B'du'dv' + C'dv'^2.$$

§ 732. Какова бы ни была система координатъ, выбранная для представленія точекъ поверхности, разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, координаты которыхъ  $u, v, u + du, v + dv$ , есть вида

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2,$$

гдѣ  $A, B, C$ —функции отъ  $u$  и  $v$ , видъ которыхъ зависитъ отъ поверхности и отъ выбора координатъ; необходимое и достаточное условіе, чтобы двѣ поверхности могли наворачиваться одна на другую, заключается въ томъ, чтобы можно было, посредствомъ надлежащаго выбора координатъ, сдѣлать тождественными значенія  $ds^2$  такъ, чтобы переменныя  $u$  и  $v$ , опредѣляющія точки первой поверхности, опредѣляли также точки и второй поверхности.

Это равенство элементовъ, разъ установленное, очевидно, не зависитъ отъ выбора координатъ, подъ условіемъ, понятно, что точки обѣихъ поверхностей остаются связанными точно такимъ же образомъ, какъ и раньше.

§ 733. Укажемъ здѣсь на нѣкоторые выводы изъ предыдущаго, относящіеся къ виду выраженія разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками въ различныхъ замѣчательныхъ частныхъ случаяхъ.

Когда кривыя, соответствующія постояннымъ значеніямъ координатъ  $u$  и  $v$ , пересѣкаются подъ прямымъ угломъ на поверхности, выраженіе  $ds^2$  есть вида:

$$ds^2 = Adu^2 + Bdv^2.$$

Доказательство, совершенно подобное доказательству, данному въ § 124-мъ, вытекаетъ изъ того, что кривыя, соответствующія значеніямъ  $u, u + du, v, v + dv$  координатъ, образуютъ въ этомъ случаѣ прямоугольникъ, въ которомъ квадратъ діагонали долженъ быть равенъ суммѣ квадратовъ сторонъ.

§ 734. Когда линіи, соответствующія постоянному значенію переменной, геодезическія, а линіи второй системы пересѣкаютъ ихъ подъ прямымъ угломъ, то коэффициентъ  $B$  является независимымъ отъ  $u$ , и мы имѣемъ;

$$ds^2 = Adu^2 + \varphi(v)dv^2. \quad (1)$$

Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, что если линіи,—соответствующія постояннымъ значеніямъ  $u$ , —геодезическія, а соответствующія постояннымъ значеніямъ  $v$  пересѣ-

каютъ ихъ подъ прямымъ угломъ, то двѣ какія-угодно линіи второй системы выдѣляютъ равныя дуги на всѣхъ линіяхъ первой системы; предполагая же

$$ds^2 = Adu^2 + Bdv^2 \quad (2)$$

и рассматривая двѣ линіи, соотвѣтствующія значеніямъ  $v$  и  $v + dv$  параметра  $v$ , видимъ, что разстояніе между ними, отсчитанное по одной изъ геодезическихъ линій, соотвѣтствующей какому-нибудь значенію  $u$ , получится изъ формулы (2), если предположить въ ней  $du = 0$ ; формула приметъ видъ

$$ds^2 = Bdv^2,$$

и такъ какъ это разстояніе не должно зависѣть отъ  $u$ , то  $B$ , какъ мы и предсказывали, есть функція отъ одной только перемѣнной  $v$ . Можно измѣнить перемѣнную безъ измѣненія системы линій, отвѣчающихъ постояннымъ значеніямъ координатъ, и положить

$$\sqrt{B}dv = dv',$$

гдѣ  $v'$ —функція отъ одной только перемѣнной  $v$ ; тогда получаемъ формулу

$$ds^2 = dv'^2 + Adu^2,$$

въ которой перемѣнная  $v'$  представляетъ, очевидно, длину, отсчитанную по геодезической линіи отъ одной изъ ортогональныхъ траекторій, произвольно выбранной; коэффициентъ  $A$  есть функція отъ  $u$  и отъ  $v'$ , видъ которой измѣняется вмѣстѣ съ родомъ поверхности.

**§ 735.** Предложеніе, обратное предыдущему, также справедливо. Когда квадратъ  $ds^2$  разстоянія между двумя смежными точками есть вида

$$ds^2 = Adu^2 + \varphi(v)dv^2, \quad (1)$$

линіи, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $u$ , геодезическія. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы (1) вытекаетъ, что разстоянія между двумя кривыми, соотвѣтствующими значеніямъ  $v$  и  $v + dv$  перемѣнной, не зависятъ отъ  $u$  и что, слѣдовательно, кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $u$ , таковы, что ихъ ортогональныя траекторіи выдѣляютъ на нихъ равныя дуги; отсюда заключаемъ (§ 719), что эти кривыя—геодезическія линіи.

**§ 736.** Отмѣтимъ особенно тотъ случай, когда рассматривается поверхность вращенія и координатами для представленія точки служатъ: съ одной стороны, уголъ  $\omega$ , образуемый соотвѣтственнымъ меридіаномъ съ неподвижнымъ меридіаномъ, а съ другой стороны, длина  $\sigma$  дуги меридіана, взятой между рассматривасмою точкою и неподвижною параллелью. Мы видѣли (§ 130), что квадратъ разстоянія  $ds^2$  въ этомъ случаѣ принимаетъ видъ:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma)d\omega^2. \quad (1)$$

Обратно, если выраженіе квадрата  $ds^2$  есть вида

$$ds^2 = dv^2 + \varphi(v)d\omega^2,$$

то поверхность наворачивается на надлежащимъ образомъ выбранную поверхность вращенія. Опредѣленіе меридіана, которому соотвѣтствуетъ данный видъ функціи  $\varphi$ , есть задача интегральнаго исчисленія; здѣсь мы не будемъ ея вовсе касаться.

§ 737. Приведемъ, однако, два замѣчательныхъ примѣра поверхностей, наворачиваемыхъ на поверхности вращенія.

Косой геликоидъ съ направляющею плоскостью наворачивается на поверхность вращенія, меридіаномъ которой служитъ цѣпная линія.

Беремъ за ось  $z$ -овъ ось цилиндра, а за оси  $x$ -овъ и  $y$ -овъ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра основанія; косой геликоидъ съ направляющею плоскостью будетъ представленъ уравненіями

$$\left. \begin{aligned} z &= m\omega, \\ x &= r \cos \omega, \\ y &= r \sin \omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

гдѣ  $r$  и  $\omega$ —двѣ переменныя, которыя не трудно было бы исключить для составленія уравненія поверхности, но это уравненіе не принесло бы намъ пользы. Мы рассмотримъ  $\omega$  и  $r$ , какъ двѣ переменныя, служащія для опредѣленія точекъ геликоида; постоянному значенію  $r$  соотвѣтствуетъ винтовая линія, а постоянному значенію  $\omega$ —прямолинейная производящая, пересѣкающая всѣ винтовыя линіи подъ прямымъ угломъ.

Обозначая, какъ обычно, черезъ  $ds$  разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, имѣемъ:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

принимая во вниманіе уравненія (1), находимъ:

$$ds^2 = (m^2 + r^2)d\omega^2 + dr^2. \quad (2)$$

Это выраженіе имѣетъ видъ, соотвѣтствующій поверхности вращенія. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли (§ 736), что если  $\sigma$  обозначаетъ дугу меридіана и  $\omega$ —уголъ, образуемый имъ съ неподвижнымъ меридіаномъ, то на поверхности вращенія имѣемъ:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi(\sigma)d\omega^2. \quad (3)$$

Обѣ формулы (2) и (3) дѣлаются тождественными при  $\sigma = r$  и

$$\varphi(\sigma) = m^2 + \sigma^2.$$

Но  $\varphi(\sigma)$  есть квадратъ радіуса параллели, т.-е. абсциссы точки, соотвѣтствующей дугѣ  $\sigma$ . Если обозначить эту абсциссу черезъ  $x$ , то достаточно найти такую кривую, чтобы

$$x = \sqrt{m^2 + \sigma^2}, \quad (4)$$

т.-е. чтобы

$$\sigma = \sqrt{x^2 - m^2};$$

отсюда выводимъ:

$$d\sigma = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - m^2}}. \quad (5)$$

Называя черезъ  $y$  вторую координату, лежащую въ основаніи, имѣемъ:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2,$$

и уравненіе (5) принимаетъ видъ

$$dx^2 + dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{x^2 - m^2},$$

или

$$dy^2 = \frac{m^2 dx^2}{x^2 - m^2},$$

$$dy = \frac{m dx}{\sqrt{x^2 - m^2}},$$

откуда

$$y = ml(x + \sqrt{x^2 - m^2}) + C.$$

Принимая произвольную постоянную  $C$  равною  $-lm$ , изъ этого уравненія выводимъ:

$$x + \sqrt{x^2 - m^2} = me^{\frac{y}{m}}$$

и, слѣдовательно,

$$x - \sqrt{x^2 - m^2} = me^{-\frac{y}{m}},$$

$$x = \frac{m}{2} \left( e^{\frac{y}{m}} + e^{-\frac{y}{m}} \right);$$

это — уравненіе цѣпной линіи, которая своимъ вращеніемъ вокругъ оси  $y$ -овъ произведетъ поверхность, навертываемую на косою геликоидъ съ направляющею плоскостью.

**§ 738.** Буръ (Bour) обобщилъ предыдущую теорему, доказавъ, что всякая *геликоидальная* поверхность навертывается на поверхность вращенія.

*Геликоидальною поверхностью* называютъ поверхность, производимую профилемъ какого-угодно вида, расположеннымъ въ плоскости, проведенной нормально къ цилиндру вращенія черезъ производящую, и движущимся безъ измѣненія вида такъ, чтобы всѣ точки описывали одновременно винтовые линіи, также расположенныя на цилиндрахъ съ тою же осью.

Беря за ось  $z$ -овъ ось цилиндра, а за оси  $x$ -овъ и  $y$ -овъ два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра основанія, можно, очевидно, представить геликоидальную поверхность уравненіями

$$x = \rho \cos \omega,$$

$$y = \rho \sin \omega,$$

$$z = m\omega + \varphi(\rho),$$



гдѣ видѣ функціи  $\varphi(\rho)$  опредѣляетъ кривую, служащую профилемъ. Переменныя  $\rho$  и  $\omega$  опредѣляютъ здѣсь на поверхности двѣ системы кривыхъ: однѣ изъ нихъ, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $\rho$ , представляютъ собою винтовыя линіи; другія, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $\omega$ , кривыя, всѣ наложимыя одна на другую, по которымъ поверхность пересѣкается меридіональными плоскостями цилиндра. Эти двѣ системы не ортогональны, вслѣдствіе чего мы введемъ новую переменную  $u$ —параметръ кривыхъ, пересѣкающихъ винтовыя линіи подъ прямымъ угломъ. Разсматривая  $\omega$ , какъ функцію отъ  $\rho$  и  $u$ , будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \omega d\rho - \rho \sin \omega \frac{d\omega}{d\rho} d\rho - \rho \sin \omega \frac{d\omega}{du} du, \\ dy &= \sin \omega d\rho + \rho \cos \omega \frac{d\omega}{d\rho} d\rho + \rho \cos \omega \frac{d\omega}{du} du, \\ dz &= \varphi'(\rho) d\rho + m \frac{d\omega}{du} du + m \frac{d\omega}{d\rho} d\rho; \end{aligned}$$

отсюда выводимъ выраженіе квадрата  $ds^2$  разстоянія между двумя безконечно-близкими точками поверхности:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\rho^2 \left[ 1 + \rho^2 \left( \frac{d\omega}{d\rho} \right)^2 + \varphi'(\rho)^2 + m^2 \left( \frac{d\omega}{d\rho} \right)^2 + 2m\varphi'(\rho) \frac{d\omega}{d\rho} \right] + du^2 \left[ \rho^2 \left( \frac{d\omega}{du} \right)^2 + m^2 \left( \frac{d\omega}{du} \right)^2 \right] + \\ &+ 2d\rho du \left[ \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho} \frac{d\omega}{du} + m \frac{d\omega}{du} \varphi'(\rho) + m^2 \frac{d\omega}{d\rho} \frac{d\omega}{du} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы кривыя, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $u$ , пересѣкали ортогонально винтовыя линіи, соотвѣтствующія постояннымъ значеніямъ  $\rho$ , нужно, чтобы членъ съ  $du d\rho$  исчезъ. Поэтому полагаемъ

$$\frac{d\omega}{du} \left[ \rho^2 \frac{d\omega}{d\rho} + m\varphi'(\rho) + m^2 \frac{d\omega}{d\rho} \right] = 0;$$

здѣсь  $\frac{d\omega}{du}$  не можетъ быть нулемъ, потому что невозможно, чтобы  $\omega$  зависѣло отъ одной только переменной  $\rho$ ; значитъ, нужно приравнять нулю второй множитель; отсюда мы выведемъ значеніе  $\omega$  въ функціи отъ  $\rho$ , и такъ какъ  $\omega$  входитъ только черезъ его производную  $\frac{d\omega}{d\rho}$ , то можно къ нему прибавить произвольную функцію отъ  $u$ . Беремъ эту функцію равною  $ku$ , гдѣ  $k$  постоянная;  $\frac{d\omega}{du}$  будетъ тогда равно  $k$ , и выраженіе  $ds^2$  приметъ видъ

$$ds^2 = G d\rho^2 + k^2 du^2 (\rho^2 + m^2),$$

гдѣ коэффиціентъ  $G$  содержитъ только  $\rho$ ; обозначая его черезъ  $[\psi(\rho)]^2$ , будемъ имѣть:

$$ds^2 = [\psi(\rho) d\rho]^2 + k^2 du^2 (\rho^2 + m^2).$$

Если положить  $\psi(\rho) d\rho = dv$ , то  $\rho$  будетъ функціею отъ  $v$ , и выраженіе  $ds^2$  приметъ видъ

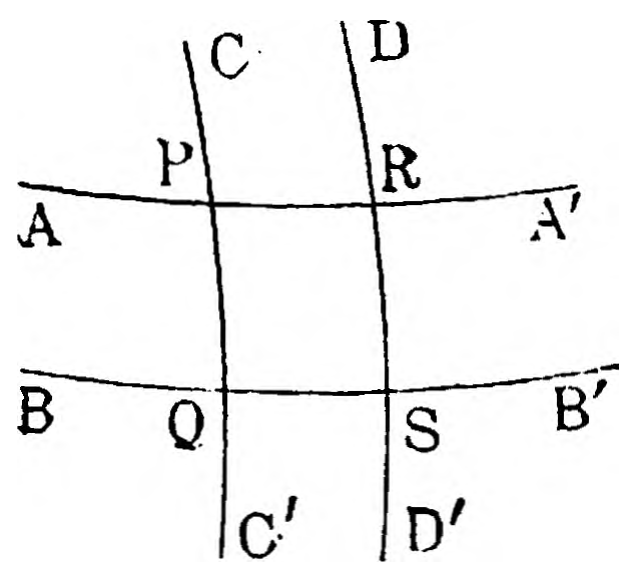
$$ds^2 = dv^2 + F(v) du^2,$$

соотвѣтствующій (§ 130) поверхности вращенія.

## Кривизна ортогональных траекторій на какой-угодно поверхности

§ 739. Когда на какой-нибудь поверхности рассматриваются двѣ системы линій, ортогонально пересѣкающихся и разбивающихъ поверхность на бесконечно-малые прямоугольники, то между геодезическими кривизнами линій обѣихъ системъ,—или, что приводитъ къ тому же самому, между бесконечно-малыми сторонами послѣдовательныхъ прямоугольниковъ,—существуютъ соотношенія, аналогичныя выведеннымъ раньше (§§ 507 и 556) для плоскихъ и сферическихъ системъ.

Пусть  $AA'$ ,  $BB'$  (черт. 105) будутъ двѣ бесконечно-близкія кривыя первой си-



Черт. 105

стемы, соответствующія значеніямъ  $\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  параметра  $\alpha_2$ , входящаго въ ихъ уравненіе общаго вида, и  $CC', DD'$ —двѣ бесконечно-близкія кривыя второй системы, соответствующія значеніямъ  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1$  ихъ параметра и образующія съ двумя первыми бесконечно-малый прямоугольникъ  $PQRS$ ; сторона  $PR$ ,—т.-е. разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками, соответствующими одному и тому же значенію параметра  $\alpha_2$ ,—очевидно, пропорціональна  $d\alpha_1$ , а сторона  $PQ$  пропорціональна  $d\alpha_2$ ; поэтому, обозначая черезъ  $E$  и  $G$  двѣ функціи отъ  $\alpha_1$  и отъ  $\alpha_2$ , которыя мы рассматриваемъ, какъ извѣстныя, полагаемъ:

$$PQ = d\alpha_2 \sqrt{G},$$

$$PR = d\alpha_1 \sqrt{E};$$

квадратъ разстоянія между двумя бесконечно-близкими точками, такими, какъ  $P$  и  $S$ , выразится тогда черезъ

$$ds^2 = E d\alpha_1^2 + G d\alpha_2^2,$$

и достаточно будетъ вычислить это разстояніе, чтобы знать функціи  $E$  и  $G$ . Геодезическія кривизны линій  $PQ$  и  $PR$  можно вычислить посредствомъ теоремы, доказанной въ § 719-мъ.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{RS - PQ}{PR \cdot PQ},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{QS - PR}{PR \cdot PQ};$$

замѣняемъ  $PR$  и  $PQ$  ихъ значеніями и замѣчаемъ, что  $(RS - PQ)$  есть дифференціалъ отъ  $PQ$  по  $\alpha_1$  и дается формулою

$$\frac{dPQ}{d\alpha_1} d\alpha_1 = d\alpha_1 \frac{d}{d\alpha_1} (d\alpha_2 \sqrt{G}) = d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}.$$

Точно такъ же увидимъ, что  $(QS - PR)$  есть дифференціалъ отъ  $PR$  и равенъ

$$d\alpha_1 d\alpha_2 \frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}.$$

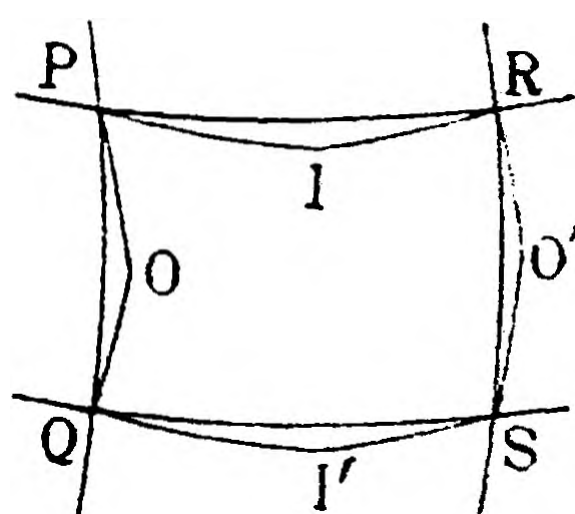
Слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}}{\sqrt{E} \sqrt{G}},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}}{\sqrt{E} \sqrt{G}}.$$

§ 740. Поищемъ, во что обращаются, въ случаѣ какой-угодно системы ортогональныхъ кривыхъ, соотношенія, найденныя (§ 558) для системы сферическихъ кривыхъ.

Пусть  $PQRS$  (черт. 106) будетъ безконечно-малый прямоугольникъ, составленный кривыми двухъ системъ, соответствующими значеніямъ  $\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1$  первого параметра, и значеніямъ  $\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2$  второго параметра. Ведемъ въ вершинахъ  $P, Q, R, S$  геодезическія линіи, касательныя къ сторонамъ этого прямоугольника: со-



Черт. 106

ставится восьмиугольникъ  $QOPIRO'SI'$ , полная кривизна котораго измѣряется (§ 728) избыткомъ суммы его угловъ надъ двѣнадцатю прямыми углами; называя же черезъ  $\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1$  углы смежности дугъ  $PR, QS$  и черезъ  $\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2$  углы смежности дугъ  $PQ, RS$  и обозначая каждый уголъ восьмиугольника буквою, помѣщенною въ его вершинѣ, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} O &= \pi + \varepsilon_2, & I &= \pi + \varepsilon_1, \\ O' &= \pi - \varepsilon_2 - d\varepsilon_2, & I' &= \pi - \varepsilon_1 - d\varepsilon_1; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

слѣдовательно, кривизна восьмиугольника измѣрится выраженіемъ

$$-d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2.$$

Съ другой стороны, эта кривизна равна (§ 722) площади  $PQ \cdot PR$ , раздѣленной на произведение радіусовъ кривизны; значитъ,

$$d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = - \frac{PQ \cdot PR}{R_1 R_2}. \quad (2)$$

Но, обозначая черезъ  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$  геодезическія кривизны обѣихъ сторонъ, имѣемъ:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_2}{PQ},$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\varepsilon_1}{PR},$$

и, слѣдовательно, уравненіе (2) можно написать въ видѣ

$$\frac{d\left(\frac{PQ}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d\left(\frac{PR}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 = - \frac{PQ \cdot PR}{R_1 R_2}, \quad (3)$$

т.-е. въ видѣ

$$PQ \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} d\alpha_1 + \frac{1}{\rho_1} \frac{dPQ}{d\alpha_1} d\alpha_1 + PR \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} d\alpha_2 + \frac{1}{\rho_2} \frac{dPR}{d\alpha_2} d\alpha_2 = - \frac{PQ \cdot PR}{R_1 R_2}; \quad (4)$$

имѣя же

$$PR = d\alpha_1 \sqrt{E}, \quad PQ = d\alpha_2 \sqrt{G},$$

и, значитъ,

$$\frac{dPR}{d\alpha_2} = d\alpha_1 \frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2},$$

$$\frac{dPQ}{d\alpha_1} = d\alpha_2 \frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1},$$

т.-е., согласно найденнымъ значеніямъ для  $\frac{1}{\rho_1}$  и  $\frac{1}{\rho_2}$ ,

$$\frac{dPR}{d\alpha_2} = d\alpha_1 \sqrt{E} \sqrt{G} \frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{dPQ}{d\alpha_1} = d\alpha_2 \sqrt{E} \sqrt{G} \frac{1}{\rho_2},$$

заключаемъ, что уравненіе (4) перейдетъ, по сокращеніи на множитель  $d\alpha_1 d\alpha_2$ , въ

$$\sqrt{G} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{d\alpha_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \sqrt{E} \sqrt{G} + \sqrt{E} \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{d\alpha_2} + \frac{1}{\rho_2^2} \sqrt{E} \sqrt{G} = - \frac{\sqrt{E} \sqrt{G}}{R_1 R_2}; \quad (5)$$

наконецъ, дѣля его на  $\sqrt{E} \sqrt{G}$  и принимая во вниманіе равенства

$$PR = ds_2 = d\alpha_1 \sqrt{E},$$

$$PQ = ds_1 = d\alpha_2 \sqrt{G},$$

пишемъ:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho_1}\right)}{ds_2} + \frac{d\left(\frac{1}{\rho_2}\right)}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = -\frac{1}{R_1 R_2}. \quad (6)$$

Эта формула можетъ быть преобразована совершенно также, какъ аналогичная формула § 558-го; она дастъ, для послѣдовательныхъ сторонъ прямоугольниковъ, на которые можно разбить какую-угодно поверхность, соотношение, вполне подобное соотношенію, найденному (§ 559) въ случаѣ сферы, въ которомъ только квадратъ радіуса сферы будетъ замѣненъ произведеніемъ радіусовъ кривизны данной поверхности.

§ 741. Изъ предыдущихъ формулъ можно легко вывести выраженіе кривизны  $\frac{1}{R_1 R_2}$  въ функціи отъ коэффициентовъ  $E$  и  $G$  и ихъ производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (3) можно написать въ видѣ

$$\frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \sqrt{EG}}{R_1 R_2} = -\frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} \frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1} \right) d\alpha_1 - \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} \frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2} \right) d\alpha_2,$$

или же, опуская множитель  $d\alpha_1 d\alpha_2$ , въ видѣ

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = -\frac{d}{d\alpha_1} \left( \frac{\frac{d\sqrt{G}}{d\alpha_1}}{\sqrt{E}} \right) - \frac{d}{d\alpha_2} \left( \frac{\frac{d\sqrt{E}}{d\alpha_2}}{\sqrt{G}} \right).$$

Эта формула весьма важна.

Если линіи, соотвѣтствующія постоянному значенію параметра  $\alpha_2$ , геодезическія, то, выбирая надлежащимъ образомъ  $\alpha_1$ , имѣемъ (§ 734):

$$ds^2 = d\alpha_1^2 + G d\alpha_2^2;$$

$E$  равно тогда единицѣ, и формула принимаетъ видъ

$$\frac{\sqrt{G}}{R_1 R_2} = -\frac{d^2(\sqrt{G})}{d\alpha_1^2}.$$

КОНЕЦЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНАГО ИСЧИСЛЕНІЯ.



## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

Абель (Abel). — Теорема о сходимости рядовъ . . . . .	§§ 233	Абель (Abel). — Доказательство формулы	§§
— Теорема о непрерывности рядовъ, расположенныхъ по степенямъ переменнѣй	265	$\varphi(x+a) = \varphi(x) + a\varphi'(x+b) + \frac{a(a-2b)}{1 \cdot 2} \varphi''(x+2b) + \dots$	323

### Б

Безконечно-малая. — Определеіе безконечно-малой . . . . .	1	Безконечно-малая. — Въ каждой точкѣ плоской кривой существуетъ касательный къ ней кругъ, приближающійся къ ней бесконечно болѣе касательной прямой . . . . .	10
— Безконечно-малыя различныхъ порядковъ . . . . .	1	— Необходимое и достаточное условіе, чтобы двѣ бесконечно-малыя могли замѣнять одна другую при разысканіи предѣла отношенія или суммы . . . . .	11 и 12
— Безконечно-малое приращеніе функций того же порядка, что и приращеніе переменной . . . . .	2	— Условіе, чтобы двѣ смежныя точки могли замѣнять одна другую при разысканіи касательной . . . . .	13
— Если координаты точекъ кривой выражены въ функции отъ переменной $\alpha$ , то разстояніе двухъ бесконечно-близкихъ точекъ кривой того же порядка, что и разность соотвѣтственныхъ значеній $\alpha$ . . . . .	4	— Плоскость, касательная къ поверхности, находится на бесконечно-маломъ разстояніи второго порядка отъ всякой точки той же поверхности, бесконечно-близкой къ точкѣ касанія . . . . .	16
— Если каждой точкѣ одной кривой соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка другой кривой, то разстояніе между двумя смежными точками на одной изъ нихъ того же порядка, что и разстояніе между соотвѣтственными точками другой кривой . . . . .	5	— Условіе, чтобы одна точка могла замѣнять другую при опредѣленіи касательной плоскости . . . . .	17
— Если прямая линія перемѣщается по непрерывному закону, то уголъ между двумя бесконечно-близкими положеніями того же порядка, что и соотвѣтственное измѣненіе параметра . . . . .	6	— Разность между дугою и ея хордою есть бесконечно-малая третьяго порядка . . . . .	19
— Если каждой точкѣ одной поверхности соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка другой поверхности, то разстояніе между двумя смежными точками на одной изъ нихъ того же порядка, что и разстояніе между соотвѣтственными точками на другой поверхности . . . . .	7	— Безконечно-малое приращеніе функций, выраженное въ видѣ ряда . . . . .	276
— Разстояніе кривой до ея касательной, на бесконечно-маломъ разстояніи отъ точки касанія, есть бесконечно-малая второго порядка. . . . .	8	— Безконечно-малое приращеніе функций отъ двухъ переменныхъ . . . . .	393
		— То, что называется главнымъ значеніемъ функции $\varphi(x)$ , бесконечно малой вмѣстѣ съ $x$ . . . . .	548
		— Главное значеніе производной отъ бесконечно-малой есть производная отъ главнаго значенія. . . . .	549
		— Разстояніе кривой до ея соприкасающейся плоскости . . . . .	608
		— Разстояніе между двумя бесконечно-близкими касательными . . . . .	609

Бернулли Яковъ (Jacques Bernoulli). — Его доказательство разложения $\frac{1}{(1-x)^n}$ , когда $n$ —цѣлое . . . . .	§§	Бине (Binet). — Изящное приложение теоріи производящихъ функций . . . . .	§§
— Данный имъ примѣръ опасности отъ расходящихся рядовъ . . . . .	228	Бинома степень. — Изученіе $(1+z)^m$ при $z$ мнимомъ . . . . .	342
— Рядъ Бернулли . . . . .	309	— Разложение $(1+z)^m$ при $z$ мнимомъ . . . . .	376
— Приложение къ числовому опредѣленію $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ . . . . .	310	— Замѣчательные ряды, выводимые изъ него . . . . .	384
Бернуллиевы числа. — Ихъ опредѣленіе . . . . .	305	Боннэ (O. Bonnet). — Теорема, относящаяся къ производной бесконечно-малой функции . . . . .	45 п 548
— Ихъ введеніе въ разложение $\frac{x}{e^x + 1}$ . . . . .	305	— Обратная теорема . . . . .	549
— Выраженіе $n$ -го числа Бернулли, данное Гершелемъ (Herschel). . . . .	345	— Приложенія къ изученію кривыхъ линий . . . . .	549 п 551
— Численное значеніе девяти первыхъ Бернуллиевыхъ чиселъ . . . . .	347	— Теоремы, относящіяся къ нѣкоторымъ бесконечно-малымъ величинамъ . . . . .	608 п 609
— Они вводятся въ выраженіе суммы одинаковыхъ степеней цѣлыхъ чиселъ . . . . .	348	— Методъ для опредѣленія эволютъ . . . . .	623
— Разсмотрѣніе суммы		— Произведеніе радіусовъ кривизны кривой поверхности . . . . .	656
$1 + 2^p + \dots + n^p = \varphi_p(n)$ , . . . . .		Борхардтъ (Borchardt). — Замѣчательное введеніе дифференціального уравненія въ одну арифметическую задачу . . . . .	214
какъ непрерывной функции отъ $n$ . 349 п 353		Букэ (Bouquet). — Важное замѣчаніе, относящееся къ разстоянію между двумя бесконечно-близкими касательными . . . . .	573
— Выраженіе числа $B_n$ подъ видомъ		Буль (Boole). — Замѣчательное выраженіе разности $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ . . . . .	334
$B_n = \frac{1.2.3\dots 2n}{2^{n-1}n!} \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots\right)$ . . . . .	411	Бурманъ (Burmann). — Рядъ Бурмана . . . . .	321
		— Приложение къ разложенію $e^{ax}$ въ рядъ по степенямъ $xe^{bx}$ . . . . .	322

## В

Валлисъ (Wallis). — Формула Валлиса для выраженія числа $\pi$ . . . . .	416	$\varphi(x) = \int \frac{\varphi(z)(z-a)}{(x-z)[(z-a)]}$ . . . . .	
Вогнутость и выпуклость плоской кривой . . . . .	492	сохраняетъ конечное значеніе . . . . .	439
Возврата точка. — См. <i>Особенныя точки</i> . . . . .		— Приложение предыдущей теоремы къ разложенію рациональныхъ дробей . . . . .	441
— Радіусъ кривизны обращается въ нуль въ точкѣ возврата перваго рода . . . . .	501 п 502	— Сумма вычетовъ рациональной функции . . . . .	442 п 443
Вычетъ. — Опредѣленіе вычета функции . . . . .	434	— Измѣненіе въ вычетѣ независимой переменнѣй . . . . .	444
— Не всякая функция, обращающаяся въ бесконечность, имѣетъ соотвѣтственный вычетъ . . . . .	435	— Приложение теоріи вычетовъ къ доказательству нѣкоторыхъ рядовъ . . . . .	447
— Вычетъ данной функции для значенія переменнѣй, обращающейся въ бесконечность . . . . .	436	— Приложение теоріи вычетовъ къ вычисленію симметрическихъ функций корней уравненія . . . . .	448
— Обозначенія вычетовъ . . . . .	438	— Распространеніе на случай двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными . . . . .	450
— Если $\varphi(x)$ обращается въ бесконечность при $x=a$ , то разность			

## Г

Гауссъ (Gauss). — Правила сходимости одного класса рядовъ . . . . .	430	Геодезическая линия (ligne minima ou géodésique). — Соприкасающаяся плоскость геодезической линіи на поверхности нормальна къ поверхности . . . . .	631
— Разложеніе въ непрерывную дробь ряда $1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots$ . . . . .	720	— Касательныя къ ряду геодезическихъ линій нормальны къ одной и той же поверхности . . . . .	661
— Опредѣленіе кривизны поверхности . . . . .	724	Гершель (Herschel). — Теорема Гершеля, относящаяся къ разложенію $\varphi(e^x)$ . . . . .	345
— При развертываніи поверхности кривизна не измѣняется . . . . .	741		
— Выраженіе произведенія радіусовъ кривизны . . . . .			

Дифференціалъ.—Опредѣленіе дифференціала функціи отъ одной переменнѣй . . . . .	46
— Геометрическое истолкованіе дифференціала . . . . .	47
— Преимущество, которое можетъ представить употребленіе дифференціаловъ передъ употребленіемъ производныхъ . . . . .	48
— Это преимущество особенно выдѣляется, когда разсматриваютъ болѣе двухъ переменныхъ . . . . .	49
— Определеніе дифференціала функціи отъ нѣсколькихъ переменныхъ . . . . .	53
— Дифференціалъ можетъ замѣнять приращеніе функціи . . . . .	53, 54, 55 и 56
— Безконечно-малыя измѣненія нѣсколькихъ переменныхъ, связанныя уравненіемъ, связаны всегда уравненіемъ первой степени . . . . .	57
— Дифференціалъ площади, взятой на плоскости . . . . .	114
— Въ полярныхъ координатахъ . . . . .	116
— Дифференціалъ дуги кривой . . . . .	118
— Въ полярныхъ координатахъ . . . . .	120
— Дифференціалъ дуги неплоской кривой, отнесенной къ тремъ полярнымъ координатамъ . . . . .	121
— Дифференціалъ дуги кривой въ системѣ криволинейныхъ координатъ . . . . .	123
— Дифференціалъ дуги кривой, нанесенной на поверхности . . . . .	126
Опредѣленіе дифференціаловъ порядка выше перваго . . . . .	133
— Вліяніе независимой переменнѣй на дифференціалы порядка выше перваго . . . . .	138
Дифференціалы.—Опредѣленіе дифференціаловъ различныхъ порядковъ для функцій отъ нѣсколькихъ переменныхъ . . . . .	162
— Распространеніе формулъ . . . . .	163
— Представленіе дифференціала посредствомъ символической формулы . . . . .	162 и 163
— Случай, когда переменныя не независимыя . . . . .	164
— Дифференціалы функціи отъ нѣсколькихъ не независимыхъ переменныхъ . . . . .	164
— Вліяніе независимой переменнѣй на дифференціалы порядка выше перваго . . . . .	167
Дифференціалы порядка выше перваго.— $\Delta^n y$ и $d^n y$ —двѣ безконечно-малыя $n$ -го порядка, отношеніе которыхъ въ предѣлѣ равно 1. . . . .	137
— Дифференціалы высшаго порядка для функцій отъ одной переменнѣй . . . . .	133 и 139
— Дифференціалы $n$ -го порядка для функцій отъ двухъ переменныхъ; символическое представленіе . . . . .	162
Дробь.—Истинное значеніе дроби, принимающей видъ $\frac{0}{0}$ . . . . .	451
— Случай, когда дробь содержитъ двѣ переменныя . . . . .	452
— Дробь, принимающая видъ $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	453 и 454

## Д

Дроби непрерывныя.—Ихъ опредѣленіе . . . . .	419
— Преобразованіе ряда	
$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} + \frac{1}{A_3} - \dots$	
въ непрерывную дробь . . . . .	420
— Приложение къ $l2$ и къ $\frac{\pi}{4}$ . . . . .	421
— Преобразованіе ряда вида	
$B_1 - B_2 + B_3 - \dots$ . . . . .	422
— Приложение къ $1 - qz - q^2 z^2 - \dots - q^{n^2} z^n$ . . . . .	423
— Преобразованіе ряда	
$\frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \dots$ . . . . .	424
— Разложеніе $(1 - \frac{1}{e})$ въ непрерывную дробь . . . . .	425
— Разложеніе функцій въ непрерывную дробь; общій методъ . . . . .	426
— Разложеніе $(1+x)^m$ въ непрерывную дробь . . . . .	427
— Разложеніе $\arctang x$ . . . . .	428
— Преобразованіе ряда	
$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{z(z+1)} + \dots$ . . . . .	429
— Его выводятъ изъ разложенія $\frac{e-1}{e}$ въ непрерывную дробь . . . . .	429
— Преобразованіе въ непрерывную дробь ряда	
$1 + \frac{a \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a(a+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ . . . . .	430
— Приложение къ $(1+x)^m$ . . . . .	431
— Приложение къ $l(1+x)$ . . . . .	432
— Приложение къ $e^x$ . . . . .	433
Дуга кривой.—Опредѣленіе длины дуги кривой . . . . .	18
— Разность между дугою и ея хордою есть безконечно-малая третьяго порядка . . . . .	19
— Длина дуги циклоиды . . . . .	20
— Длина дуги эволюты . . . . .	22
— Дифференціалъ дуги кривой . . . . .	118
— Дифференціалъ дуги циклоиды . . . . .	119
— Дифференціалъ дуги кривой въ полярныхъ координатахъ . . . . .	120
— Дифференціалъ дуги неплоской кривой, отнесенной къ полярнымъ координатамъ . . . . .	121
— Дифференціалъ дуги кривой въ криволинейныхъ координатахъ . . . . .	123
— Разность между безконечно-малою дугою и ея хордою . . . . .	517 и 551
— Разность касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ безконечно-малой дуги и оканчивающихся въ точкѣ ихъ встрѣчи . . . . .	519
— Разность между дугою и суммою касательныхъ въ ея концахъ . . . . .	552



Дюгамель (Duhamel). — Замѣчаніе, относя- щееся къ непрерывности рядовъ . . . . .	§§ 264	Дюпенъ Шарль (Charles Dupin). — Важная теорема, относящаяся къ линіямъ кри- визны ортогональныхъ поверхностей . . . . .	§§ 681
Дюпенъ Шарль (Charles Dupin). — Что на- зывается индикатрисою. . . . .	638	— Поверхность, всѣ линіи кривизны кото- рой—круги . . . . .	698
— Сопряженные касательныя. . . . .	647		

## З

Замѣна. — Общій принципъ относительно замѣны безконечно-малыхъ при разыс- каніи предѣловъ отношеній или суммъ. . . . .	11	Замѣна.—Замѣна одной точки другою при разысканіи касательной и касательной плоскости . . . . .	13 и 17
--	----	--	---------

## И

Измѣненіе (варіація). — Безконечно малое измѣненіе длины прямой линіи. . . . .	21	Индикатриса.—Ея употребленіе для доказа- тельства нѣкоторыхъ теоремъ. . . . .	638 и 645
Индикатриса.—Опредѣленіе кривой, назван- ной Дюпеномъ (Dupin) индикатрисою . . . . .	638	Индикатриса сферическая. — Ея опредѣле- ніе . . . . .	566

## К

Карты географическія.—Указаніе необходи- мыхъ условій, чтобы карта была совер- шенной. . . . .	131	Координаты криволинейныя. — Разстояніе между двумя безконечно-близкими точ- ками въ системѣ криволинейныхъ ко- ординатъ . . . . .	123
Касательныя.—Разстояніе кривой до ея ка- сательной, на безконечно-маломъ раз- стояніи отъ точки касанія, есть без- конечно-малая второго порядка . . . . .	8 и 9	— Случай ортогональной системы. . . . .	124
— Условіе, чтобы двѣ точки могли замѣнить одна другую при разысканіи касатель- ной . . . . .	13	— Разстояніе между двумя точками на данной поверхности . . . . .	125
— Геометрическое опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ . . . . .	14	— Приложение предыдущихъ формулъ къ полярнымъ координатамъ . . . . .	127
— Угловой коэффициентъ касательной ра- венъ производной отъ ординаты . . . . .	24	— Приложение къ системѣ, образуемой однофокусными поверхностями второй степени. . . . .	128
— Уравненіе касательной къ плоской кри- вой . . . . .	78	— Разстояніе между двумя безконечно- близкими точками на поверхности вра- щенія . . . . .	130
— Касательная къ циклоидѣ . . . . .	83	Координаты криволинейныя ортогональ- ныя.—Опредѣленіе параметров $h_1, h_2, h_3$ , введенныхъ Ламэ (Lamé), которые не измѣняются вмѣстѣ съ направле- ніемъ осей . . . . .	183
— Касательная къ эллипсоидѣ . . . . .	83	— Если $x, y, z$ — прямолинейныя коорди- наты точки и $\rho, \rho_1, \rho_2$ — криволиней- ныя координаты, то	
— Задачи на касательныя. . . . .	14 и 83	$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{h^2} \frac{d\rho}{dx} . . . . .$	183
— Замѣчаніе, относящееся къ нѣкоторымъ задачамъ . . . . .	87	— Выраженіе суммы	
— Касательная къ кривой, уравненіе ко- торой дано въ полярныхъ координатахъ . . . . .	88	$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = \frac{d^2v}{dz^2}$	
— Аналитическое опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ . . . . .	83—89	въ системѣ ортогональныхъ криво- линейныхъ координатъ . . . . .	184 и 185
— Касательная къ кривой, нанесенной на шарѣ . . . . .	93	Коши (Cauchy). — Составленіе ряда сходя- щагося или расходящагося одновре- менно съ даннымъ рядомъ съ поло- жительными членами . . . . .	234
— Разность касательныхъ, проведенныхъ въ концахъ безконечно-малой дуги и окан- чивающихся въ точкѣ ихъ встрѣчи. . . . .	519	— Приложеніи этой теоремы . . . . .	235, 236 и 237
— Условіе, чтобы прямыя были касатель- ными къ одной и той же кривой. . . . .	573	— Данный имъ остатокъ ряда Тэйлора . . . . .	274
— Кратчайшее разстояніе между двумя без- конечно-близкими касательными всегда третьяго порядка . . . . .	573	— Созданная имъ теорія вычетовъ . . . . .	434
— Разстояніе между двумя безконечно- близкими касательными . . . . .	609	Коэффициенты неопредѣленные.—Приложе- ніе къ разложенію функций въ ряды . . . . .	324
Координаты криволинейныя. — Дифферен- ціалъ дуги кривой въ криволинейныхъ координатахъ . . . . .	123 и 126		

— Выводъ формулы Тэйлора по методу не- опредѣленныхъ коэффициентовъ . . . . .	325	Кривизна линіи. — Линіи кривизны эллип- соида . . . . .	683
— Разложене $x \cot x$ . . . . .	326	— Развертывающіяся поверхности . . . . .	690
— Разложене произведенія $(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)$ . . . . .	327	— Линіи кривизны поверхности, огибающей сферу . . . . .	694
— Разложене произведенія $(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z)$ . . . . .	328	— Радиусъ кривизны каналообразной по- верхности постояненъ . . . . .	696
— Разложене произведенія $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$ . . . . .	329	— Поверхность, въ линіи кривизны кото- рой круги . . . . .	698
Кривизна. — Родъ кривизны . . . . .	492	— Поверхности, линіи кривизны которыхъ совпадаютъ съ главными сѣченіями . . . . .	700
— Определе кривизны . . . . .	493	— Поверхности, въ линіи кривизны кото- рыхъ плоскія и расположены въ па- раллельныхъ плоскостяхъ . . . . .	703
— Центр кривизны . . . . .	494	— Поверхность, въ линіи кривизны которой плоскія . . . . .	705 и 706
— Радиусъ кривизны, его выраженіе . . . . .	495	Кривизны главные радиусы. — Ихъ опреде- леніе въ точкѣ поверхности . . . . .	627
— Различныя выраженія одного и того же радиуса для плоской кривой . . . . .	497	— Способъ ихъ нахожденія . . . . .	634
— Кривизна плоской кривой въ точкѣ воз- врата . . . . .	501	— Замѣчательное выраженіе главного ра- диуса кривизны . . . . .	637
— Радиусъ кривизны эллипса, циклоиды, логарифмической спирали . . . . .	504 и 505	— Изящный методъ определенія произве- денія главныхъ радиусовъ . . . . .	654
— Радиусъ кривизны рулеты . . . . .	506	— Приложение къ косымъ поверхностямъ . . . . .	656
— Кривизна ортогональныхъ линій . . . . .	508	— Теорема Штурма (Sturm) о нормаляхъ поверхности . . . . .	658
— Определе кривизны кривой двойкой кривизны . . . . .	578	— Радиусъ кривизны для развертывающей поверхности . . . . .	690
— Радиусъ кривизны кривой двойкой кривизны . . . . .	584	— Поверхность, оба главныхъ радиуса кривизны которой постоянны, есть сфера . . . . .	699
— Свойство кривыхъ, кривизна которыхъ постоянна . . . . .	607	Кривизны кругъ. — Его определе . . . . .	493
— Кривизна нормального сѣченія на по- верхности . . . . .	624 и 633	— Онъ пересѣкаетъ кривую . . . . .	496, 525 и 541
— Кривизна наклоннаго сѣченія . . . . .	629	— Разстояніе кривой до ея круга кривизны . . . . .	521
— Кривизна какой-угодно линіи, нанесен- ной на поверхности . . . . .	630 и 632	— Кругъ кривизны сферической линіи . . . . .	544
Кривизна вторая. — Определе второй кривизны . . . . .	580	— Полюсъ круга кривизны . . . . .	545
— Отношеніе обѣихъ кривизнъ . . . . .	581	— Определе круга кривизны кривой двойкой кривизны . . . . .	582
— Выразеніе для второй кривизны . . . . .	589	— Изящныя формулы, данныя Серре . . . . .	590
Кривизна геодезическая. — Определе геодезической кривизны сферической линіи . . . . .	542	Кривыя двойкой кривизны. — Касательныя къ кривымъ двойкой кривизны . . . . .	91
— Геодезическая кривизна малаго круга . . . . .	543	— Нормальная плоскость къ кривой двойкой кривизны (см. Кривизна, эволюты, и проч.) . . . . .	92
— Различныя выраженія геодезической кривизны сферической линіи . . . . .	546	Кривыя огибающія. — Огибающая есть геоме- трическое мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій огибаемой . . . . .	104
— Геодезическая кривизна пропорціональна разстоянію кривой до касательнаго къ ней большаго круга . . . . .	550	— Уравненіе огибающей системы кривыхъ . . . . .	105
— Определе геодезической кривизны на какой-угодно поверхности . . . . .	714	— Нѣкоторыя приложенія . . . . .	109 и 110
— Различныя выраженія геодезической кривизны . . . . .	714 и 719	Кривыя плоскія. — Различеніе между частями плоскости: внутренней и внѣшней по отношенію къ кривой . . . . .	82
Кривизна линіи. — Определе линій кривизны . . . . .	663	Кривыя сферическія. — Определе большо- го круга, касательнаго въ данной точкѣ . . . . .	93
— Ихъ дифференціальное уравненіе . . . . .	665	Куммеръ (Kummer). — Методъ для сужденія о сходимости ряда . . . . .	243 и 244
— Когда линія кривизны общая для двухъ поверхностей, поверхности пересѣкают- ся подъ постояннымъ угломъ . . . . .	678	— Методъ для суммированія рядовъ 255, 256 и 257	
— Линіи кривизны соотвѣтствуютъ линіямъ кривизны въ преобразованіи посред- ствомъ взаимныхъ радиусовъ-векторовъ . . . . .	683	Кэлей (Cauley). — Приложение формулы Ла- гранжа къ разложенію $\frac{1}{\varphi(z)}$ , когда из- вѣстно разложеніе цѣлыхъ степеней $\varphi(z)$ . . . . .	320
— Определе линій кривизны поверхно- стей вращенія . . . . .	685		
— Поверхность, линіи кривизны которой неопредѣленны . . . . .	687		



## Л

Лагранжъ (Lagrange).—Остатокъ ряда Тейлора . . . . .	273
— Формула Лагранжа для разложенія въ рядъ функціи, опредѣляемой уравненіемъ $z = a + x\varphi(z)$ . . . . .	311
— Обобщеніе, данное Лапласомъ (Laplace) . . . . .	312
— Какимъ является корень по формулѣ Лагранжа . . . . .	313
— Второе доказательство, принадлежащее Якоби (Jacobi) . . . . .	314
— Приложение формулы къ разложенію $(1 - 2ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	315
— Приложение формулы къ разложенію $\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1+x}}\right)^n$ . . . . .	316
— Разложеніе корня уравненія второй степени . . . . .	317
— Разложеніе корня уравненія $x^{n+1} + ax - b = 0$ . . . . .	318
— Разложеніе корня уравненія $a_0 = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . . . . .	319
— Разложеніе $\frac{1}{\varphi(z)}$ , когда извѣстно разложеніе цѣлыхъ степеней $\varphi(z)$ . . . . .	320
— Символическое выраженіе ряда Тейлора . . . . .	343
— Распространеніе формулы на функціи отъ двухъ переменныхъ . . . . .	397

Маклоренъ (Maclaurin).—Рядъ, обычно именуемый теоремою Маклорена . . . . .	278
— Доказательство теоремы Маклорена по методу неопредѣленныхъ коэффициентовъ . . . . .	279
Maxima и minima.—Опредѣленіе maximum'a функціи отъ одной переменнѣй . . . . .	472
— Условія maximum'a и minimum'a . . . . .	473
— Кратчайшее разстояніе точки до кривой . . . . .	474
— Условія maximum'a или minimum'a для функціи отъ двухъ переменныхъ . . . . .	480

Неопредѣленности.—Дроби, принимающія видъ $\frac{0}{0}$ . . . . .	451 и 452
— Дроби, принимающія видъ $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . .	453 и 454
— Другіе виды неопредѣленностей . . . . .	456
— Употребленіе рядовъ для нахождения истиннаго значенія неопредѣленности . . . . .	458 и 461
Непрерывность.—Условіе непрерывности рядовъ . . . . .	263
— Доказательство теоремы Абеля . . . . .	265
— Если рядъ, расположенный по степенямъ $x$ , сходящійся для нѣкоторыхъ значеній $x$ , то то же справедливо и для его производной . . . . .	267

Ламэ (Lamé).—Замѣчательная формула, относящаяся къ кривизнамъ двухъ рядовъ ортогональных линій . . . . .	511
— Аналогичная формула для кривыхъ, нанесенныхъ на сферѣ . . . . .	558
— Аналогичныя формулы, относящіяся къ какой угодно поверхности . . . . .	739
Лапласъ (Laplace).—Данное имъ доказательство формулы Лагранжа . . . . .	311
— Обобщеніе формулы . . . . .	312
— Создатель теоріи производящихъ функцій . . . . .	337
— Онъ далъ символическое выраженіе разложенія $\varphi(x+h, y+k)$ . . . . .	398
Лежандръ (Legendre).—Первый изучилъ извѣстныя функціи, вытекающія изъ разложенія $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	354
Лейбницъ (Leibnitz).—Вывелъ разложеніе $\frac{1}{(1-x^n)}$ изъ теоріи сложныхъ проентовъ . . . . .	225
Лиувиль (Liouville).—Что называется геодезическою кривизною . . . . .	542
Логарифмическая спираль.—Ея радіусъ кривизны . . . . .	504
— Ея эволюта . . . . .	532
Логарифмы.—Исслѣдованіе функціи $l(1+z)$ , когда $z$ —мнимое . . . . .	377
— Разложеніе $l(1+z)$ , когда $z$ —мнимое . . . . .	381

## М

Maxima и minima.—Распространеніе на функціи отъ какого-нибудь числа переменныхъ . . . . .	482
— Maxima и minima неявныхъ функцій . . . . .	484
Мангеймъ (Mannheim).—Доказательство теоремы Дюпена относительно поверхности, линіи кривизны которой круговыя . . . . .	698
Мёрфи (Murphy).—Извѣстное приложеніе теоремы Тейлора . . . . .	307
Монжъ (Monge).—Характеристическое свойство прямыхъ, нормальныхъ къ одной той же поверхности . . . . .	649

## Н

Нормаль.—Уравненіе нормали къ плоской кривой . . . . .	78 и 79
— Углы, составленные нормалью къ плоской кривой съ осями координатъ . . . . .	81
— Различеніе между внутреннею нормалью и внѣшнею . . . . .	82
— Нормаль къ поверхности . . . . .	95
— Углы нормали съ осями . . . . .	96
— Различеніе между внутреннею нормалью и внѣшнею . . . . .	96
— Не существуетъ, вообще, поверхности, нормальной къ данному пучку прямыхъ . . . . .	647
— Необходимое условіе для существованія такой поверхности . . . . .	648

Нормаль. — Характеристическое свойство нормалей къ поверхности . . . . .	§§ 650	къ сферѣ, онѣ также касательны къ конусу . . . . .	§§ 676
— Выраженіе угловъ, характеризующихъ направленіе нормали въ смежности съ данною точкою . . . . .	651	Нормаль главная.— Ея опредѣленіе . . . . .	
— Когда лучи, нормальные къ поверхности, преломлены, то, какова бы ни была поверхность, раздѣляющая среды, они остаются нормальными къ одной и той же поверхности . . . . .	659	— Вычисленіе угловъ, образуемыхъ ею съ осями . . . . .	587
— Поверхность, касательная къ нормалямъ данной поверхности . . . . .	673	— Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ главныхъ нормалей . . . . .	596
— Эта поверхность имѣетъ двѣ половины, которыя, видимыя изъ какой-нибудь точки пространства, кажутся пересекающимися подъ прямымъ угломъ . . . . .		— Главныя нормали не касательны къ одной и той же кривой . . . . .	597
— Когда нормали поверхности касательны	675	— Кратчайшее разстояніе между двумя бесконечно-близкими главными нормальми . . . . .	600
		— Главная нормаль эволюты кривой . . . . .	613
		Нормальная плоскость.— Нормальная плоскость къ кривой двойкой кривизны . . . . .	92
		— Уравненіе нормальной плоскости къ кривой двойкой кривизны . . . . .	92
О			
Обозначеніе символическое. — Символическое представленіе ряда Тэйлора . . . . .	343	и $y$ , представляющій его рядъ не содержитъ членовъ съ $\frac{1}{xy}$ . . . . .	398
— Приложеніе символическаго обозначенія къ разложенію $\varphi(x+h) - \varphi(x)$ . . . . .	344	Ортогональныя кривыя.— Разстояніе между двумя бесконечно-близкими кривыми . . . . .	507
— Доказательство теоремы Гершеля (Herschel) . . . . .	345	— Выраженіе радіуса кривизны въ функции коэффициентовъ разстоянія между двумя смежными точками . . . . .	508
Округленія (точки).— Ихъ опредѣленіе . . . . .	635	— Теорема Лама (Lamé) объ измѣненіи кривизны двухъ системъ плоскихъ ортогональных кривыхъ . . . . .	511
— Нужно два уравненія для ихъ опредѣленія . . . . .	635	— Законъ измѣненія сторонъ прямоугольниковъ, на которые разбивается плоскость . . . . .	514
Опредѣлители.— Опредѣленіе . . . . .	68	— Ортогональныя кривыя на сферѣ; теоремы, аналогичныя тѣмъ, которыя относятся къ плоскимъ кривымъ . . . . .	556
— Условіе, чтобы опредѣлитель равнялся нулю . . . . .	69	— Аналогичная теорема, относящаяся къ линиямъ, нанесеннымъ на какихъ-нибудь поверхностяхъ . . . . .	739
— Произведеніе двухъ опредѣлителей . . . . .	70	— Теорема Дюпена (Dupin) . . . . .	681
— Опредѣленіе функціональнаго опредѣлителя . . . . .	71	Особенныя точки.— Ихъ опредѣленіе . . . . .	462
— Опредѣленіе, аналогичное опредѣленію производной . . . . .	72	— Ихъ аналитическій признакъ . . . . .	463
— Необходимое и достаточное условіе, чтобы функціональный опредѣлитель равнялся нулю . . . . .	73	— Уединенныя точки . . . . .	464
— Опредѣлитель системы функций отъ функций . . . . .	74	— Точки возврата перваго рода . . . . .	464
— Опредѣлитель системы обратныхъ функций . . . . .	75	— Точки возврата втораго рода . . . . .	465
— Приведеніе функціональнаго опредѣлителя къ одночлену . . . . .	76	— Замѣчаніе, относящееся къ разысканію особенныхъ точекъ . . . . .	468
— При развертываніи опредѣлителя системы двухъ функций отъ переменныхъ $x$	77	— Особенности точки поверхностей . . . . .	469
		II	
Падула (Padula).— Замѣчаніе, относящееся къ особеннымъ точкамъ . . . . .	467	Переменные.— Одновременная замѣна функций и двухъ переменныхъ, отъ которыхъ она зависитъ . . . . .	179
Переменная независимая.— Вліяніе независимой переменной на дифференціалы порядка выше перваго . . . . .	136	Плоскость касательная. — Геометрическое доказательство существованія касательной плоскости въ точкѣ поверхности . . . . .	15
— Замѣна независимой переменной . . . . .	169	— Касательная плоскость къ поверхности находится на бесконечно-маломъ разстояніи втораго порядка отъ всякой точки поверхности, бесконечно-близкой къ точкѣ касанія . . . . .	16
— Случай многихъ независимыхъ переменныхъ . . . . .	176	— Условіе, чтобы одну точку можно было	
— Замѣна независимой переменной при вычисленіи вычета . . . . .	444		
Переменные.— Одновременная замѣна всѣхъ переменныхъ . . . . .	173		



замѣнить другою при опредѣленіи касательной плоскости . . . . .	§§	Поверхности огибающія.—Развертывающіяся поверхности. . . . .	§§
— Геометрическое опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей . . . . .	17	— Ихъ уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	112
— Уравненіе плоскости, касательной къ поверхности . . . . .	17	Поверхности однофокусныя второй степени. Система криволинейныхъ координатъ доставляемая этими поверхностями . . . . .	128
— Опредѣленіе нѣкоторыхъ касательныхъ плоскостей . . . . .	94	— Разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками въ этой системѣ . . . . .	129
— Замѣчаніе, относящееся къ предыдущимъ задачамъ . . . . .	98	Поверхности развертывающіяся.—Развертывающіяся поверхности, разсматриваемыя, какъ огибающія . . . . .	112
— Касательная плоскость къ линейчатой поверхности . . . . .	100	— Ихъ уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	209
— Случай, когда линейчатая поверхность—развертывающаяся . . . . .	102	— То же уравненіе, выводимое изъ характеристическаго свойства развертывающихся поверхностей . . . . .	210
Площадь, взятая на плоскости.—Дифференціалъ площади, взятой на плоскости, въ прямолинейныхъ координатахъ . . . . .	103	Поверхности вращенія.—Нормаль къ поверхности вращенія встрѣчаетъ ось . . . . .	98
— Въ полярныхъ координатахъ . . . . .	114	— Разстояніе между двумя бесконечно-близкими точками поверхности вращенія . . . . .	130
— Выраженіе въ прямолинейныхъ координатахъ предыдущаго дифференціала . . . . .	116	— Ея уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	204
Поверхности. — Поверхность свѣтовыхъ волнъ . . . . .	117	Поверхность, образуемая движеніемъ нѣкоторой прямой, скользящей по неподвижной прямой.—Ея уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	207
— Особенности точки поверхностей, ихъ общій аналитическій признакъ . . . . .	111	Подкасательная.—Выраженіе подкасательной . . . . .	80
— Конусъ, касательный къ поверхности въ особенной точкѣ . . . . .	469	— Ея выраженіе въ полярныхъ координатахъ . . . . .	88
— Линіи, по которымъ поверхность касается одной и той же плоскости . . . . .	470	Поднормаль.—Опредѣленіе поднормали . . . . .	80
Поверхности каналообразныя. — Каналообразныя поверхности, разсматриваемыя, какъ огибающія . . . . .	471	— Выраженіе поднормали въ прямолинейныхъ координатахъ . . . . .	80
— Ихъ уравненія въ частныхъ производныхъ . . . . .	113	— Выраженіе линіи, называемой поднормалью въ полярныхъ координатахъ . . . . .	87
Поверхности коническія.—Опредѣленіе касательной плоскости, уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	213	Постоянныя произвольныя. — Исключеніе произвольной постоянной . . . . .	188
Поверхности коноиды.—Ихъ уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	203	— Исключеніе какого-угодно числа постоянныхъ . . . . .	189
Поверхности косыя съ направляющею плоскостью.—Ихъ уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	205	— Исключеніе двухъ постоянныхъ для составленія уравненія въ частныхъ производныхъ . . . . .	191
Поверхности кривыя.—Уравненіе плоскости касательной къ поверхности . . . . .	208	— Исключеніе $n$ постоянныхъ въ уравненія съ такимъ же членомъ независимыхъ переменныхъ . . . . .	193
— Уравненіе нормали . . . . .	94	Преобразованія посредствомъ взаимныхъ радиусовъ-векторовъ.—Линіи кривизны поверхности, получаемой послѣ преобразованія, соответствуютъ линіямъ кривизны данной поверхности . . . . .	676
— Различіе между внутреннею нормалью и внѣшнею . . . . .	95	Произведенія бесконечныя.—Разложеніе въ рядъ произведенія . . . . .	
— Уравненіе въ частныхъ производныхъ цилиндрической поверхности . . . . .	96	$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z) \dots$ . . . . .	327
Поверхности линейчатыя.—Законъ, по которому перемѣщается касательная плоскость вдоль производящей . . . . .	202	— Разложеніе произведенія . . . . .	
— Условіе, чтобы касательная плоскость была бы одною и тою-же вдоль производящей . . . . .	102	$(1+xz)(1+x^3z)(1+x^5z) \dots$ . . . . .	328
— Ихъ уравненіе въ частныхъ производныхъ . . . . .	193	— Разложеніе произведенія . . . . .	
Поверхности огибающія.—Поверхность, огибающая рядъ поверхностей, уравненіе которыхъ содержитъ произвольный параметръ, есть геометрическое мѣсто пересѣченій каждой изъ нихъ съ смежною поверхностью . . . . .	106	$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots$ . . . . .	329
— Уравненіе огибающей поверхности . . . . .	107	— Разложеніе произведенія . . . . .	
— Поверхность, огибающая рядъ поверхностей, уравненія которыхъ содержатъ два параметра . . . . .	108	$(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \dots$ . . . . .	330
		— Разложеніе $e^{-a}$ въ произведеніе . . . . .	335
		— Условіе сходимости произведенія . . . . .	
		$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\dots$ , . . . . .	
		гдѣ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — вещественныя и одного знака . . . . .	400
		— Каковы бы ни были знаки чиселъ . . . . .	

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ , произведение — сходящееся, когда оба ряда	§§	Производная. — Производная отъ неявной функции . . . . .	§§
$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots,$		— Случай двухъ уравнений съ двумя неизвѣстными . . . . .	60
$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 + \dots$		— Случай какого-угодно числа уравнений . . . . .	62
сходящееся . . . . .	401	— Случай нѣсколькихъ независимыхъ переменныхъ . . . . .	63
— Произведения, состояща изъ мнимыхъ множителей . . . . .	403	— Всегда существуетъ функция, производная отъ которой равна данной функции . . . . .	64, 65 и 66
— Выраженіе $\sin x$ подъ видомъ безконечнаго произведения . . . . .	404	— Определеніе производныхъ порядка выше перваго . . . . .	115
— Выраженіе $\cos x$ . . . . .	405	— Последовательныя производныя отъ произведения . . . . .	132
— Выраженіе $\frac{\cos x - \cos a}{1 + \cos a}$ . . . . .	406	— Последовательныя производныя функций отъ функций . . . . .	139
— Выраженіе $\frac{\cos x + \cos a}{1 + \cos a}$ . . . . .	406	— Последовательныя производныя отъ $\varphi(x^2)$ . . . . .	140
— Выраженіе $\cos x + \tan \frac{1}{2} a \sin x$ . . . . .	407	— Вычисленіе $\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$ . . . . .	142
— Выраженіе $\cos x - \cot \frac{1}{2} a \sin x$ . . . . .	407	— Производныя порядка выше перваго для функций отъ нѣсколькихъ переменныхъ . . . . .	143
— Выраженіе $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . . . . .	408	— Порядокъ, въ которомъ берутся двѣ последовательныя производныя, безразличенъ . . . . .	159
— Выраженіе $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ . . . . .	408	— Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функций . . . . .	160
— Замѣчательное выраженіе для $\pi$ въ видѣ безконечнаго произведения . . . . .	416	— Изящное выраженіе $\frac{d^n x^n (lx)^n}{dx^n}$ . . . . .	165 и 166
Производныя. — Определеніе производной. . . . .	3 и 23	— Производныя какого-угодно порядка функций отъ функций . . . . .	307
— Производная отъ ординаты есть угловой коэффициентъ касательной . . . . .	24	— Числовыя значенія нѣкоторыхъ производныхъ, когда переменная обращается въ нуль . . . . .	308
— Производная отъ простыхъ функций . . . . .	25—31	Производныя частныя. — Определеніе частныхъ производныхъ перваго порядка . . . . .	146—158
— Производная отъ $x^{-m}$ . . . . .	26	— Частная производная отъ данной функции, взятая по данной переменной, является определенной только тогда, когда даются остальные переменныя, предполагаемыя постоянными при вычисленіи производной . . . . .	50
— Производная отъ $a^x$ . . . . .	27	Пуансо (Poinso). — Онъ первый устранилъ трудности, относящіяся къ разложеніямъ $\sin mx$ и $\cos mx$ въ ряды, расположенные по степенямъ $\sin x$ и $\cos x$ . . . . .	51 и 52
— Производная отъ $\log x$ . . . . .	28	— Онъ первый точно опредѣлилъ характеръ формулъ, относящихся къ разложенію угловыхъ функций . . . . .	298
— Производная отъ $\sin x$ . . . . .	29	Пуассонъ (Poisson). — Возраженіе на формулу	385
— Производная отъ $\cos x$ . . . . .	30	$(2 \cos x)^m = \cos mx + m \cos(m-2)x + \dots,$	
— Производная отъ $\tan x$ . . . . .	31	данную Эйлеромъ (Euler) . . . . .	384
— Производныя отъ обратныхъ функций . . . . .	32—35		
— Производныя отъ $\arcsin x$ . . . . .	34 и 145		
— Производная отъ $\arccos x$ . . . . .	34		
— Производныя отъ $\arctan x$ . . . . .	34 и 144		
— Производная функций отъ функций . . . . .	36—37		
— Производная отъ функции, связанной съ переменной нѣсколькими промежуточными функциями . . . . .	38		
— Производная отъ произведения . . . . .	39		
— Производная отъ частнаго . . . . .	40		
— Производная отъ степени . . . . .	41		
— Производная отъ выраженія вида $u^v$ . . . . .	42		
— Употребленіе производныхъ при изслѣдованіи функций . . . . .	44		
— Порядокъ величины безконечно-малой производной . . . . .	45		
— Частныя производныя; ихъ опредѣленіе . . . . .	50		
— Производная отъ сложной функции . . . . .	58		

## Р

Развертывающіяся поверхности. — Свойство имѣть безконечно-большой радіусъ кривизны характеристично для развертывающихся поверхностей . . . . .	693	Робертсъ Вилльямъ (William Roberts). — Системы кривыхъ, пересѣкающихся подъ постояннымъ угломъ . . . . .	90
		Родригъ (O. Rodrigues). — Онъ первый далъ	

замѣчательное выраженіе для функций, обозначаемой через $X_n$ . . . . .	355	Ряды.—Разложеніе $x \cot x$ . . . . .	304
Годригъ (O. Rodrigues).—Характеристическое свойство линий кривизны . . . . .	669	— Разложеніе $\frac{x}{e^x - 1}$ и $\frac{x}{e^x + 1}$ . . . . .	305
Рошъ (Roche).—Онъ далъ выраженіе остатка ряда Тэйлора . . . . .	275	— Различныя разложенія, выводимыя изъ разложенія $x \cot x$ . . . . .	306
Рулета.—Радиусъ кривизны какой-угодно рулеты . . . . .	506	— Рядъ Бернулли . . . . .	309
Ряды.—Опредѣленіе сходящагося и расходящагося ряда . . . . .	220	— Приложеніе ряда Бернулли къ числовому вычисленію $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ . . . . .	310
— Непосредственное суммирование нѣкоторыхъ рядовъ . . . . . 221, 222, 223, 224	224	— Рядъ Лагранжа . . . . .	311
— Суммирование нѣкоторыхъ рядовъ посредствомъ разложенія въ болѣе простые ряды . . . . . 225 и 226	226	— Обобщеніе предыдущей формулы . . . . .	312
— Преобразование Эйлера для рядовъ, расположенныхъ по степенямъ $x$ . . . . .	250	— Корни уравненія $z = a + x\phi(z)$ . . . . .	313
— Необходимость употребить при предыдущемъ преобразованіи только сходящіеся ряды . . . . .	251	— Когда функція развертывается въ рядъ, расположенный по степенямъ $x$ , разложеніе производной не содержитъ члена съ $\frac{1}{x}$ . . . . .	314
— Любопытное замѣчаніе по этому поводу . . . . .	251	— Доказательство формулы Лагранжа, данное Якоби . . . . .	314
— Второе доказательство, дающее предѣлъ допускаемой ошибки . . . . .	252	— Разложеніе $(1 - x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ , выводимое изъ формулы Лагранжа . . . . .	315
— Суммирование по методу Стирлинга . . . . . 253 и 254	254	— Разложеніе $\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1+x}}\right)^k$ . . . . .	316
— Методъ Куммера . . . . . 255, 256 и 257	257	— Корень уравненія второй степени, развернутый по формулѣ Лагранжа . . . . .	317
— Перемноженіе двухъ рядовъ съ вещественными и положительными членами . . . . .	269	— Корень уравненія $x^{n+1} + ax - b = 0$ . . . . .	318
— Перемноженіе двухъ рядовъ, модули членовъ которыхъ образуютъ сходящіеся ряды . . . . .	270	— Корень уравненія	
— Разложеніе $a^x$ . . . . .	280	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ,	
— Разложеніе $l(1+x)$ . . . . .	281	развернутый по степенямъ $a$ . . . . .	319
— Особенность этого ряда при $x=1$ , когда члены сгруппированы извѣстнымъ образомъ . . . . .	282	— Теорема Кэли (Cayley) . . . . .	320
— Разложеніе $(1+x)^m$ . . . . .	283	— Рядъ Бурмана (Burmann) . . . . .	321
— Условіе сходимости предыдущаго ряда при $x=1$ . . . . .	284	— Приложеніе къ разложенію $e^{az}$ въ рядъ по степенямъ $ze^{bz}$ . . . . .	322
— Изъ разложенія $(1+x)^m$ можно вывести разложеніе $l(1+x)$ . . . . .	285	— Рядъ Абеля . . . . .	323
— Изъ него же равнымъ образомъ можно вывести разложеніе $\arcsin x$ . . . . .	286	— Разложеніе въ рядъ нѣкоторыхъ безконечныхъ произведеній . . . . . 327—330	330
— А также разложеніе $(1-2xx+a^2)^{-\frac{1}{2}}$ . . . . .	288	— $n$ -ая степень ряда . . . . .	331
— Определеніе и выраженіе функций, называемой $X_n$ . . . . .	288	— Теорема Эйзенштейна, доказанная Сильвестромъ (Sylvester) . . . . .	332
— Разложеніе $\sin x$ . . . . .	289	— Рядъ Стирлинга (Stirling) . . . . .	333
— Разложеніе $\cos x$ . . . . .	290	— Формула Буля (Boole) . . . . .	334
— Разложеніе $\cos mx$ въ рядъ по степенямъ $\sin x$ . . . . .	291	— Формулы Чебышева (Tchebichef) . . . . .	335
— Разложеніе $\sin mx$ въ рядъ по степенямъ $\sin x$ . . . . .	293	— Предѣлы, въ которыхъ разложеніе функций въ рядъ по степенямъ переменной невозможно . . . . .	379
— Отсюда выводится разложеніе $x$ въ рядъ по степенямъ $\sin x$ . . . . .	294	— Разложеніе $l(1+z)$ при $z$ мнимомъ . . . . .	381
— Также выводятся отсюда разложенія $\sin x$ и $\cos x$ въ ряды по степенямъ $x$ . . . . .	295	— Замѣчательный рядъ, выводимый изъ предыдущаго . . . . .	382
— Разложеніе $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$ въ рядъ по степенямъ $\tan x$ . . . . .	299	— Разложеніе $(1+z)^m$ при $z$ мнимомъ . . . . .	384
— Разложеніе $\arctan x$ . . . . .	300	— Разложеніе $\frac{x}{e^x - 1}$ . . . . .	387
— Разложеніе $\arctan(x+h)$ . . . . .	301	— Разложеніе $\tan x$ и $\operatorname{cosec} x$ . . . . .	388
— Разложеніе $\arcsin x$ . . . . .	302	— Разложеніе $(1-2xz+a^2)^{-\frac{1}{2}}$ , выраженіе коэффициентовъ . . . . .	389
— Разложеніе $(\arcsin x)^2$ . . . . .	303	— Разложеніе функций, опредѣляемой уравненіемъ $\tan y = \cos x \cdot \tan x$ . . . . .	390



Ряды.—Доказательство формулъ

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{\pi - x} + \dots,$$

$$\tan x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} - \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} + \frac{1}{\frac{3\pi}{2} - x} - \dots,$$

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} + \dots \quad 409$$

— Доказательство разложения

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \quad 410$$

— Доказательство рядовъ

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots,$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots,$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \quad 414$$

— Разложение  $x^3$  въ рядъ по степенямъ  $\sin x$  . . . . . 415

— Нѣкоторые ряды, выводимые изъ теоріи вычетовъ . . . . . 447

— Употребленіе рядовъ для нахождения истиннаго значенія неопредѣленностей 458—461

Ряды мнимые. — Условіе сходимости мнимаго ряда . . . . . 249

— Рядъ

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

§§

въ которомъ  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  уменьшаются, сходящійся при всякомъ мнимомъ значеніи  $x$ , модуль котораго есть единица . . . . . 249Ряды, расположенные по степенямъ переменной.—Всякій рядъ, расположенный по степенямъ переменной, члены котораго не возрастаютъ безконечно при  $x=x_1$ , сходящійся при значеніи, модуль котораго меньше модуля  $x_1$  . . . . . 259

— Кругъ сходимости . . . . . 261

— Если рядъ, расположенный по степенямъ  $x$ , сходящійся при нѣкоторомъ значеніи  $x$ , то тѣмъ самымъ онъ является сходящимся при всякомъ значеніи для  $x$  съ меньшимъ модулемъ . . . . . 258

— Теорема Абеля, относящаяся къ непрерывности этихъ рядовъ . . . . . 265

— Два ряда, расположенные по степенямъ  $x$ , не могутъ быть равны для значеній, содержащихся между двумя данными предѣлами, иначе какъ тождественно . . . . . 268

Ряды расходящіеся.—Нелѣпныя слѣдствія, къ которымъ можетъ повести введеніе расходящихся рядовъ въ вычисленія . . . . . 228

Ряды съ членами попеременно положительными и отрицательными.—Рядъ—всегда сходящійся, если абсолютныя значенія его членовъ образуютъ конечный рядъ . . . . . 246

— Теорема, обратная предыдущей, не всегда справедлива . . . . . 247

— Вліяніе порядка членовъ сходящагося ряда . . . . . 248

С

Серре (Serret). — Формула Стирлинга для выраженія произведенія  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ , выведенная изъ формулы Валлиса . . . . . 417

— Изящныя формулы, относящіяся къ кривымъ двойкой кривизны . . . . . 590

Сильвестръ (Sylvester). — Доказательство теоремы Эйзенштейна (Eisenstein) . . . . . 332

Символическое выраженіе.—Символическое выраженіе разложения

$$\varphi(x+h, y+k) \dots \dots \dots 396$$

Смежности (уголь).—Разность между угломъ, составляемымъ хордою съ касательною, и половиною угла смежности . . . . . 518

Соприкасающаяся плоскость.—Ея опредѣленіе . . . . . 562—566

— Уголъ между соприкасающеюся плоскостью и смежною касательною есть безконечно-малая второго порядка . . . . . 567

— Пересѣченіе соприкасающейся плоскости со смежною касательною . . . . . 568

— Пересѣченіе двухъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей . . . . . 569

— Пересѣченіе трехъ безконечно-близкихъ соприкасающихся плоскостей . . . . . 570

— Огибающая поверхность соприкасающихся плоскостей . . . . . 571

— Уравненіе соприкасающейся плоскости . . . . . 574

Соприкасающаяся плоскость.—Соприкасающаяся плоскость винтовой линіи . . . . . 576

— Ось соприкасающейся плоскости есть пересѣченіе двухъ смежныхъ нормальныхъ плоскостей . . . . . 593

— Разстояніе кривой до соприкасающейся плоскости . . . . . 608

Соприкасающаяся сфера.—Ея опредѣленіе . . . . . 601

— Опредѣленіе ея центра и радіуса . . . . . 603—606

Соприкасающійся кругъ.—Опредѣленіе соприкасающагося круга . . . . . 10

— Представляется въ случаѣ кратчайшаго разстоянія до кривой . . . . . 474

— Онъ не отличается отъ круга кривизны . . . . . 540

— Соприкасающійся кругъ кривой двойкой кривизны не отличается отъ круга кривизны . . . . . 583

Соприкасающіяся кривыя.—Ихъ опредѣленіе . . . . . 539

Соприкосновеніе.—Опредѣленіе порядка соприкосновенія . . . . . 533 и 534

Стирлингъ (Stirling). — Суммированіе ряда, даннаго имъ въ его трудѣ о суммированіи рядовъ . . . . . 222

— Методъ суммированія рядовъ съ положительными членами . . . . . 253

Стирлингъ (Stirling).—Рядъ Стирлинга . . .	§§ 333	онъ отличается отъ единицы, даетъ	§§
— Замѣчательная формула для приближен-	417	возможность рѣшить вопросъ о сходи-	238 и 241
наго выраженія произведенія $1.2.3\dots n$		мости или расходимости ряда . . .	242
Сходимость. — Когда члены положительны,		— Правило Гаусса . . . . .	243 и 244
необходимое и достаточное условіе схи-	229	— Методъ Куммера . . . . .	261
димости заключается въ томъ, чтобы		— Кругъ сходимости. Что называется кру-	
сумма не увеличивалась безпредѣльно .	230	гомъ сходимости ряда . . . . .	
— Условіе сходимости, выводимое изъ от-		— Сходимость безконечныхъ произведеній	
ношенія члена къ его предшествующему	231	вида	
— Сходимость ряда съ положительными		$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n),$	
членами, общій членъ котораго $u_n$		гдѣ $a_1, a_2, \dots, a_n$ вещественны и од-	400
зависитъ отъ предѣла $\frac{1}{u_n^n}$ . . . . .	232	ного знака . . . . .	401
Сходимость рядовъ съ положительными		— Случай, когда вторые члены, всегда ве-	
членами. Если $u_n$ — общій членъ ряда	233	щественные, не одного и того же знака	403
съ положительными членами, то для схи-		— Сходимость безконечнаго произведенія,	
димости необходимо, чтобы $u_n$ стреми-	234	множители котораго—минимые . . . . .	
лось къ нулю . . . . .	235 и 236	— Рядъ, дающій $\frac{x}{e^x - 1}$ , перестаетъ быть	
Обратная этой теорема не всегда спра-		сходящимся, когда $x$ превышаетъ $2\pi$ ,	
ведлива; любопытное по этому поводу	236	но, тѣмъ не менѣе, можетъ служить	413
замѣчаніе Абеля . . . . .		для численнаго вычисленія . . . . .	627
Составленіе ряда сходящагося или рас-		Сѣченія главныя—Ихъ опредѣленіе . . . . .	633
сходящагося одновременно съ даннымъ	234	— Способъ ихъ опредѣлять . . . . .	636
рядомъ съ положительными членами .		— Замѣчательное соотношеніе между измѣ-	
Приложеніе къ условіямъ сходимости		неніями, относящимся къ двумъ пере-	
ряда . . . . .		мѣнныямъ по главнымъ сѣченіямъ. .	700
Составленіе нѣкоторыхъ функцій отъ		— Поверхность, линіи кривизны которой	
общаго члена, предѣлы которыхъ, если		совпадаютъ съ главными сѣченіями. .	

## Т

Тэйлора (Taylor) теорема.—Доказательство		Тэйлора (Taylor) теорема.—Разложеніе $\sin mx$	
Тэйлора . . . . .	273	въ рядъ по степенямъ $\cos x$ . . . . .	297
— Выразеніе остатка ряда, данное Лагран-	274	— Замѣчаніе относительно предыдущихъ	298
жемъ . . . . .		рядовъ . . . . .	
— Второй видъ остатка, данный Коши . .	275	— Разложеніе $\frac{\sin mx}{\cos^m x}$ въ рядъ по степе-	
Третій видъ остатка, данный Шлёмплъ-		нямъ $\tan x$ . . . . .	299
хомъ. . . . .	276	— Разложеніе $\arctan x$ . . . . .	300
Безконечно-малое приращеніе функцій,		— Разложеніе $\arctan(x + h)$ . . . . .	301
выводимое изъ теоремы Тэйлора . . .	277	— Различныя слѣдствія изъ этой формулы	302
— Теоремы, относящіяся къ приращенію	280	— Разложеніе $\arcsin x$ . . . . .	303
какой-угодно непрерывной функцій . .	281	— Разложеніе $(\arcsin x)^2$ . . . . .	304
— Приложеніе къ разложенію $a^x$ . . . .	289	— Разложеніе $x \cot x$ . . . . .	305
— Приложеніе къ разложенію $\ln(1+x)$ . .	290	— Разложеніе $\frac{x}{e^x - 1}$ и $\frac{x}{e^x + 1}$ . . . . .	391
— Приложеніе теоремы Тэйлора къ разло-	291	— Распространеніе ряда Тэйлора на функ-	392
женію $\sin x$ . . . . .	293	ціи отъ двухъ переменныхъ . . . . .	393
— Разложеніе $\cos x$ . . . . .	296	— Выразеніе остатка. . . . .	
— Разложеніе $\cos mx$ въ рядъ по степе-		— Безконечно-малое приращеніе функцій	
нямъ $\sin x$ . . . . .		отъ двухъ переменныхъ . . . . .	
— Разложеніе $\sin mx$ въ рядъ по степе-			
нямъ $\sin x$ . . . . .			
— Разложеніе $\cos mx$ въ рядъ по степе-			
нямъ $\cos x$ . . . . .			

## У

Уравненія въ частныхъ производныхъ.—		Уравненія въ частныхъ производныхъ.—	
Исключеніе произвольной функцій . .	187	Составленіе безконечнаго числа рѣше-	
— Составленіе уравненія въ частныхъ диф-		ній, отличныхъ отъ рѣшеній, содержа-	193
ференціалахъ посредствомъ исключенія	191	щихся въ первообразномъ уравненіи .	
двухъ постоянныхъ . . . . .	192	— Распространеніе на функцій отъ ка-	196
— Полученное уравненіе — болѣе общее,		кого-угодно числа переменныхъ . . .	
чѣмъ то, изъ котораго оно получено .		— Исключеніе $k$ произвольныхъ функцій,	

входящихъ въ $k+1$ совместныхъ уравнений. . . . .	§§	Уравненія дифференціальныя.—Опредѣленіе дифференціального уравненія . . . . .	§§
Уравненія въ частныхъ производныхъ.—	199	— Составленіе дифференціальныхъ уравненій посредствомъ исключенія постоянной . . . . .	186
Исслѣдованіе особаго случая, представляющагося всякій разъ, какъ уравненіе, полученное въ частныхъ дифференціалахъ, перваго порядка, не будучи первой степени относительно производныхъ . . . . .	201	— Исключеніе какого-угодно числа постоянныхъ . . . . .	188
— Цилиндрическія поверхности . . . . .	202	— Замѣчательное введеніе дифференціального уравненія въ одну арифметическую задачу . . . . .	189
— Коническія поверхности . . . . .	203	Уравненія дифференціальныя полныя.—Ихъ опредѣленіе . . . . .	214
— Поверхности вращенія . . . . .	204	— Способъ ихъ составлять посредствомъ исключенія постоянныхъ . . . . .	215
— Конюиды . . . . .	205	— Полное дифференціальное уравненіе вида	216
— Поверхности, образуемыя прямою, скользящею по неподвижной прямой . . . . .	207	$Pdx + Qdy + Rdz = 0$	
— Косыя поверхности съ направляющею плоскостью . . . . .	208	не всегда соответствуетъ какой-нибудь зависимости между $x, y$ и $z$ . . . . .	217
— Развертывающіяся поверхности . . . . .	209	— Обобщеніе предыдущихъ результатовъ . . . . .	218
— Линейчатые поверхности . . . . .	212		
— Каналообразныя поверхности . . . . .	213		
— Поверхности, линіи кривизны которыхъ плоскія . . . . .	706		

## Ф

Функции.—Опредѣленіе обратныхъ функций.	32	Функции.—Опредѣленіе нѣкоторыхъ функций. . . . .	365 и 372
— Определеніе функций отъ функций . . . . .	36	— Различіе между выполненіемъ и невыполненіемъ опредѣленными функциями . . . . .	373
— Условія, чтобы функция была возрастающею или убывающею . . . . .	44	— Какъ обозначаютъ специальное значеніе для функции, не выполненіе опредѣленной . . . . .	373
— Исслѣдованіе функции $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	44	— Если кривая, служащая для опредѣленія этого значенія, видоизмѣняется, то наступаетъ внезапное измѣненіе, когда она проходитъ черезъ нѣкоторыя точки плоскости . . . . .	374
— Исслѣдованіе функции $l(1+x)-x$ . . . . .	44	— Исслѣдованіе $\sqrt{x+y\sqrt{-1}}$ . . . . .	375
— Составленіе уравненія въ частныхъ дифференціалахъ посредствомъ исключенія произвольной постоянной . . . . .	197 и 198	— Исслѣдованіе $(1+z)^n$ . . . . .	376
— Исключеніе $k$ произвольныхъ функций, входящихъ въ $k+1$ совместныхъ уравненій . . . . .	199	— Разысканіе функции даннаго вида, наименѣе уклоняющейся отъ данной функции . . . . .	488
— Функции, названныя Лежандромъ (Legendre) $X_n$ . . . . .	354	— Приложение къ разысканію многочлена $n$ -ой степени, наименѣе уклоняющагося отъ нуля . . . . .	491
— Выраженіе $X_n$ , выведенное изъ теоремы Лагранжа . . . . .	315	Функции неявныя.—Производныя высшаго порядка отъ неявныхъ функций . . . . .	165 и 166
— То же выраженіе, полученное прямо . . . . .	355	— Maximum и minimum неявныхъ функций . . . . .	484
— Уравненіе $X_n=0$ имѣетъ $n$ вещественныхъ корней, содержащихся между $-1$ и $+1$ . . . . .	356	Функции обратныя.—Опредѣлитель системы обратныхъ функций . . . . .	76
Дифференціальное уравненіе второго порядка, которому удовлетворяетъ $X_n$ . . . . .	357	Функции отъ нѣсколькихъ переменныхъ.—	
— Простое соотношеніе между $X_n, X_{n+1}$ и $X_{n-1}$ . . . . .	358	Выраженіе ихъ безконечно-малаго приращенія въ видѣ ряда . . . . .	393
— Выраженіе производной $\frac{dX_{n+1}}{dx}$ . . . . .	358	— Разложеніе въ рядъ по степенямъ и произведеніямъ переменныхъ . . . . .	394 и 395
— Определеніе мнимой функции . . . . .	359	— Распространеніе формулы Лагранжа на функции отъ двухъ переменныхъ . . . . .	397
— Условія, чтобы выраженіе вида $P+Q\sqrt{-1}$ было функциею отъ $x+y\sqrt{-1}$ . . . . .	360	— Доказательство Якоби (Jacobi) . . . . .	398
— Уравненіе въ частныхъ производныхъ, которому должны удовлетворять $P$ и $Q$ . . . . .	361	— Maximum и minimum функций отъ двухъ переменныхъ . . . . .	480
— Разность двухъ мнимыхъ функций, имѣющихъ одну и ту же производную, постоянна . . . . .	364	— Распространеніе на функции отъ нѣсколькихъ переменныхъ . . . . .	482

Функции отъ функций. — Определитель системы функций отъ функций . . . . .	§§ 75	Функции производящія. — Принципы ихъ теорій . . . . .	§§ 337 и 340
— Последовательныя производныя функций отъ функций . . . . .	140 и 141	— Нѣкоторыя приложенія . . . . .	341
— Производныя отъ функций $\varphi(x^2)$ . . . . .	142	Функции симметрическія. — Приложеніе исчисления вычетовъ къ вычисленію симметрическихъ функций корней уравненія . . . . .	448
— Производная какого-угодно порядка функции отъ функций . . . . .	308	— Приложеніе къ двумъ уравненіямъ съ двумя неизвѣстными . . . . .	450
Функции производящія. — Ихъ опредѣленіе . . . . .	337		

## Ц

Циклоида. — Касательная къ циклоидѣ . . . . .	14	Циклоида. — Дифференціалъ дуги циклоиды . . . . .	119
— Дуга циклоиды . . . . .	20	— Ея радіусъ кривизны . . . . .	504
— Длина дуги циклоиды . . . . .	20	— Ея эволюта . . . . .	529

## Ч

Чебышевъ (Tchebichef). — Изъ формулы $F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots$ вывести разложеніе $f(1)$ въ рядъ вида: $f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + \dots$ . . . . .	335	Чебышевъ (Tchebichef). — Разложеніе $e^{-a}$ въ произведеніе . . . . .	335
		— Формула, аналогичная предыдущей . . . . .	336
		— Разысканіе функций даннаго вида, наименѣе уклоняющейся отъ данной функции . . . . .	488

## Ш

Шлёмилхъ (Schlömlich). — Онъ далъ одно изъ выраженій для остатка ряда Тэйлора . . . . .	275
---	-----

## Э

Эволюта — Дуга эволюты . . . . .	22	Эйзенштейнъ (Eisenstein). — Авторъ теоремы, относящейся къ разложенію какихъ-угодно степеней ряда . . . . .	332
— Ея опредѣленіе . . . . .	522	Эйлеръ (Euler). — Преобразование одного класса рядовъ . . . . .	250
— Ея свойства . . . . .	523 и 524	— Онъ первый далъ разложенія $\sin mx$ и $\cos mx$ въ рядъ, расположенный по степенямъ $\sin x$ и $\cos x$ . . . . .	404
— Эволюта эллипса . . . . .	527	— Онъ далъ разложеніе $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots$ въ рядъ, расположенный по степенямъ $x$ . . . . .	330
— Циклоиды . . . . .	529	— Онъ далъ формулу $(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2) + \dots$ . . . . .	385
— Эволюта эпициклоиды . . . . .	528 и 532	Эпициклоида. — Касательная къ эпициклоидѣ . . . . .	83
— Логарифмической спирали . . . . .	532		
— Сферическія эволюты . . . . .	553		
— Опредѣленіе эволюты кривой двойкой кривизны . . . . .	610		
— Длина дуги эволюты . . . . .	611		
— Главная нормаль эволюты . . . . .	613		
Эволюты. — Поверхность, служащая геометрическимъ мѣстомъ эволютъ . . . . .	615		
— Эволюты, по развертываніи содержащей ихъ поверхности, переходятъ въ прямыя линіи . . . . .	616		
— Уравненіе эволютъ . . . . .	622		

## Я

Якоби (Jacobi). — Опредѣленіе функциональнаго опредѣлителя . . . . .	71	Якоби (Jacobi). — Доказательство формулы Лагранжа (Lagrange) . . . . .	314
— Онъ далъ простое выраженіе для $\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}$ . . . . .	143	— Доказательство формулы Лагранжа (Lagrange) въ случаѣ двухъ переменныхъ . . . . .	398
		— Теорема, относящаяся къ какой-угодно замкнутой кривой . . . . .	725



## ОПЕЧАТКИ

Стран.	Строка.	Напечатано:	Должно быть:
279	7 сверху	§ 27	§ 275
292	10 снизу	$\sin^2 x$	$\sin^3 x$
306	1 снизу	$\frac{da}{da}$	$\frac{du}{da}$
313	7 снизу	остатковъ	вычетовъ
314	10 сверху	§ 283	§ 288
321	11 снизу	$(1 + x^n z) =$	$(1 + x^n z) \dots =$
435	1 снизу	$\frac{1}{2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots}$	$\frac{1}{2 + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \dots}$
478	5 сверху	$M''$	$M'$
512	9 снизу	—	— $h$
521	2 сверху	предыдущей но $\frac{n}{h^1}$	предыдущей, но $\frac{n}{h^2}$
560	12 снизу	ПОВЕРХНОСТИ	ТАКОЙ ПОВЕРХНОСТИ
656	15 сверху	$\varphi(u) = -\frac{1}{2} \sqrt{-c - 4u + c}$	$\varphi(u) = -\frac{1}{2} \sqrt{-c - 4u + c'}$
693	15 сверху	другу	дугу
716	2 снизу	$MT$	$MT$
717	1 сверху	$\frac{2M'P'}{MM'^2}$	$\frac{2M''P'}{MM'^2}$
717	9 сверху	$d^2x + pd^3z + (rdx + sdy)d^2z = 0$	$d^2x + pd^3z + (rdx + sdy)d^2z = 0$
728	15 снизу		

Вісесвітній Педагогічний  
ІНСТИТУТ ім. С. М. КІРОВА